



LEHRBUCH



DER

PRAKTISCHEN GEOMETRIE

VON

DR. G. CHR. K. HUNAEUS,

PROFESSOR AN DER POLYTECHNISCHEN SCHULE ZU HANNOVER.

ZWEITE, UMGEARBEITETE UND VERMEHRTE AUFLAGE.

MIT 211 HOLZSCHNITTEN.

HANNOVER.

CARL RÜMPLER.

1868.


LIBRERIA
ERMANNO LOESCHER
TORINO
FIRENZE

LEHRBUCH DER PRAKTISCHEN GEOMETRIE.

LEHRBUCH

DER

PRAKTISCHEN GEOMETRIE

VON

DR. G. CHR. K. HUNAEUS,

PROFESSOR AN DER POLYTECHNISCHEN SCHULE ZU HANNOVER.

ZWEITE, UMGEARBEITETE UND VERMEHRTE AUFLAGE.

MIT 211 HOLZSCHNITTEN.

HANNOVER.

CARL RÜMPLER.

1868.

Druck von August Grimpe in Hannover.

Vorrede zur ersten Auflage.

Will man den Unterschied zwischen der formellen und materiellen Ausbildung für einzelne Unterrichtszweige auf den technischen Lehranstalten gelten lafsen, so dürfte die praktische Geometrie ohne Zweifel zu den Wifsenschaften zu zählen sein, bei deren Unterricht von dem Lehrer besonders die materielle Ausbildung im Auge zu haben ist. Denn dem Begriffe der praktischen Geometrie gemäfs soll der Vortrag über diese Wifsenschaft, verbunden mit praktischen Uebungen, den Lernenden befähigen, kleinere oder gröfsere Theile der Erdoberfläche zu mefsen und auf dem Papiere abzubilden, also dem Lernenden zeigen, wie durch Hülfe der Mefswerkzeuge mit Zugrundelegung mathematischer Vorkenntnisse der genannte Zweck auf die möglichst leichteste und zugleich sicherste Weise zu erreichen ist, weniger soll er aber beabsichtigen, den Verstand in der Bildung der Begriffe zu üben und die Urtheilskraft zu schärfen. Deshalb soll der Vortrag auch alle solche theoretische Entwicklungen zu vermeiden suchen, die theils wegen der Natur der Mefsapparate, theils wegen der Beschaffenheit des aufzunehmenden Terrains gar nicht, oder nur in sehr seltenen Fällen eine Anwendung erleiden können. Für den letzteren Fall müfsen gerade die erworbenen mathematischen Kenntnifse den Führer des Geodäten abgeben.

Als Wifsenschaft und namentlich als eine mathematische Disciplin verlangt aber auch die praktische Geometrie einen

wifsenschaftlichen und methodischen Lehrgang, der, wenn er auch nicht immer wegen der Abhängigkeit vom darzustellenden Gegenstande, von der Analysis der Begriffe zur Synthesis der Wifsenschaft und von dieser zur Selbstständigkeit der Erfindung fortschreitet, doch möglichst vom Leichteren zum Schwereren, vom Einfacheren zum Zusammengesetzten führt.

Diese Ideen waren es, welche mich bei der Ausarbeitung eines Heftes mit leiteten, das ich den Vorträgen über praktische Geometrie, welche ich seit 1843 neben den Vorträgen über darstellende Geometrie und Geognosie an der hiesigen polytechnischen Schule halte und früher an der damaligen Königlichen Berg- und Forstschule zu Clausthal hielt, zum Grunde legte, wobei ich aber zugleich die Praxis des Mefsens und deren jetzige Anforderungen im Auge hatte. Ich darf versichern, dafs ich die nachfolgenden Bogen mit vieler Liebe und Sorgfalt ausarbeitete und dabei bemüht war, einen Mittelweg zwischen unverständlicher Kürze und ermüdender Weitschweifigkeit einzuschlagen. Ob ich das mir vorschwebende Ziel erreicht habe, will ich dem nachsichtsvollen Urtheile gründlicher Kenner der Wifsenschaft und ihrer Praxis überlafsen.

Nach meiner Ansicht ist dem Lernenden eine genaue Kenntnis der Mefsapparate und der Methoden ihrer Prüfung und Berichtigung durchaus nöthig, weil nur danach der Grad der Genauigkeit einer ausgeführten Mefsung mit beurtheilt werden kann. Deshalb mufs aber der Beschreibung der Mefswerkzeuge eine Darstellung der dem Verstehen derselben zum Grunde liegenden optischen Lehren vorangeschickt werden. Bei der Beschreibung der Winkelmefser und Nivellierwerkzeuge habe ich mich auf die meistens nur zur Anwendung kommenden beschränkt. Die Zeichnungen zu den Mefsapparaten sind mit nur sehr wenigen Ausnahmen mit Zugrundelegung eines Mafsstabes, der aber des Raumes wegen bei verschiedenen Apparaten nicht derselbe sein konnte, genau nach den Werkzeugen angefertigt, welche die reichhaltige mathematische Sammlung unserer Lehranstalt besitzt, und

glaube ich dem Lernenden durch die Durchschnittszeichnungen ganz besonders einen Dienst geleistet zu haben, weil ihm dadurch nur eine gründliche Kenntnis der inneren Theile der Mefswerkzeuge möglich wird.

Da ich im Allgemeinen nur die Kenntnis der Elementar-Mathematik voraussetzen darf, so konnte die im 8. Abschnitte enthaltene Betrachtung über die Gröfse der Fehler beim Mefsen der Dreiecke nur auf einem Umwege abgeleitet werden. Aus demselben Grunde mufste ich auch die für die Praxis so höchst wichtigen Ausgleichungen bei dem Mefsen der Winkel mittelst des Theodolithen, da dieselben nur durch die Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Methode der kleinsten Quadrate auszuführen sind, übergehen. Aus eben dem Grunde konnte ich im 13. Abschnitte nur die Grundzüge der höheren Geodäsie und darin nur die Möglichkeit des beim Mefsen grofser Erdstrecken anzuwendenden Verfahrens zeigen.

Fingierte Mefsungsbeispiele über alle Methoden der Aufnahmen zu geben, schien mir überflüfsig, da die in der Praxis vorkommenden Beispiele sich meistens anders gestalten, wie sie hinter dem Schreibtische gebildet werden. Die auf der 9. und 11. Kupfertafel verzeichneten wenigen Beispiele sind aus den angestellten praktischen Uebungen hervorgegangen. Beim Erlernen der praktischen Geometrie bleiben stets vielfach angestellte Uebungen auf dem Felde die Hauptsache. Deshalb habe ich oft nur auf kurzgefafste Regeln, oft nur auf Andeutungen, bei der Angabe der Methoden der Aufnahmen, mich beschränkt.

Zahlenbeispiele zu den abgeleiteten Formeln sind zur Raumersparung weggelafsen und nur da aufgenommen, wo ich vermuthen konnte, dafs die Ausführungen dem Lernenden Schwierigkeiten machen würden.

Die Markscheidekunst, als letzter Zweig der praktischen Geometrie, wurde nur deshalb dem Drucke nicht mit übergeben, um den Umfang und die Kosten des Werkes nicht noch mehr zu vergröfsern, obgleich der Verfafser, der früher als Markscheider bei dem oberharzischen Gang-Bergbau an-

gestellt war, sich des Ausspruchs nicht enthalten kann, dafs in den meisten Schriften über praktische Geometrie die von der Markscheidekunst gemachten Darstellungen wenig geeignet sind, um dem Unkundigen eine klare Vorstellung von den markscheiderischen Arbeiten zu geben.

Hannover, im December 1847.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Schon im Jahre 1863 wurde in der Vorrede zu des Verf. Werke: Die geometrischen Instrumente u. s. w. auf eine neue Bearbeitung seines Lehrbuchs der praktischen Geometrie. Hannover, 1848, hingewiesen, da es dem Verf. darauf ankam, seinen Vorträgen über praktische Geometrie, Statt der damals im Buchhandel bald vergriffenen Auflage eine neue Bearbeitung wieder zum Grunde legen zu können. Verschiedener anderer Berufsarbeiten wegen hat sich aber die Vollendung dieser neuen Auflage bis jetzt verzögert.

Im Allgemeinen ist zwar die frühere Anordnung der einzelnen Disciplinen hier beibehalten, indem die erste Abtheilung des die niedere Geodäsie behandelnden ersten Buches von den Hülfsmitteln zu den Aufnahmen, die zweite von den geometrischen Aufnahmen und die dritte von den graphischen Darstellungen des Gemefsenen handelt, in dem zweiten Buche aber ein Abrifs der höheren Geodäsie gegeben wird. Indessen sind die in der 1. Aufl. vorangeschickten physikalischen Hülfssätze und die Anfangsgründe der sphärischen Trigonometrie, da beide Branchen als bekannt vorausgesetzt werden dürfen, in dieser Auflage weggelafsen. Sollte der eine oder der andere Lehrer, der sich des Werkes bei seinem Unterrichte als

Leitfaden bedienen will, eine andere Anordnung einzelner Capitel für wünschenswerth erachten: so dürfte diese Umänderung nicht schwierig sein. Eine solche Abweichung von dem in dem Buche gegebenen Gange erscheint selbst dem Verf. bei seinen Vorträgen deshalb nothwendig, um diejenigen geodätischen Uebungen noch vor dem Eintritt des Winters zu absolvieren, welche die Aufnahme kleiner Fluren mittelst der Meſskette, des Winkelkreuzes u. s. w. betreffen.

Die erste Abtheilung des ersten Buches darf als eine völlig umgearbeitete angesehen werden; sie ist auſserdem bereichert durch vortrefflich ausgeführte Holzschnitte, die sich fast sämmtlich auf die Instrumente der reichhaltigen mathematischen Sammlung der hiesigen polytechnischen Lehranstalt beziehen. In der ersten Auflage wurden diese Holzschnitte theils durch nach einem kleineren Maſsstabe angefertigte Linearzeichnungen, theils nur durch Skizzen vertreten. Zu den im ersten Abschnitte beschriebenen einzelnen Theilen der Winkelmeſswerkzeuge ist die Schraube gekommen; ferner sind für die Glasprismen, als Stellvertreter der Spiegel, die Gesetze der totalen Reflexion ausführlicher dargestellt. Von den Vorrichtungen zur Bestimmung kleinerer Theile der eingetheilten Kreisränder ist nicht nur die Lehre vom Vernier (Nonius) ausführlicher behandelt, sondern auch die Lehre vom Schraubenmikroſkop in gehöriger Ausführlichkeit hinzugekommen. Eben so hat die Beschreibung der wesentlichen Theile der Winkelmeſser mit fester Unterlage nicht nur an Uebersichtlichkeit, sondern auch durch die präcis dargestellten Durchschnitte an Gründlichkeit gewonnen. Dasselbe gilt von der Darstellung der Einrichtungen zur Hemmung der groben und zur feinen Achsenumdrehung. In dem Capitel von der Beschreibung, Prüfung und Berichtigung der Winkelmeſser mit fester Unterlage hat in Bezug auf die Zahl und Wahl derselben eine Beschränkung Statt gefunden; dagegen geben die Zeichnungen der dargestellten Apparate ein vollständiges, richtiges Bild derselben; neu hinzugekommen ist das von Meyerstein verfertigte kleine Universalinstrument mit mikroſkopischer Ab-

lesung, in Fig. 41 u. 42, sowie das eine der Hülfsfernröhre in Fig. 47. Bei den Reflexionswerkzeugen glaubte der Verf., in Bezug auf ihre Anwendung, sich auf den Hadley'schen Spiegelsextanten, den Spiegelprismenkreis (patentierten Reflexionskreis) von Pistor und Martins und den Steinheil'schen Prismenkreis beschränken zu können. Von den Nivellierinstrumenten sind die Constructionen, welche sich auf constante Zielhöhen beziehen, nicht mit aufgeführt, da sie, in Norddeutschland wenigstens, in der Praxis nicht den Vortheil dargeboten haben, den man sich davon versprochen.

In der zweiten Abtheilung kann fast der ganze erste Abschnitt als völlig umgearbeitet betrachtet werden. Die letzte Rubrik desselben: die Zuverläfsigkeit der Winkelmefsungen mit den winkelmefsenden Werkzeugen und die Ausgleichung derselben, mit Rechnungsbeispielen versehen, ist hinzugekommen. Eben so hat der vierte Abschnitt, die Horizontalaufnahme solcher gröfserer Erdstrecken, wobei die Erdoberfläche noch als eben betrachtet werden darf, und der gleichsam als der Uebergang von der Feldmefskunst zur höheren Geodäsie anzusehen ist, eine gänzliche Umarbeitung erlitten. Das zweite Capitel desselben, die Ausgleichung vermittelnder und bedingter Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate ist hinzugekommen. Wenn ich auch bemerken mufs, dafs sowohl bei der Bearbeitung dieses Capitels, als der schon vorhin erwähnten Ausgleichungen directer Beobachtungen mir das classische Werk: die Ausgleichungs-Rechnungen der praktischen Geometrie u. s. w. von Chr. Ludw. Gerling. Hamburg u. Gotha, 1843, zum Führer diente: so darf ich doch nicht unerwähnt lafsen, dafs dabei auch die Gradmefsung in Ostpreussen u. s. w von F. W. Bessel und Baeyer. Berlin, 1838, sowie die Küstenvermefsung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie, herausgegeben von J. J. Baeyer. Berlin, 1849, vielfach benutzt worden ist. Noch mufs ich hinzufügen, dafs die gegebenen Rechnungsbeispiele sämmtlich nicht fingiert, sondern aus von mir ausgeführten praktischen Mefsungen genommen sind. Auch

der fünfte, von den Verticalmefsungen handelnde Abschnitt hat gröfstentheils eine Umarbeitung erlitten, so wie das Capitel über die barometrischen Höhenmefsungen durch das patentierte Stockbarometer von Pistor und Martins eine Zugabe erhalten hat. Am Schlufse der Abtheilung ist über den mittleren Fehler der Functionen direct beobachteter Gröfsen das Wesentlichste mitgetheilt.

Die dritte Abtheilung hat im Ganzen die wenigsten Veränderungen erfahren. Um den Ordinatographen, den Pantographen und um die Planimeter von (Wetli)-Hansen und Amsler ist die Abtheilung vermehrt, um den vollkreisigen und den geradlinichten Transporteur aber deshalb vermindert, da in der That diese Zeichenapparate nach dem jetzigen Standpunkte der Geodäsie als überflüfsig erscheinen müfsen.

Eine gänzliche Umarbeitung endlich hat das zweite Buch, welches die Grundzüge der höheren Geodäsie darstellt, erfahren. Es bedarf ohne Zweifel keiner Rechtfertigung, dafs der Bessel'sche Mefsapparat zum Mefsen der Basis, wenigstens im Wesentlichen, dargestellt ist; eben so wenig, dafs das Zeitmafs zur Betrachtung gezogen und die Ausgleichung der vermittelnden Beobachtungen auf den einzelnen Stationspunkten auch für den Fall dargestellt ist, dafs die Beobachtungen auf sämmtlichen Dreieckspunkten noch nicht beendigt sind. Gern würde ich auch der leider noch nicht sehr bekannten Gaufs'schen Projectionsmethode, die sphäroidische Erdoberfläche auf einer Ebene abzubilden, und die bei der Hannoverschen Landesvermefsung zunächst ihre Anwendung fand, einen gröfseren Raum gewidmet haben, wenn ich nicht hätte befürchten müfsen, dadurch die Kosten für die Herstellung des Werkes und den Preis desselben zu erhöhen.

Noch halte ich mich verpflichtet, dem Assistenten an der hiesigen polytechnischen Schule, Herrn H. Büsing, für die Sorgfalt, welche er der zweiten Correctur des Werkes gewidmet hat, meinen Dank auszusprechen.

Gleichen Dank glaubt der Verf. der Verlagshandlung für die vortreffliche Ausstattung des Werkes, in Bezug auf Pa-

pier, Druck und Ausführung der Holzschnitte zollen zu müfsen, obgleich die Verlagshandlung schon lange wegen der würdigen Ausstattung ihrer Verlagsartikel allgemeine Anerkennung sich erworben hat.

Hannover, im Mai 1868.

G. Hunäus.

Inhalt.

Seite

Erstes Buch.

Die niedere Geodäsie.

Erste Abtheilung.

Die Hülfsmittel zu den Aufnahmen oder die Mefsinstrumente und Hülfsapparate.

Zweite Abtheilung.

Die geometrischen Aufnahmen mittelst der in der ersten Abtheilung beschriebenen Mefs-Apparate.

Seite

Dritte Abtheilung.

Die graphische Darstellung der geometrischen Aufnahmen. Das Kartieren.

Zweites Buch.

Grundzüge der höheren Geodäsie,

oder

die Aufnahme und Kartierung solcher gröfserer Erdstrecken, wobei die Erdoberfläche nicht mehr als eben angesehen werden darf.

Einleitung.

§. 1.

Eine Gröfse mefsen, heifst bestimmen, wie viel Mal eine zum Mafs oder zur Einheit gewählte gleichartige Gröfse, oder ein aliquoter Theil derselben, in der ersteren enthalten ist.

Wird die Mefsung einer räumlichen Gröfse durch wirkliche Anlegung des Mafses verrichtet, so heifst sie eine unmittelbare Mefsung; bestimmt man aber ihre räumliche Ausdehnung aus anderen bereits unmittelbar gemefsenen Gröfsen durch Rechnung oder durch Construction, so nennt man die Mefsung eine mittelbare.

Erläuterung durch Beispiele.

§. 2.

In den meisten Fällen bildet das mittelbare Mefsen das zu erstrebende Ziel, und es erscheinen daher die unmittelbaren Mefsungen nur als Mittel, um den vorliegenden Zweck zu erreichen. Da aber aus mehrfachen Gründen die letzteren Mefsungen nicht für absolut richtig gehalten werden dürfen, so wird auch für die mittelbaren Mefsungen kein absolut richtiges Resultat zu erwarten sein. Will man für letztere die möglichst gröfste Genauigkeit erreichen, so müfsen von einer Mefsung mehrere Resultate bestimmt werden, und es ist dann aus diesen Resultaten dasjenige zu ermitteln, welches unter allen dem kleinsten Fehler unterworfen, also das der idealen Wahrheit nächste oder das wahrscheinlichste, ist. Diese Bestimmung nennt man die Ausgleichung der unmittelbaren Mefsungen. (Vergl. §. 259.)

§. 3.

Die unmittelbaren Mefsungen werden meistens in einer gedachten Horizontal- oder Verticalebene, einzelne aber auch in einer Ebene ausgeführt, welche gegen die Horizontalebene geneigt ist. Da aber fast alle Mefsungen graphisch dargestellt werden sollen und die Lage der dazu angewandten Papierfläche entweder horizontal oder vertical gedacht wird: so wird es darauf ankommen, die ausgeführten Mefsungen auf die Horizontal- oder Verticalebene durch Rechnung oder Construction zurückzuführen. Denkt man sich einen so kleinen Theil der mit partiellen Unebenheiten versehenen Erdoberfläche, dafs die von ihren Punkten

1

a, b, c ... auf die Horizontalebene gefällten Normalen $a a'$, $b b'$, $c c'$ ... ohne merkliche Fehler als parallel angesehen werden können, so stellen die Fufspunkte a', b', c' ... die Horizontalprojectionen jener Punkte und die Figur $a' b' c'$ ... die Horizontalprojection der Figur $a b c$ ... vor. Die auf der Erdoberfläche gebildete Figur $a b c$ ... aufnehmen oder mefsen, heifst dann, so viel Stücke derselben durch unmittelbare Mefsung bestimmen, dass daraus nach einem beliebig verjüngten Mafsstabe auf dem Papier eine Figur entworfen werden kann, welche ihrer Horizontalprojection $a' b' c'$ ... ähnlich ist. Die Mefsung wird eine Horizontalmefsung, Horizontalaufnahme und das auf dem Papiere entworfene Bild derselben ein Horizontal- oder Grundrifs, auch geometrischer Rifs, Situationsplan, Karte der Figur $a b c$ ... genannt.

Denkt man sich wieder von den Punkten a, b, c ... der Erdoberfläche Normalen $a a''$, $b b''$, $c c''$ ... auf eine Verticalebene gefällt, so bilden die Fufspunkte a'', b'', c'' ... die Verticalprojectionen jener Punkte a, b, c ... Durch den Unterschied ihrer Entfernungen von dem Mittelpunkte der Erde oder einer gedachten Horizontallinie werden daher die Höhen der Punkte a, b, c ... dargestellt. Die Bestimmung derselben geschieht durch eine Höhen- oder Verticalmefsung, während das auf dem Papiere entworfene Bild eine Höhenkarte, auch ein Profilrifs genannt wird.

§. 4.

Die praktische*) Geometrie (Geodäsie) ist der Inbegriff der Methoden, mittelst welcher man durch bestimmte Mefsungen und daraus abgeleitete Berechnungen oder Constructionen auf dem Papiere eine Kenntnifs von der gegenseitigen Lage einzelner Punkte, oder der Gestalt und Gröfse einzelner Theile der Erdoberfläche, oder der im Innern der Erde durch den Bergbau aufgeschlofsenen Räume sich verschaffen kann.

Die Punkte und Gegenstände, welche einer Mefsung unterworfen und von denen ein richtiges geometrisches Bild entworfen werden soll, sind sowohl alle natürlichen Bildungen des Bodens, also der Lauf der Gebirge oder Gewäfser, die Begränzungen der geognostischen Formationen, als auch alle künstlichen Anlagen, nämlich die verschiedenen Culturarten des Bodens, die Richtung der Strafsen und Wege, die Umfänge der Gebäude und anderer Baulichkeiten u. s. w. Bei den Horizontalmefsungen wird man es daher im Allgemeinen mit Polygonen zu thun haben, in welchen soviel Stücke unmittelbar gemefsen werden, dafs bei ihnen, falls diefs dem Zwecke der Aufnahme entspricht, eine Ausgleichung (§. 2) möglich ist, oder daraus ein geometrisches Bild auf

*) Πρακτικός thätig, ausübend.

dem Papiere entworfen werden kann, indem die etwaigen krummlinichten Gränzen derselben nach der in der reinen Geometrie angegebenen Coordinatenmethode auf die Polygonseiten bezogen werden können. Liegen nun die Winkelpunkte des Polygons in einer Horizontalebene, so ist die Möglichkeit der Aufnahme schon durch die reine Geometrie bestimmt, sobald man den Mefsapparaten eine horizontale Lage geben kann. Ist diefs aber nicht der Fall, so zeigt der vorige Paragraph die Möglichkeit der Mefsung. Dabei ist nur die Voraussetzung zu machen, dafs in Bezug auf die Winkelmefsungen, durch die Einrichtung der Mefsapparate wirklich die Horizontalprojectionen erreicht werden können.

Hinsichtlich der zu mefsenden Winkel mag hier schon bemerkt werden, dafs diejenigen Winkel, deren Schenkel in dem scheinbaren Horizonte des Standortes liegen, Horizontalwinkel, solche, deren Schenkel in einer auf dem Horizonte senkrechten Ebene liegen, Verticalwinkel genannt werden. Liegt von diesen der eine Schenkel im Horizont, der andere über oder unter demselben, so nennt man sie beziehungsweise Höhen- oder Elevations- und Tiefen- oder Depressionswinkel. Die Complementarwinkel der Elevationswinkel heifsen Zenithdistanzen. Aufser den Horizontal- und Verticalwinkeln kommen auch noch Winkel vor, deren Schenkel weder im Horizonte des Standortes, noch in einer darauf senkrechten Ebene liegen; solche nennt man schiefgeneigte oder schiefliegende Winkel.

§. 5.

Theils nach der verschiedenen arealen Gröfse und der verschiedenen Art der Mefsungsgegenstände, theils nach dem verschiedenen Zwecke, der durch die Aufnahme erreicht werden soll, kann man verschiedene Zweige der praktischen Geometrie unterscheiden.

Niedere Geodäsie, Feldmefskunst wird sie wohl genannt, wenn sie Aufnahmen nur von solchen Erstreckungen zu ihrem Gegenstande macht, dafs das betreffende Stück der Erdoberfläche ohne Fehler als eben betrachtet werden kann und höhere Geodäsie, Landmefskunst, wenn sie mit der Aufnahme von so grofsen Strecken der Erdoberfläche sich beschäftigt, dafs sie als ein Theil einer krummen Fläche angesehen werden müfsen. Die Entwürfe der letzteren auf dem Papiere werden dann mit dem Namen der Land- oder geographischen Karten im Gegensatz der anderen, der topographischen belegt.

Anmerkungen. 1. Die obige Unterscheidung in niedere und höhere Geodäsie beruht auf der Ansicht, dafs man die gesuchten Resultate bei der ersteren schon durch die Anwendung der Elementargeometrie und der ebenen Trigonometrie findet, bei der letzteren aber auch noch die Kenntnisse der sphärischen Astronomie und Trigonometrie, so wie der höheren Mathematik voraussetzen mufs. Indefsen ist jene Ansicht irrig, da nicht allein bei manchen Aufgaben der Feldmefskunst, sondern auch bei der Aufnahme mancher gröfserer Erdstrecken, die noch als eben betrachtet werden dürfen, die Kenntnisse einzelner Zweige der höheren Mathematik zur Anwendung

kommen. Will man die Landmefskunst mit einem fremden Namen bezeichnen, so ist das Wort Chorometrie (von Χωρο-μετρία, Aufnahme eines Landes) am bezeichnendsten.

2. Das Wort Geodäsie gleichbedeutend mit Feldmefskunst oder gar mit praktische Geometrie zu nehmen, ist deshalb unpassend, da das erstere nur einen sehr untergeordneten Zweig der Feldmefskunst, der sich mit der Theilung kleinerer oder gröfserer Fluren beschäftigt (von γῆ, Erde, Land und δαίζω, theile), bezeichnet.

§. 6.

Nach dem Zwecke, den man mit der Aufnahme einer Flur verbindet, kann man folgende Unterscheidungen treffen.

1. Oekonomische Aufnahmen werden diejenigen genannt, wenn vorzugsweise die Bestimmung der Gestalt und Gröfse und die Theilung kleinerer oder gröfserer Fluren den Zweck bildet, um dadurch nach der Beschaffenheit des Bodens den Werth jedes einzelnen Theiles zu erfahren. Hierher gehören auch die Katasteraufnahmen (von capi— tastrum, Kopfsteuerverzeichnifs), wonach die Gröfse der Steuerabgaben bestimmt werden kann.

2. Topographische Aufnahmen (von τόπος, Ort, Stelle, Gegend) sind diejenigen, wenn man weniger auf die ganz getreue Darstellung der Gränzen der einzelnen Culturarten, als vorzugsweise auf die Bestimmung der Lage einzelner Wohnhäuser und Wohnörter, den Lauf der Bäche, Flüfse und Ströme, der Wege und Strafsen u. dgl. sieht, um dem Reisenden oder Geographen zur richtigen Ortskenntnifs das nöthige Detail zu liefern.

3. Bei militairischen Aufnahmen mufs man ganz besonders die genaue Bestimmung der Unebenheiten und der Beschaffenheit des Bodens, des Laufs der Strafsen, Wege, Bäche, und Flüfse und überhaupt der Hindernisse für die Bewegungen der verschiedenen Truppenarten und der Aufstellung des Geschützes im Auge haben.

4. Forstaufnahmen sollen die genaue Flächengröfse der Forsten im Allgemeinen, so wie die Gränzen der einzelnen Bestände und Blöfsen geben, um darnach eine geregelte Waldwirthschaft einleiten und eine Taxierung der einzelnen Bestände vornehmen zu können.

5. Die Aufnahmen zu technischen Zwecken können selbstverständlich verschiedener Art sein. Bei hydrotechnischen Aufnahmen ist besonders die Lage der Flufsufer und der Uferbauwerke, der Deiche u. dgl., so wie der benachbarten Culturarten auf beiden Seiten der Ufer zu berücksichtigen. Aufserdem ist durch Nivellements das Gefälle des Flufses und die Gestalt des Flufsbettes darzustellen. Eben solche Längen- und Quer-Nivellements sind bei Angaben von Strafsen- und Eisenbahnprojecten auszuführen und die Aufnahme auf die begränzenden Ortschaften und Culturarten auszudehnen. Bei

Aufnahmen zu hochbaulichen Zwecken wird besonders die Darstellung der Ortschaften, der Lage der Strafsen in denselben und der einzelnen Häuser gefordert. Bei Anlagen von Kanälen oder anderen Wafserleitungen werden aufserdem Nivellements erforderlich sein.

6. Die Markscheidekunst (von dem Altdeutschen marka, Gränze, also Gränzbestimmungskunst) hat die Aufgabe, die durch den Bergbau aufgeschlofsenen unterirdischen Räume, also Schächte, Stollen, Strecken, Firsten- und Strofsenbaue u. dgl. gegen einander oder gegen Punkte auf der Erdoberfläche bildlich auf dem Papiere darzustellen, um darnach bergmännische Projecte, z. B. Durchschläge von Gegenörtern, Firsten- oder Strofsenbaue mit Strecken, Absinken mit Uebersichbrechen, oder Stollen- oder Wafserstreckenanlagen u. dgl. auszuführen. Während bei den vorhin angegebenen Aufnahmen meistens ein entworfener Grundrifs ausreicht, ist bei den Markscheideaufnahmen auch noch die Anfertigung von Profil- oder Seigerrifsen erforderlich.

7. Eine beschränkte Anwendung wird endlich von der praktischen Geometrie noch von dem Nautiker durch Mefsung von Monddistanzen, oder Höhen der Sonne oder anderer Gestirne u. s. w. zur Bestimmung der geographischen Lage des zeitigen Orts des Schiffes gemacht.

Anmerkung. In dem Nachfolgenden sollen die unter 3., 6. und 7. angegebenen Anwendungen der praktischen Geometrie nicht berücksichtigt werden.

§. 7.

Zu fast allen Mefs-Operationen der praktischen Geometrie bildet ein gröfserer oder kleinerer Theil der Erdoberfläche ihr Feld, daher es jetzt noch auf die Bestimmung der Gestalt und Gröfse der Erde ankommen mufs. Da aber diese Bestimmung gerade zu den schwierigsten Aufgaben des praktischen Geometers gehört, die nur in ihren Umrifsen erst später zur Sprache kommen kann, so können hier nur die Ergebnisse der Arbeiten, welche zur Lösung der Aufgabe erforderlich waren, und womit sich mehrere der ausgezeichnetsten Männer in fast allen Erdgegenden beschäftigten, angegeben werden. Nach den Zusammenstellungen von Bessel entspricht unsere Erde einem Rotations-Ellipsoid, d. h. einem Körper, welcher durch Umdrehung einer Ellipse, deren halbe grofse Achse a 3 272 077,14 und deren halbe kleine Achse b 3 261 139,33 Toisen beträgt, um ihre kleine Achse entsteht, welche Form indefsen nicht ausschliefst, dafs hier und da locale Abweichungen, nämlich wellenförmige Erhöhungen oder Vertiefungen, vorkommen können. Berechnet man aus den obigen Bessel'schen Zahlen den Werth von

$$\frac{a-b}{a} = \alpha, \text{ so erhält man } \alpha = \frac{1}{299,1528},$$

welchen Bruch man die Abplattung der Erde nennt. Da also der Unterschied der beiden Achsen nahe den $\frac{1}{300}$sten Theil der grofsen

Achse der erzeugenden Ellipse beträgt, so ergiebt sich schon hieraus die geringe Abweichung des Rotations-Ellipsoides von einer Kugel. Ferner ist ein Grad des Aequators der Erde = 57 108,519 Toisen = 15 geographischen Meilen, also eine geographische Meile = 3 807,2346 Toisen und die ganze Oberfläche der Erde 9261238,2 geographische Quadrat-Meilen oder 9261238,2 . $3807{,}2346^2$ Quadrat-Toisen. Berechnet man daher den Halbmefser derjenigen Kugel, dessen Oberfläche dem Inhalte der Oberfläche des Erdellipsoides gleich ist, so erhält man 3266604 Toisen. Da aber 3266608 Toisen dem arithmetischen Mittel der beiden Halbachsen a und b entsprechen, so darf man für die meisten Arbeiten der Geodäsie die Erde als eine Kugel von 3266608 Toisen Halbmefser betrachten.

§. 8.

Es bleibt nun noch zu bestimmen, in welcher Arealgröfse Theile der Erdoberfläche angenommen werden können, dafs man sie ohne merklichen Fehler als eben ansehen darf. Da die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks immer gröfser als 180° ist, bei derselben Kugelfläche aber der sphärische Excess um so gröfser sein mufs, je gröfser die Seiten oder je gröfser die Fläche des Dreiecks ist, so wird in der Vergleichung des Excesses für ein bestimmtes Dreieck, mit den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern die Gränze zu bestimmen sein, bis zu welcher man die Gröfse einer Flur als eben, oder als der krummen Fläche einer Kugel angehörig ansehen darf. Nun beträgt aber der sphärische Excess in einem Dreiecke, in welchem jede Seite etwa eine geographische Meile lang ist, nur 0,11 Sekunden und in einem Dreiecke von 6 Quadrat-Meilen Gröfse noch nicht volle 2 Sekunden. Deshalb darf man im Allgemeinen solche Flächen, deren Gröfse 6 Quadrat-Meilen nicht übersteigt, ohne merklichen Fehler als eben ansehen.

Die Mafsen der Geodäsie.

1. Das Längenmafs.

§. 9.

Eine gegebene Gröfse wird ein Mafs genannt, wenn mittelst derselben eine andere gleichartige Gröfse gemefsen werden kann.

Da bei Mefsungen an irdischen Gegenständen die Lage derselben gegen den Beobachter nicht geändert wird, so kommen in dem Gebiete der niederen Geodäsie von dem Längen-, Flächen-, Körper-, Winkel- und Zeitmafse nur die vier ersteren besonders zur Anwendung. Bei den Höhenbestimmungen der Himmelskörper aber, wo während der ein-

zelnen Beobachtungen die Lage derselben gegen den Beobachter sich fortwährend ändert, ist auch die Kenntnifs des **Zeitmafses** von Wichtigkeit. Da zu diesem indessen Kenntnisse der sphärischen Astronomie erforderlich sind, so soll hier zunächst nur von den ersteren, von dem Zeitmafse aber später die Rede sein. Die drei Arten der erst genannten Mafse kommen aber auf genau bestimmte und unveränderliche Längenmafse zurück.

Die ersten Längenmafse wurden ohne Zweifel durch Abmeſsungen gewifser Theile des menschlichen Körpers bestimmt und **Fufs** (**Schuh**), **Spanne**, **Klafter** u. s. w. genannt. Deshalb konnte es auch nicht fehlen, dafs fast jeder Staat oder jede Provinz ein eignes Mafs erhielt und ein solches auch in verschiedenen Zeiten sich änderte. Wenn wir aber auch im Verlaufe der Zeit dahin gekommen sind, für die meisten der europäischen Länder und Oerter das Verhältnifs ihres Mafses zu einem bestimmten, angegebenen Normalmafse zu kennen, also auch die Verhältnisse jener Mafsen unter einander angeben können, so gehört die Einführung eines allgemeinen Normalmafses für alle civilisierten Staaten immer zu den noch nicht realisierten Wünschen. Selbst für die deutschen Staaten hat man bis jetzt über die Einführung eines einheitlichen Mafs- und Gewichtsystems sich noch nicht einigen können. Die auf Veranlafsung der meisten deutschen Regierungen im Januar 1861 zu Frankfurt a. M. zusammengetretene Commission von Sachverständigen beschlofs, obgleich Preufsen die Meinung aussprach, dafs die Bedürfnifsfrage von Fachmännern nicht erörtert werden könne, zwar einstimmig, dafs das Meter mit seinen Unterabtheilungen als Längenmafs in dem deutschen Mafssysteme angenommen werden solle, und obgleich auch die durch den Beschlufs der damaligen Bundesversammlung neu constituierte Commission von Sachverständigen im Juli 1865 zu Frankfurt wieder darin übereinstimmte, dafs das metrische Mafssystem die Grundlage der zu schaffenden deutschen Mafs- und Gewichtsordnung sein müfse, so scheiterte doch die wirkliche Ausführung der Idee an dem von Preufsen gemachten Vorschlage, dafs aufserdem, obgleich ohne weitere Begründung, noch der Dreidecimeterfufs in Anwendung kommen müfse.

§. 10.

Um ein bestimmtes Normalmafs zu erhalten, stellte man sich schon in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts die Aufgabe: zur Vergleichung mit den schon bestehenden Mafsen ein der Willkür nicht ausgesetztes, also ein in der Natur gegebenes Mafs von so unveränderlicher Gröfse aufzufinden, dafs sein Untergang nur durch grofse an unserem Planeten vorgehende Revolutionen veranlafst werden könne. In dieser Hinsicht waren es zwei Gröfsen, die ihrer Unveränderlichkeit wegen den Mafssystemen als Grundlage dienen konnten, nämlich die Länge des ein-

fachen Sekundenpendels und ein aliquoter Theil des Erdmeridians. Das Grundmafs auf die Länge des einfachen Sekundenpendels zu beziehen, schlug Huyghens vor, der damals noch die Ansicht hatte, dafs das Sekundenpendel überall dieselbe Länge besitze. Allein die Versuche Richer's, der 1672 bis 1673 zu astronomischen Zwecken zu Cayenne Mefsungen anstellte, zeigten, dafs er das von Paris mitgenommene Sekundenpendel um etwa $1^1/_4$ Linie verkürzen mufste, damit es Sekunden schwinge. Daraus folgerte Huyghens bald, dafs unsere Erde eine sphäroidische Gestalt besitze, was auch durch die in späterer Zeit in verschiedenen Gegenden der Erde angestellten Mefsungen der Gröfse der Breitengrade sich vollends bestätigte. Bouguer, La Condamine und Godin fanden nämlich bei ihren von 1735—1744 unter dem Aequator angestellten Mefsungen die Länge eines Breitengrades zu 56753 Toisen, Maupertuis, Clairaut, Lemonier, Camus, Outhier und Celsius bei Torneå unter der Breite von $66^1/_3$ Grad, 57437 Toisen. Zwischen Paris und Amiens hatte man 57060 Toisen gefunden.

Dennoch traten Condamine und Bouguer dem früheren Vorschlage Huyghens, zum Normalmafse die Länge des einfachen Sekundenpendels an einem bestimmten Orte der Erde zu nehmen, bei und liefsen deshalb die bei ihren Versuchen gefundene Länge in einen der Steine hauen, welche die Enden der Basis ihrer Mefsung bildeten, mit der Unterschrift: mensurae naturalis exemplar, utinam et universalis.

Später kam man aber wieder in Frankreich darauf zurück, einen Theil des Erdmeridians als Normalmafs zu nehmen, zu welchem Zwecke während der französischen Revolution (in 1792 u. d. f.) der Meridian von Paris, von Dünkirchen an bis zum Fort Monjuich bei Barcelona von Méchain und Delambre gemefsen, später von Biot und Arago bis zur Insel Formentera fortgesetzt wurde und woraus man die Länge des Breitengrades zu 55184,72 Toisen fand. Aus der Vergleichung dieser Länge mit der von Lacaille, Beccaria, Boscowich u. A. in anderen Gegenden der Erde vorgenommenen Gradmefsungen, namentlich aber mit der aus der peruanischen Mefsung sich ergebenden Länge des Breitengrades, nahm die französische Commission des poids et mesures unter der Voraussetzung einer Abplattung der Erde $\alpha = {}^1/_{334}$, die sphärische Entfernung des Pols vom Aequator oder den Meridianquadranten $Q = 5130740,74$ Toisen an und legte dem zehnmilliontesten Theil derselben den Namen Meter (von μέτρον, Mafs) bei.

Später unterwarf Delambre*) die peruanische und französische Mefsung einer nochmaligen Revision, woraus Puissaut**) $\alpha = \frac{1}{309,6}$

*) Base du système métrique. III. Paris 1804.

**) Traité de Géodesie, Paris 1819.

und $Q = 5131111,4$ Toisen ableitete. Ferner fand Walbeck *) aus der peruanischen Gradmefsung, den beiden ostindischen von Lambton, der französischen, der englischen von Mudge und der schwedischen von Svanberg $\alpha = \frac{1}{302,78}$ und $Q = 5130878,4$ Toisen und indem Ed. Schmidt **) 1829 zu den vorigen 6 Gradmefsungen noch die hannoversche hinzunahm, fand er $\alpha = \frac{1}{299,479}$ und $Q = 5130779,0$ Toisen. Endlich setzte Bessel ***) den vorigen noch die preufsische, die dänische und den Theil der russischen zwischen Bilin und Hogland hinzu und erhielt aus diesen 10 Gradmefsungen $\alpha = \frac{1}{299,1528}$ und $Q = 5131179,81$ Toisen, welche bis jetzt für die beste gilt, obgleich seit 1841 zu den obigen Gradmefsungen noch eine neue am Vorgebirge der guten Hoffnung hinzugekommen und drei derselben noch erweitert sind.

Es ergiebt sich nun, dafs, wenn man die Länge des Meters zu 5130740,74 Toisen beibehält, dann nicht der 10000000ste, sondern bis jetzt der 10000859ste Theil von Q zu nehmen ist, also das Meter eben so wenig wie die Toise von Peru auf ein Naturmafs Anspruch machen kann.

Man vergleiche Dove, über Mafs und Mefsen, Berlin 1835. Gehler's physikalisches Wörterbuch, neue Ausgabe, Art. Mafs und Baeyer, über die Gröfse und Figur der Erde, Berlin 1861.

§. 11.

Aufser dem im vorigen Paragraph bemerkten Metermafs ist in Frankreich noch das s. g. altfranzösische Längenmafs im Gebrauch, womit auch noch die Längenmafse anderer europäischer Länder und Oerter verglichen werden, der sechste Theil der s. g. Toise von Peru, worunter man die Länge des bei der Pariser Akademie der Wissenschaften niedergelegten eisernen Mafses versteht, welches sie bei 13° R. oder 16,25° C. enthält. Dieser sechste Theil heifst der altfranzösische Fufs (pied du roi), den man in 12 Zoll, den Zoll in 12 Linien etc. theilt.

Es ist daher 1 Meter = 0,51307407 Toisen = 3,078444 Fufs = 443,295936 Linien der Toise von Peru, welches als mètre vrai et définitif in Frankreich gesetzlich angenommen ist.

Die weitere Eintheilung des Meters ist zehntheilig, die man durch Vorsetzung der lateinischen Benennungen bezeichnet, 1 Meter (^{m}) = 10 Decimeter (^{dm}) (von decem, 10) = 100 Centimeter (^{cm}) (von centum, 100) = 1000 Millimeter (^{mm}) (von mille, 1000) u. s. w. Die Vielfachen des Meters bezeichnet man durch Vorsetzung der griechischen Benennungen,

*) De Forma et magnit. Telluris. Åboae 1819.

**) Lehrbuch der mathematischen und physischen Geographie I. Göttingen 1819.

***) Schumacher's astronomische Nachrichten. 1841.

10 Meter = 1 Dekameter (von δέκα, 10), 10 Dekameter = 1 Hektometer (von ἑκτόν, 100), 10 Hektometer = 1 Kilometer (von χίλιος, 1000), 10 Kilometer = 1 Myriameter (von μύριος, 10000) u. s. w. Eins der gebräuchlichsten Maſse ist der Fuſs, der auch bei fast allen europäischen Völkern eingeführt ist. Die unten folgende Tabelle gieht das Verhältniſs des Fuſses verschiedener Länder und Oerter zu dem altfranzösischen Fuſse und dem Meter an.

§. 12.

In den meisten deutschen Ländern wird der übliche Landesfuſs als Einheit angesehen und nach dem Duodecimalsystem, in der Schweiz, in Würtemberg, Baden, Hessen-Darmstadt und Nassau aber nach dem Decimalsystem weiter eingetheilt, während in Sachsen eine 12- und 10theilige Verkleinerung desselben Statt findet. Wie im vorigen Paragraph bemerkt wurde, ist in Frankreich die Längeneinheit theils der altfranzösische Fuſs, theils das Meter; in Oesterreich bildet die Klafter oder 6 österreichische Fuſs, in England der Yard oder 3 englische Fuſs die Längeneinheit. In der Geodäsie legt man aber gröſserer Bequemlichkeit wegen ein Vielfaches des Fuſses als Längeneinheit zum Grunde und nennt dieſs meistens Ruthe, in Oesterreich und Hessen-Darmstadt Klafter, welche höhere Einheiten aber überall nach dem Decimalsystem weiter eingetheilt werden. Beim Bergbau dient in Deutschland das Lachter als höhere Einheit, welches meistens weiter in acht gleiche Theile, Achtel, jedes Achtel in 10 Zoll und jeder Zoll in 10 Linien getheilt wird. Die gröſste Längeneinheit bildet die Meile, in landesüblichen Fuſsen oder Ruthen (Klaftern) dargestellt. Nach den Bestimmungen von Bessel hält der Grad des Erdäquators 57108,519 Toisen oder 15 geographische Meilen, daher 1 geographische Meile = 3807,2346 Toisen, während der mittlere Grad des Meridians = 57013,109 Toisen ist.

Die Ruthe und Klafter bezeichnet man durch ^{0}, den Fuſs durch ′, den Zoll durch ″, die Linie durch ‴.

2. Das Flächenmaſs.

§. 13.

In allen Maſssystemen wird den Einheiten des Flächenmaſses die Gestalt eines Quadrates gegeben und man unterscheidet hiernach Quadratruthe, Quadratfuſs, Quadratzoll, Quadratklafter, wobei man aber nur die dekadische Eintheilung berücksichtigt.

Es ist daher eine Quadratruthe (□^{0}) = 100 Quadratfuſsen (□′) = 10000 Quadratzollen (□″). Zur Vermeidung groſser Zahlen belegt man eine gröſsere Anzahl von Quadratruthen mit gewiſsen Namen: Morgen, Acker, Joch, Juchart, Tagewerk u. s. w.

In dem metrischen Mafssysteme heifst die Einheit des Flächenmafses Are (von arare, pflügen), welche einem Quadratdekameter, oder 100 Quadratmeter gleich ist; $1/_{10}$ Are heifst Deciare, $1/_{100}$ Are Centiare (also einem Quadratmeter gleich); ferner sind 10 Are = 1 Dekare, 10 Dekare = 1 Hektare, 10 Hektare = 1 Kilare u. s. w.

3. Das Körpermafs.

§. 14.

Die Einheit des Körpermafses ist in allen Mafssystemen ein Würfel, wonach man unterscheidet Kubikfufs, Kubikzoll, Kubiklinie; letztere kommt nur selten vor und Kubikruthen sind gar nicht gebräuchlich. Indefsen ist hierbei noch zu bemerken, dafs diese Mafse im Allgemeinen auf die dodekadische Eintheilung und nur ausnahmsweise auf die dekadische Eintheilung des Fufses bezogen werden.

Beim Bauwesen rechnet man meistens nach Schachtruthen, Parallelepipeden, welche 1 Quadratruthe zur Grundebene und 1 Fufs zur Höhe haben.

Beim Markscheiden und Bergbau ist das Körpermafs 1 Kubiklachter, indefsen rechnet man in einzelnen Fällen auch nach Kubikfufsen.

Im metrischen Mafssysteme ist für feste Körper die Einheit ein Kubikmeter, welcher aber Stere heifst (von στερεὸς, fest); für Flüfsigkeiten ist die Einheit ein Kubikdecimeter, welcher den Namen Liter (von λίτρα, Pfund) führt.

§. 15.

Aufser den hier angegebenen Mafsen kommt in der Geodäsie noch das Winkelmafs vor, für welches, wie in der reinen Geometrie, die Einheit der rechte Winkel ist, den man meistens noch in 90 Grade, jeden Grad in 60 Minuten und jede Minute in 60 Sekunden theilt; kleinere Theile hängt man den Sekunden in Decimalstellen an. Man pflegt diese Eintheilung die Sexagesimaltheilung zu nennen. In neuerer Zeit wendet man hin und wieder auch die Decimaleintheilung beim Winkelmafse an, theilt also hiernach den rechten Winkel in 100 Grade, jeden Grad in 100 Minuten u. s. w. Indefsen setzt diese Eintheilung auch eine entsprechende Einrichtung der trigonometrischen Tafeln voraus.

4. Verwandlung der Mafse.

§. 16.

1. Wenn man das Verhältnifs der Längenmafse zweier Oerter kennt, so ist es durch Hülfe der Verhältnisse der Zahlen leicht, das gegebene Mafs des einen Ortes in das des anderen zu verwandeln. Bezeichnen m und n die Pariser Linien oder das metrische Mafs, wodurch die Längenmafse der beiden Oerter ausgedrückt sind, a die zur



Verhältnifszahl m gehörige gegebene Länge und x die zu n gehörige gesuchte Länge, so erhält man, da die Verhältnifszahlen der Fufse, welche dieselbe Länge nach verschiedenen Mafsen enthält, sich umgekehrt verhalten müfsen, wie die Gröfsen jener Mafse,

$$n : m = a : x,$$

woraus $x = \frac{a \cdot m}{n}$ folgt.

Zur Verwandlung des Decimal- und Duodecimal-Längenmafses in einander dienen die Gleichungen

$$\begin{aligned} 1^0 \text{ dc} &= 1^0 \text{ ddc.} \\ 10' \text{ dc} &= 16' \text{ ddc.} \\ 100'' \text{ dc} &= 192'' \text{ ddc.} \\ 1000''' \text{ dc} &= 2304''' \text{ ddc.} \end{aligned}$$

2. Da die Flächen der Quadrate sich wie die zweiten Potenzen ihrer Seiten verhalten, so wird, wenn die Zahlen m und n die vorhin angegebene Bedeutung behalten, a und x aber die zugehörigen Flächeneinheiten bezeichnen, die Verwandlung des Flächenmafses eines Ortes in das eines andern durch die Gleichung

$$x = \frac{a \cdot m^2}{n^2}$$

gegeben.

3. Zur Verwandlung der Körpermafse verschiedener Oerter wird demnach die Gleichung

$$x = \frac{a \cdot m^3}{n^3}$$

dienen, welche Verwandlung aber in der Praxis selten vorkommen möchte.

4. Zur Verwandlung der Decimaltheilung in die Sexagesimaltheilung des Winkelmafses oder umgekehrt ist zu berücksichtigen, dafs

100^0 der Decimaltheilung	=	90^0 der Sexagesimaltheilung
$10000'$ „ „	=	$5400'$ „ „
$1000000''$ „ „	=	$324000''$ „ „

sind.

Anmerkung. Zwei Tafeln zur Verwandlung beider Eintheilungen in einander finden sich in G. Schreiber's Vorlesungen über praktische Geometrie I. Karlsruhe, 1842.

§. 17.

Die folgende Tafel enthält die Vergleichung des Längen- und Flächenmafses mehrerer Staaten und Oerter.

	Längeneinheit	Längenmafs: beträgt Meter	Par. Linien	Längeneinheit: geodätische	bergbauliche	geographische	Flächenmafs: Flächeneinheit: niedere	höhere
Baden	1 Fufs 10theilig	0,3	132,989	1 Ruthe = 10'	1 Lachter = 10'	1 Meile = 29629,63'	1 □° = 100 □' = 9 □m	1 Morgen = 400 □°
Baiern	1 Fufs	0,29186	129,38	1 Feldruthe = 10'	—	1 Meile = 25406'	1 □'	1 Tagewerk = 40000 □'
Braunschweig	1 Fufs	0,285362	126,5	1 Ruthe = 16'	1 Lachter = 968,5'''	—	1 □'	1 Morgen = 120 □°
Bremen	1 Fufs	0,28935	128,268	—	—	—	—	—
Dänemark	1 Fufs	0,31385	139,125	1 Ruthe = 10'	—	—	—	—
England	1 Yard = 3 Fufs	0,9143835	405,3425	1 Ruthe (rod) = 16,5' 4° = 1 Kette (chain)	—	1 Meile = 5280' 1 Seemeile = 18255'	1 □ Kette	1 Acker (acre) = 10 □ Ketten
Frankfurt a. M.	1 Fufs	0,28461	126,162	1 Ruthe = 12,5'	—	—	1 □'	1 Morgen = 160 □°
Hamburg u. Holstein	1 Fufs	0,2865	127,0	1 Ruthe = 16'	—	—	—	—
Hannover	1 Fufs	0,2920947	129,4844	1 Ruthe = 16'	1 Lachter = 78,082''	1 Meile = 1587,5° = 25400' 1 g. M. = 1587,764°	□'	1 Morgen = 120 □°
Hessen-Darmstadt	1 Fufs 10theilig	0,25	110,824	1 Klafter = 10'	—	1 Meile = 3000 Klaft.	□' 100 □' = 1 □Kl.	1 Morgen = 400 □Kl.
Hessen-Kassel	1 Fufs Feld(alter)fufs	0,267699 0,2849	127,536 126,3	1 Ruthe = 14'	—	—	□° = 196 alte □'	1 Acker = 150 □°
Nassau	1 Fufs (Feldmefser) 1 Fufs (Land) 10theilig	0,5 0,3	221,648 132,989	1 Ruthe = 5m	—	—	□'	1 Morgen = 100 □°
Oesterreich	1 Klafter = 6'	1,8966657	810,7843	1 Klafter = 10 Feldfufs	1 Lachter = 1 Klafter	1 Meile = 4000 Kl.	□ Klaft. = 36 □'	1 Joch = 1600 □Kl.
Oldenburg	1 Fufs	0,2964	131,3996	1 Ruthe = 18'	—	—	□'	1 Jück = 324 □°
Preufsen	1 Fufs	0,31385	139,13	1 Ruthe = 12'	1 Lachter = 80 Zoll	—	□'	1 Morgen = 180 □°
Sachsen	1 Fufs 1 Elle = 2'	0,28319	125,537	1 Ruthe (Feld) = 7 Ellen 14 Zoll	1 Lachter = 2 Meter	1 Meile = 13100 Ellen	□'	1 Acker = 300 □° 1 Morgen = ½ Acker
Schweden	1 Fufs	0,2968	121,6	—	—	—	—	—
Würtemberg	1 Fufs 10theilig	0,28649	127,0	1 Ruthe = 10'	—	—	□'	1 Morgen = 384 □°

Anmerkung. Ueber die Mafse anderer europäischer Länder vergl. man Aldefeld's Mafse und Gewichte der deutschen Zollvereinsstaaten, Stuttgart und Tübingen 1838, und

Gehler's physikalisches Wörterbuch VI. und XI. Art. Mafs.

Erstes Buch.
Die niedere Geodäsie.

Erste Abtheilung.
Die Hülfsmittel zu den Aufnahmen oder die Mefs-Instrumente und Hülfsapparate.

§. 18.
Allgemeine Bemerkungen.

1. Nach §. 3 und 4 werden die Mefsungen bei Horizontal- oder Vertical-Aufnahmen theils in Winkel-, theils in Linien-Mefsungen bestehen, wozu eigens construierte Instrumente, Geräthe und Hülfsapparate angewandt werden. Man kann daher bei denselben Mefs- und Hülfsapparate zum Mefsen der Winkel (Winkelmefser) und eben solche zum Mefsen der Linien unterscheiden. Die genaue Kenntnifs derselben hinsichtlich ihrer Einrichtung und Zusammensetzung, so wie ihres Gebrauchs tritt demnach als erstes Erfordernifs bei dem ausübenden Geometer auf.

2. Wenngleich nun an die Mefsinstrumente die Forderung gestellt werden mufs, dafs sie einen dem Zwecke der Anwendung entsprechenden Grad der Vollkommenheit besitzen, so darf doch keiner der Mefsapparate als absolut fehlerfrei angesehen werden. Denn selbst bei der Anwendung der vortrefflichsten mechanischen Hülfsmittel kann von dem Verfertiger die ideale Vollkommenheit der Mefsapparate in der Verbindung einzelner Theile zu einem Ganzen, in den Bewegungen einzelner Theile gegen andere u. s. w. nur annähernd erreicht werden, so wie auch ferner durch den längeren Gebrauch eines Mefsapparats und durch den Transport desselben von einem Orte zum andern, und auch theils durch atmosphärische Einflüsse, Veränderungen einzelner Theile gegen einander hervortreten werden. Deshalb macht man gewifse Stücke der Mefsinstrumente, obgleich sie eigentlich eine unabänderliche Lage gegen andere besitzen und auch behalten sollten, aus verschiedenen, von

einander getrennten Theilen und wendet, theils zu ihrer Befestigung, theils zu ihrer Verstellung Schrauben an, welche man Correctionsschrauben nennt.

3. Bei den Winkelmefsern und deren Hülfsapparaten müfsen wieder hinsichtlich ihres Gebrauchs zwei verschiedene Arten unterschieden werden. Die eine fordert eine zeitweilige feste Aufstellung desselben auf einer sicheren festen Unterlage; die andere bedarf ihrer Natur nach keines festen Standes, sondern gestattet schon durch momentanes Stillhalten die Bestimmung der schiefliegenden und auch der Verticalwinkel (§. 4). Die letzteren bilden die Reflexions- oder Spiegelinstrumente.

4. Nach dem Begriffe der praktischen Geometrie (§. 4) sollen aber die durch die Winkel- und Linienmefsungen ausgeführten Aufnahmen auch auf dem Papiere dargestellt werden. Es kommt daher zu den im Vorhergehenden angedeuteten Mefs- und Hülfsapparaten noch eine zweite Classe, welche theils zum Auftragen des Gemefsenen auf die Papierfläche, theils zur Gröfsenbestimmung der Flächenräume, theils zum Verjüngen (oder Vervielfältigen) der entworfenen Karten erforderlich sind oder benutzt werden können. Von ihnen wird in der dritten Abtheilung die Rede sein.

5. Die höhere Geodäsie (§. 5) fordert in Beziehung auf Winkel- und Linienmefsungen und in der Rücksicht, dafs zu ihnen auch Zeitmefsungen hinzukommen, theils eine andere Art der Mefsung, theils die Anwendung anderer Mefsapparate. Letztere sollen daher in dem zweiten Buche zur Betrachtung kommen, während jetzt nur von denjenigen Mefsapparaten die Rede sein soll, mit welchen die niedere Geodäsie ausreicht.

6. Alle geometrischen Instrumente sind aus einer mehr oder minder grofsen Anzahl einzeln angefertigter Theile zusammengesetzt und meistens durch Schrauben (Befestigungs- oder Zugschrauben) mit einander verbunden. Bei den Winkelmefsern insbesondere will man gewifse Theile in eine horizontale oder verticale Lage bringen können, wobei Drehungen um einen Punkt oder um eine Linie (Rotationen, Achsenumdrehungen, Kreisbewegungen) gefordert werden, welches durch Zapfen (Achsen) und Büchsen oder Achsenlager erreicht wird. Ferner fordert der Begriff der Winkelmefsung, dafs die Richtung der Schenkel der Winkel an dem Werkzeuge selbst erkannt werden kann, wozu bestimmte Vorrichtungen dienen u. s. w. In dem Nachfolgenden soll daher zunächst von den einzelnen Theilen der Winkelmefser die Rede sein, ehe die verschiedenen Arten derselben beschrieben werden.

Erster Abschnitt.

Die einzelnen Theile der Winkel-Mefsapparate.

I. Die Schraube.

§. 19.

Bei den Mefsinstrumenten wird nur die rechtsgängige Schraube mit scharfem, dreieckigem Gewinde angewandt. Mit besonderer Berücksichtigung ihres Zwecks kann man folgende Unterscheidungen machen.

1. Dient sie zur dauernden Verbindung einzelner Theile, so ist die dazu angewandte Zug- oder Befestigungsschraube zugleich versenkte Schraube, d. h. ihr cylindrischer oder konischer Kopf tritt in eine eben so geformte Vertiefung des einen Stücks ein und wird nur durch den Schraubenzieher bewegt, der in einen Einschnitt des Kopfes gesetzt wird. Die an den Correctionsvorrichtungen befindliche Befestigungsschraube hat stets einen freien und nur cylindrischen Kopf und wird meistens durch einen in den durchlöcherten Kopf gesteckten Stift bewegt.

2. Von den Befestigungsschrauben werden Knopfschrauben diejenigen wohl genannt, durch welche einzelne unabhängige Stücke eines Instruments nur während der Mefsung mit einander verbunden werden sollen. Der gröfser geformte Kopf ist dann, da die Verbindung unmittelbar mit der Hand bewerkstelligt werden soll, gerändert oder mit lappen- oder hebelförmigen Verlängerungen versehen (Flügelschraube). Einen geränderten Kopf haben auch die meisten der folgenden Schrauben.

3. Schrauben, welche nur eine geringe, aber möglichst gleichförmige, drehende oder fortgleitende Bewegung des einen Theils eines Instruments gegen einen anderen hervorbringen sollen, werden im Allgemeinen Stellschrauben genannt. Sie haben gegen die vorigen immer ein feineres Gewinde und verbinden nur in einzelnen Fällen mit der drehenden Bewegung die fortgleitende, während meistens nur die erstere Statt findet. Zu ihnen gehören insbesondere die zur Horizontalstellung der Winkelmefserebenen dienenden Schrauben, die, wenn sie einem Dreifufse angehören, auch den Namen Fufsschrauben führen; ebenso die bei einigen Correctionsvorrichtungen wirkenden (Corrections-) Schrauben, durch welche eine Verstellung eines beweglichen Theiles gegen einen anderen erreicht werden soll; endlich auch die bei den feinen Achsenbewegungen angewandten Schrauben, welche man aber meistens, obgleich unzweckmäfsig, wegen ihrer sehr feinen Windungen, Mikrometerschrauben nennt.

4. Sollen Schrauben zur Aufhebnng (Hemmung) einer mit der Hand ausgeführten groben Bewegung dienen, so führen sie nach der doppelten Einrichtung der Hemmungsvorrichtung (§§. 88, 89) verschiedene Namen.

a. Die Brems- und Druckschraube verbindet mit der drehenden Bewegung auch eine fortgleitende; bei der ersteren in dem ringförmigen Mutterkörper, indem sie mit ihrem Ende gegen eine kreisförmig ausgeschnittene (Brems-) Platte drückt, welche dadurch gegen eine in horizontaler oder verticaler Lage befindliche Drehungsachse getrieben wird und so bei letzterer die grobe Rotation aufhebt. Die Druckschraube kommt bei einigen Correctionsvorrichtungen vor.

b. Bei der Klemmschraube findet nur eine drehende Bewegung Statt, indem ihr Stützpunkt durch eine zwischen dem Kopfe und der Spindel befindliche Flansche, die z. B. gegen die Aufsenfläche der einen zweier Platten sich legt, gebildet wird, während eine andere bewegliche Platte die Mutter der Sebraubo euthält und dadurch die zwischen beiden befindliebe rotierende Scheibe des Mefsapparats hemmt. In einem anderen Falle bilden die beiden Platten die Fortsätzo eines geschlitzten (Brems-) Ringes, der dio rotierende Achse des Mefsapparats beim Anziehen der Klemmschraube dann zu hemmen im Staude ist. Gröfsere Klemmsehrauben haben stets entweder einen geränderten oder mit Flügeln versehenen Kopf; bei kleineren wird aber meistens zum Dreben ein Schraubenzieher angewandt.

Zu den Klemmsebrauben gehören auch die s. g. Prefsschrauben der Klemmen der Mikrometerwerke, um den Gang der zugehörigen Mikrometerschraube moderieren zu können. Bei diesen ist der Kopf entweder cyliudrisch und mit Löehern versehen oder parallelepipedisch; in diesem Falle wird dann die Umdrehung der Schraube mittelst eines aufgesetzten Schlüfsels bewirkt. Auch zur Aufhebung des todten Ganges einer Stellschraube wird die Klemmschraube angewandt.

5. In einzelnen Fällen soll die Schraube aueb zu mikrometrischen Mefsungeu, gewöhnlich auf das Winkelmafs bezogen, dienen. Dann ist sie eigentliche Mikrometersebraube oder ein Schraubenmikrometer, wovon später die Rede sein wird. (Vgl. §. 69.)

6. Bei der Sehraube ohne Endo besteht dio Spindel nur aus wenigen sebr spitzwinklichten Schraubengängen. Die Mutter wird durch eine Sebeibe vertreten, in deren Rand die Gänge der Mutter rundum eingeschnitten sind, woher der obige Name.

Endlich werden die Schrauben auch als Umdrehungsachsen bestimmter Instrumententheile benutzt, indem ihre Enden in Spitzen auslaufen, die,

einander zugekehrt, in den Rand des zu drehenden Stücks eingreifen und zuweilen zugleich eine Verstellung des letzteren gestatten. (Drehung zwischen Schraubenspitzen.)

§. 20.

Da die Schrauben überall, sowohl bei der Prüfung und Berichtigung der geometrischen Instrumente, als bei dem Gebrauche zur Winkelmefsung, zur Anwendung kommen, so ist es zweckmäfsig, hier die Wirkung derselben näher zu betrachten. Dabei können folgende Hauptfälle von einander unterschieden werden.

1. Die Schraubenspindel wird nur um ihre Achse gedreht, gestattet also keine fortschreitende Bewegung, während die Mutter beweglich ist. Wird, vom Mittelpunkte des Kopfes aus betrachtet, die Schraube von Links nach Rechts gedreht (Anziehen der Schraube), so wird in jeder Lage derselben die Mutter nach dem Kopfe zu sich bewegen. Die umgekehrte Bewegung findet also beim Drehen der Schraube von Rechts nach Links (Lösen oder Lüften derselben) Statt. Diese Regel findet ihre Anwendung bei fast allen Stellschrauben, insbesondere bei denen des Dreifufses. Dabei ist nur zu beachten, ob der ränderierte Kopf und die Spitze (oder der Stützpunkt) auf verschiedenen Seiten oder derselben Seite der Mutter liegen, indem im letzteren Falle die Richtung der Bewegung gegen die Horizontalebene eine entgegengesetzte von der sein wird, wie im ersteren Falle. Ferner bei den Mikrometerschrauben der Mikrometerwerke, wenn die den Stützpunkt der Schraube bildende Kugel in der Klemme des festen Theiles liegt oder der Stützzapfen ebenfalls dem festen Theile des Winkelmefsers zugehört. Auch bei einigen Correctionsvorrichtungen an der Röhrenlibelle, wenn die Schraube als Stellschraube wirkt und bei den Klemmschrauben. (§. 19. 4. b.)

§. 21.

2. Der Schraubenspindel wird durch Drehung eine fortschreitende Bewegung ertheilt, während die Mutter fest ist. Beim Anziehen der Schraube wird also das bewegliche Stück, welches der Schraube als Stützpunkt dient, sich von der Mutter entfernen. Vorzugsweise kommt dieser Fall vor bei den Bremsschrauben der Hemmungsvorrichtungen der Achsen, bei den Stellschrauben der Nufsconstructionen, bei den Druckschrauben der Correctionsvorrichtungen des einen Fernrohrachsenlagers, und den gewöhnlichen Correctionsvorrichtungen der Röhrenlibelle und auch bei den Mikrometerschrauben, wenn deren Mutter in der festliegenden Klemme liegt.

§. 22.

Die Differenzialschraube. Um den feinen Gang der Mikrometerschraube (§. 19. 3) noch zu erhöhen, so versieht man die Spindel

mit zwei Gewinden von verschiedener Höhe. Die Mutter des einen liegt dann in der Klemme des festen Stücks und gestattet daher durch Umdrehung der Schraube nur eine Drehung in ihren Lagern, während die andere, in der Klemme des beweglichen Stücks, auch eine Fortschiebung erleidet. Ist das Gewinde der ersteren festen Mutter *a* das feinere, und seine Höhe α, das der zweiten beweglichen Mutter *b* also das gröbere mit der Höhe β, so wird beim Anziehen der Mikrometerschraube durch die vereinigte Wirkung beider Gewindehöhen die bewegliche Mutter *b* um $\beta - \alpha$ nach dem Kopfe der Schraube zu sich bewegen, woher der obige Name.

Dafs durch Vertauschung der Muttern *a* und *b* und durch Verlegung der verschiedenen Gewinde an die anderen Stellen der Schraube entgegengesetzte Wirkungen sich äufsern werden, ist einleuchtend.

§. 23.

Rücksichtlich der Verstellung der Mutter der Schraube gegen die Spindel kommt nicht allein der Fall vor, wenn die Spindel eine feste Lage behält, also die Mutter längs der Spindel sich fortbewegt, als auch der, wenn die Spindel beweglich ist. Von dem ersten Falle macht man bei dem Befestigen der Füfse des Stativs an seinem Kopfe, beim Festhalten der Umdrehungsachsen in ihren Büchsen, bei dem Befestigen der kleineren transportabelen Mefsinstrumente auf dem Stativ u. s. w. Gebrauch. Der Kopf der Mutter ist dann entweder gerändert oder mit hebelartigen Verlängerungen versehen, oder als Flügelmutter gebildet, oder zum Umdrehen mittelst eines Schlüfsels eingerichtet.

Des zweiten Falles bedient man sich bei gewifsen feinen Achsendrehungsvorrichtungen, bei welchen die Spannung einer auf einen beweglichen Theil (Arm) wirkenden Spiralfeder modificiert oder ganz aufgehoben werden soll.

§. 24.

Todter Gang der Schraube. Bei einer vollkommen guten Schraube mufs bei der geringsten Umdrehung sogleich ein Fortschieben der Spindel oder Mutter bemerkbar werden; zeigt sich diefs nicht, so sagt man, die Schraube habe einen todten oder leeren Gang. Da es schwierig, unmittelbar vielleicht unmöglich ist, die erwähnte Eigenschaft zu erreichen, so wendet man zur Erlangung derselben besondere Mittel an. Bei den Schraubenmikrometern, von welchen man die höchste Genauigkeit fordert, verbindet man eine mit der erforderlichen Spannkraft versehene Spiralfeder, die gegen den Stützpunkt der Schraube oder gegen den zu bewegenden Theil sich legt. Oder man spaltet die Mutter, sobald diese Einrichtung getroffen werden kann und

läfst seitlich eine Klemm- oder Prefsschraube (§. 19. 4. b.) wirken, um die gespaltenen Theile nach Erfordernifs etwas nähern zu können. Ist diese Spaltung der Mutter nicht zulässig, so wendet man wieder eine spiral- oder plattenförmige Feder an, um die Mutter mit der Spindel in möglichster Berührung zu erhalten.

II. Mittel zur Bestimmung horizontaler und verticaler Richtungen.

A. Die Libelle.

§. 25.

Von allen Mitteln zur Bestimmung horizontaler und verticaler Richtungen nimmt die Libelle die erste Stelle ein. Ihre Construction und ihr Gebrauch beruht auf dem Satze, dafs in einem verschlofsenen Gefäfse, welches zwei Flüfsigkeiten von verschieden specifischem Gewichte enthält, z. B. Luft und Schwefeläther, die leichtere immer die höchste Stelle einnimmt, so dafs demnach aus dem Stande der ganz abgeschlofsenen und sichtbaren Luftblase auf die Gröfse der Neigung der Unterlage des Gefäfses geschlofsen werden kann.

Das Gefäfs ist entweder eine an beiden Enden luftdicht verschlofsene cylindrische Glasröhre, deren innere Fläche mittelst eines nach einem Kreisbogen gebogenen Metalldorns concav ausgeschliffen ist (Röhrenlibelle), oder eine cylindrische Messingbüchse, die mit einer planconcaven Glasplatte luftdicht verschlofsen ist, deren Concavität aber nach Innen liegt (Dosenlibelle). Bei den Röhrenlibellen geschieht das Verschliefsen entweder durch Zuschmelzen, oder durch genau eingepasste Glasstöpsel, welche mittelst umgewickelter Kalbsblase und Fischleim verkittet werden.

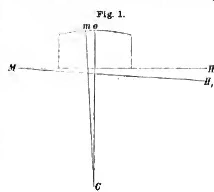
Die tropfbare Flüfsigkeit ist Schwefeläther, welcher der Luftblase eine gröfsere Beweglichkeit verleiht, als der früher meist angewandte Alkohol.

Bei den Röhrenlibellen enthält die Glasröhre eine bis nahe an die Enden reichende Eintheilung, in deren Mitte meistens der Nullpunkt angenommen wird. Bei den Dosenlibellen wird die Mitte durch einige concentrische Kreise bezeichnet, welche, wie die erwähnte Eintheilung, in das Glas geätzt sind. Zur Erleichterung des Ablesens giebt man den Theilstrichen für die Einer, Fünfer und Zehner verschiedene Längen.

§. 26.

Unter Empfindlichkeit einer Libelle versteht man das Verhältnifs der Gröfse des Bogens, welchen die Mitte der Luftblase zurück-

legt, und des Winkels, unter welchem die Unterlage derselben verändert wurde. Es sei in Fig. 1 Co der Halbmefser der inneren Krümmung der Libelle. Ist o die Mitte der Luftblase, deren Sehne parallel mit einer Linie oder Ebene MH ist und kommt dann MH in die Lage MH_1, so wird o, wenn $m\,C\,o = HMH_1$ ist, nach m sich bewegen. Setzt man nun $m\,o = b$, $Co = r$ und $HMH_1 = \alpha$, so ist die Empfindlichkeit der Libelle dargestellt durch den Ausdruck



$$b = \frac{r\pi . \alpha}{180^0} = 0{,}000004848 . r . \alpha \text{ Sekunden}$$

Man sagt dann auch: die Libelle gebe bei dem Winkel α den Bogen b Ausschlag. Bei demselben Winkel α ist daher der Ausschlag oder die Empfindlichkeit der Libelle um so gröfser, je gröfser der Krümmungshalbmefser r ist.

Ebenso erhält man

$$r = \frac{b}{\alpha}\, 206265$$

in Theilen der Libelle, wonach also bei einem bestimmten, geforderten Ausschlage der Krümmungshalbmefser r berechnet werden kann.

Bei Winkelmefsern mufs die Empfindlichkeit der Libelle immer theils der Güte des Fernrohrs, theils der Angabe des Verniers oder der Schraubenmikroskope der eingetheilten Kreise entsprechen. Bei den winkelmefsenden und befseren Nivellier-Werkzeugen wendet man nur Röhrenlibellen an, während bei Mefstischen und Boussolen die Dosenlibelle ausreicht.

§. 27.

Die erste Untersuchung, welcher man die Röhrenlibelle eines Mefsapparates zu unterziehen hat, besteht darin, ob der Bogen, nach welchem die innere Fläche gekrümmt ist, einem Kreisbogen angehört. Man kann diefs leicht durch Anwendung einer feinen Schraube erfahren, indem, bei vorausgesetzter richtiger Eintheilung, nur der Kreisbogen die Eigenschaft hat, dafs zu gleichen Umdrehungen der Schraube auch eine gleiche Anzahl von Theilen der Röhre gehört. Zu dieser Untersuchung kann man entweder einen Theodolith anwenden, dessen

eine Stellschraube des Dreifußes auf dem Kopfe eine Eintheilung enthält, welche an einem angebrachten Index abgelesen werden kann, oder man kann dazu einen Hülfsapparat (Libellen-Justirapparat) anwenden, welcher im Grund- und Aufriſs in meinem Werke: die geometrischen Instrumente u. s. w., Hannover 1864, dargestellt und woselbst auch das Verfahren bei der Untersuchung beschrieben ist. (S. 17. Fig. 4.) Auch findet sich daselbst (S. 19) das Verfahren bei der Anwendung der Stellschrauben eines Dreifußes angegeben.

Nach dieser Untersuchung läſst sich dann auch die Gröſse des Ausschlages einer Libelle leicht bestimmen.

Denkt man sich nämlich von der einen Winkelspitze des den drei Schraubenspitzen des Dreifußes zugehörigen gleichseitigen Dreiecks auf die Gegenseite a eine Normale ρ gefällt, so ist, wenn h die Höhe eines Schraubenganges bezeichnet, die Gröſse des Winkels α, welcher einer Umdrehung des Kopfes entspricht, durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\rho}$$

dargestellt. Ist also $a = 15{,}00$ Zoll, so ist $\rho = a \sin 60^0 = 12{,}999$ Zoll. Entsprächen nun 130 Schraubengänge 2,74 Zollen, so ist $h = \frac{2{,}74}{130} = 0{,}021077$ Zoll, woraus dann folgt $\alpha = 334{,}4079$ Sekunden. Gehören demnach zu diesem Werthe, nach verschiedenen Versuchen mit einer Libelle, im Mittel 71,925 Libellentheile, so giebt ein Theil der Libelle $\frac{334{,}4079}{71{,}925} = 4{,}66$ Sekunden.

§. 28.

Die Libelle wird bei den Winkelmeſsern vorzugsweise angewandt, um bestimmte Theile derselben horizontal oder vertical zu stellen, bei gröſseren Winkelmeſsern auch, um die Neigung bestimmter Theile gegen die Horizontale oder Verticale zu bestimmen.

In einzelnen Fällen soll sie auch das Mittel zur Versicherung der unveränderten Lage gewiſser Stücke der Winkelmeſser gewähren.

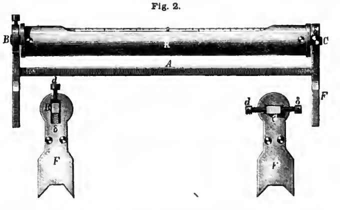
Man umgiebt zu diesem Zwecke die Glasröhre der Röhrenlibelle mit einer Messingfaſsung (einem Gehäuse), welche an jedem Ende mit einem Deckel geschloſsen und auf der oberen Seite so weit ausgeschnitten ist, daſs längs der ganzen Eintheilung der Röhre das Spiel der Luftblase beobachtet werden kann. Auſserdem enthält die Faſsung selbst, oder der fuſsförmige Fortsatz der Deckel, die Druck- oder Stellschrauben als Correctionsschrauben, durch welche entweder eine Verschiebung der Glasröhre gegen die Faſsung oder beider gegen die Deckel in verticaler oder seitlicher Richtung ausgeführt werden kann.

§. 29.

Die verschiedenen Constructionen der Röhrenlibelle werden bedingt theils durch die Art ihrer Anwendung bei den Meſsapparaten, theils durch die verschiedene Beschaffenheit ihrer Correctionsvorrichtungen. Bei den eigentlichen Winkelmeſsern, zuweilen auch bei der Kippregel des Meſstisches wird die Libelle auf die Zapfen der Rotationsachse des Fernrohrs, bei einigen Nivellierinstrumenten auf glockenmetallene Ringe des Fernrohrs gesetzt. Bei solchen Libellen endigt der abwärts in eine Platte auslaufende Deckel, oder eine damit in Verbindung stehende Platte, in einen dem Durchmeſser des Zapfens oder Fernrohrs entsprechenden ausgeschnittenen Fuſs (Figg. 2 und 3). Solche Libellen werden deshalb Steh- oder Setzlibellen genannt. Bei den Versicherungslibellen ruht meistens die Fassungsröhre auf einer mit der Correctionsvorrichtung versehenen Fuſsplatte, welche mit der einen Stütze des Fernrohrs z. B. verbunden ist. Ist die Libelle mit dem Fernrohr fest verbunden, so geschieht dieſs durch zwei Sättel, von denen der eine ein Gewinde, der andere die Correctionsvorrichtung trägt, während die Sättel auf dem Fernrohr befestigt sind. (Fig. 4.)

Fig. 2 stellt eine Setzlibelle vor, an welcher die beiden Fuſsplatten *F*, *F* mit der Platte *A* durch Schrauben verbunden sind. Oben nehmen

Fig. 2.

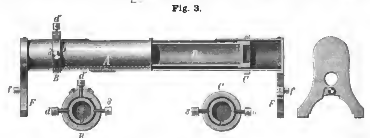


sie in Einschnitten die Arme *B* und *C* der beiden Deckel der Fassungsröhre *R* auf und enthalten die Muttern für die Druckschrauben *d*, *δ*. Am Arme *B* wird die eine derselben durch eine unter ihm liegende Spiralfeder vertreten.

Bei der in Fig. 3 dargestellten Libelle kann bei der vorgenommenen Correction die Glasröhre *R* für sich in der Fassung *A* verschoben werden, während diese mit den Deckeln ein Ganzes darstellt.

Die Glasröhre hat deshalb in der cylindrischen Fafsung nicht nur den erforderlichen Spielraum, sondern ruht aufserdem auf einer oder zwei Federn, welche an der inneren Mantelfläche der Fafsungsröhre befestigt

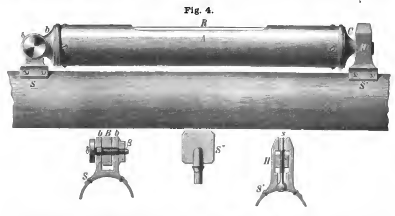
Fig. 3.



sind. Die Correctionsschrauben *d*, *d'* und *δ*, deren Muttern in einem die Fafsung umgebenden Ringe liegen, wirken hier nicht, wie es meistens der Fall ist, unmittelbar auf die Glasröhre, sondern auf Metallringe *b*, *c*, welche den Verschlufs der Glasröhre umgeben. In diesem Falle ist die Röhre um die Spitzen der Schrauben *s* und *σ* drehbar. Ueber die an den Füfsen *F* vortretenden Stifte *f*, *f* legen sich Bügel, welche die Libelle auf dem Fernrohre festhalten.

Ebenso stellt Fig. 4 eine auf einem Fernrohre mittelst der Sättel *S*, *S'* befestigte Libelle dar. Die Arme *B* und *C* bilden mit den

Fig. 4.



Deckeln der Fafsungsröhre *A* ein Ganzes. Der eine Arm *C* geht durch das Gehäuse *H* und enthält die Mutter der Stellschraube *s*, welche mit ihrer Kugel in die Hülse des Fernrohrs etwas eingesenkt ist und mit dem Schlüfsel *S''* gedreht werden kann. Kann nun das Fernrohr, wie es bei den Nivellierwerkzeugen der Fall sein kann, in

seinen Unterlagen gedreht werden, so mufs die Libelle auch noch eine seitliche Verschiebung gestatten. Diefs wird durch die Schraube ζ möglich, welche in dem zwischen den Backen b, b liegenden Arme B ihre Mutter hat. Die Mutter β dient zum Festhalten der Stellschraube. Hat aber das Fernrohr, oder eine andere Unterlage der Libelle, eine unabänderliche Lage, so mufs der Arm B nur mit einem Zirkelgewinde in Verbindung stehen.

Andere Constructionen der Libelle, insbesondere eine mit einem Handgriffe und mit doppelter Fafsungsröhre versehene, findet man in des Verf. Werk: Die geom. Instr. S. 22 u. f., welches in der Folge immer durch H. g. I. angedeutet werden soll.

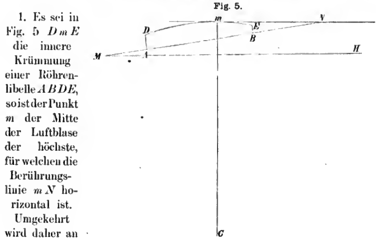
§. 30.

Die im §. 25 erwähnte Büchse der **Dosenlibelle** hat im Boden zur Füllung mit Alkohol oder Schwefeläther eine kleine Oeffnung, die durch eine Schraube luftdicht verschlofsen wird. Der planconcave Glasdeckel ist nicht allein genau in sein Lager eingeschliffen, sondern auch noch sorgfältig verkittet. Den Fufs der Büchse bildet meistens ein schmaler Rand, zuweilen auch eine runde Platte, die in eine andere mit drei Correctionsschräubchen versehene Platte eingelafsen wird. Auch erweitert sich der Fufs wohl zu drei aufgeschlitzten Armen, an deren Enden Stellschrauben zur Correction und aufserdem kleine Klemmschräubchen zur Beseitigung eines todten Ganges derselben sich finden. M. vergl. H. g. I. S. 28.

§. 31.

Bestimmung der Neigung einer gegebenen Linie oder Ebene MN durch die Röhrenlibelle.

Fig. 5.

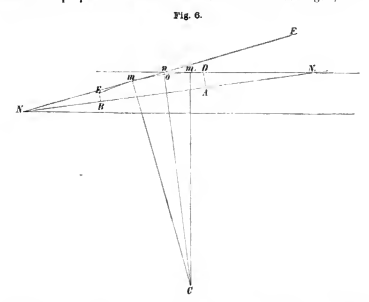


1. Es sei in Fig. 5 DmE die innere Krümmung einer Röhrenlibelle $ABDE$, so ist der Punkt m der Mitte der Luftblase der höchste, für welchen die Berührungslinie mN horizontal ist. Umgekehrt wird daher an

dem höchsten Punkte der Luftblase einer Libelle die Berührungslinie immer horizontal sein und daher $m N M = i$ den Neigungswinkel der Geraden $M N$ gegen den Horizont $M H$ darstellen.

2. Stellt man nun die Libelle um, so dafs in Fig. 6 A die Stelle B, und B die Stelle A einnimmt und bezeichnet für diese Stellung m_1 den höchsten Punkt der Luftblase, so ist nach 1 $m_1 N_1$ horizontal und daher auch $m_1 N_1 N = i$. Wird $N m$ über n hinaus verlängert, so ist

Fig. 6.



$F N N_1 = 2\,i$ und daher auch $m\,C\,m_1 = 2\,i$, also, wenn $o = \frac{m + m_1}{2}$ den Mittelpunkt des Bogens $m\,m_1$ darstellt, $m\,C\,o = m_1\,C\,o = i$. Da man aber die Mitte der Luftblase in beiden Stellungen der Libelle aus dem Stande ihrer Enden mittelst der Eintheilung bestimmen kann, so ist, wenn man in der ersten Stellung die Enden mit r und l, in der zweiten mit r_1 und l_1 nach den Theilstrichen Rechts und Links bezeichnet,

$$m = \tfrac{1}{2}\,(r - l),\;\; m_1 = \tfrac{1}{2}\,(r_1 - l_1),$$

und daher

$$i = \frac{\tfrac{1}{2}\,(r + r_1) - \tfrac{1}{2}\,(l + l_1)}{2}\,.$$

Multipliciert man nun den Zahlenwerth für i mit dem nach §. 27 zu bestimmenden Werthe eines Libellentheiles in Bogensekunden, so erhält man die Neigung der Linie $N N_1$ im Bogenmafs.

Man erhält daher mit einer selbst unberichtigten Röhrenlibelle die Neigung einer Geraden gegen den Horizont in Libellentheilen, wenn man sie in zwei entgegengesetzten Lagen auf dieselben Punkte der Geraden bringt, das erste Mal die Zahlen r und l, das zweite Mal r_1 und l_1 abliest, von dem arithmetischen Mittel der Ablesung der rechten Seite das der linken Seite subtrahiert und den Rest durch 2 dividiert. Ist der Rest positiv, so ist das rechtsliegende Ende der Geraden höher, als das linke, niedriger dagegen, wenn der Unterschied negativ ist.

§. 32.

Prüfung und Berichtigung der Röhrenlibelle.

1. Ist der Ausschlag der zu prüfenden Libelle genau ermittelt, so kann man nach dem vor. §. die Neigung der Unterlage, wofür hier immer die Zapfen der Umdrehungsachse des Fernrohrs eines Theodoliths gedacht werden sollen, bestimmen, und darauf jene Achse in eine horizontale Lage bringen. Bringt man dann durch die Correctionsschrauben der Libelle die Luftblase zum Einspielen, so ist die Libelle, wenn man, der unvermeidlichen Beobachtungsfehler wegen, das Verfahren mehrere Male wiederholt, schliefslich als berichtigt zu betrachten.

2. Setzt man die Libelle auf die Rotationsachse, bringt durch die Stellschrauben des Dreifufses die Luftblase zum Einspielen und nimmt letztere nach dem Umsetzen der Libelle wieder dieselbe Lage ein, so ist nach dem vor. §. sowohl die Unterlage horizontal, als auch die Libelle richtig. Treffen aber die Mitten der Luftblase bei den entgegengesetzten Stellungen der Libelle nicht in dem Nullpunkte der Libellenscale zusammen, so folgt ebenfalls aus dem vor. §., dafs der Abstand derselben, oder auch der Abstand der nämlichen Enden der Luftblase, bei vorausgesetzter Unveränderlichkeit ihrer Länge, dem doppelten Neigungswinkel der Unterlage gegen den Horizont gleich ist. Verbefsert man daher die Hälfte des vorhandenen Fehlers durch Anwendung der Stellschrauben an der Unterlage, so bleibt die andere Hälfte dann an der Libelle noch zu verbefsern. Diefs Verfahren ist selbstverständlich so lange zu wiederholen, bis die Luftblase in beiden Stellungen der Libelle einen unveränderten Stand behält.

3. Es bleibt nun noch zu untersuchen, ob die Achse der Libelle auch mit der Achse der Unterlage seitlich keinen Winkel bildet. Bewegt man nämlich die Libelle ein wenig um die letzterwähnte Achse und geht die Luftblase dabei nicht aus ihrer Stellung, so ist auch in dieser Hinsicht die Libelle richtig. Dreht aber der Beobachter die Libelle nach sich herüber und weicht dann die Luftblase nach Links ab, so ist das linke Ende vom Beobachter weiter entfernt, als das

rechte und ist dann der Fehler durch die seitlich wirkenden Correctionsschrauben zu verbefsern.

§. 33.

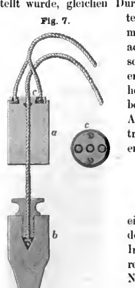
Prüfung und Berichtigung der Dosenlibelle.

Stellt man die Libelle auf eine beiläufig horizontal gestellte Ebene, z. B. auf eine Mefstischplatte, und bringt mittelst der Stellschrauben die Luftblase zum Einspielen, so darf bei der Umdrehung in dem Kreise, den man um den Fufs oder durch die Enden der drei Stellschrauben (§. 30) derselben gezogen hat, die Luftblase ihren Stand nicht ändern. Ist diefs aber der Fall, so mufs bei Libellen, welche keine Stellschrauben zur Correction enthalten, diejenige Stelle des Fufses, nach welcher die Blase hinspielt, soweit abgeschliffen werden, bis jene Abweichung verschwunden ist. Bei Libellen, welche die erwähnten Stellschrauben enthalten, wird an diesen die Berichtigung vorgenommen.

§. 34.

Den im §. 32 für die Bestimmung der Neigung einer Geraden gegen den Horizont und die Prüfung und Berichtigung der Röhrenlibelle gegebenen Regeln liegt offenbar die Voraussetzung zum Grunde, dafs die beiden Zapfen der Rotationsachse, auf welche die Libelle gestellt wurde, gleichen Durchmefser haben. Bei gröfseren Mefsapparaten, wie sie in der höheren Geodäsie in der Art mit angewandt werden, dafs bei gewifsen Beobachtungen eine Umlegung des Obertheils derselben in den Achsenlagern geschieht, ist es erforderlich, den Einflufs der etwaigen Ungleichheit der Zapfen zu ermitteln. Diefs ist aber bei den in der niederen Geodäsie angewandten Apparaten nicht der Fall, weshalb die betreffende Untersuchung hier entbehrlich ist und erst später davon die Rede sein wird.

Fig. 7.



B. Das Loth.

§. 35.

In seiner einfachsten Gestalt besteht es aus einem mit einem Gewichte beschwerten Faden, der freihängend die verticale Richtung anzeigt. In dieser Gestalt wendet man es beim senkrechten Aufstellen der Baken, Distanz- und Nivellierlatten u. s. w. an.

Zum Einlothen des Mefswerkzeugs über einen gegebenen Punkt auf dem Felde dient ein Senkelungsapparat, der aus zwei gleich schweren

Metallkörpern *a* und *b* (Fig. 7) nebst einer Schnur besteht. Das eine Ende derselben ist in dem unteren konisch zulaufenden Körper *b*, die zwei Stränge des anderen Endes aber sind in dem Cylinder *a* unter einer Deckplatte *c* befestigt, während das erstere Ende zugleich durch den Cylinder hindurchgeht, so dafs der letztere an dem ersteren Ende der Schnur beliebig auf- und abgleiten und daher *b* bequem auf den einzulothenden Punkt gebracht werden kann.

III. Die Visier- und dioptrischen Vorrichtungen zum Ablesen der eingetheilten Kreisränder.

§. 36.

Nach dem Begriffe der Winkelbestimmung ist es erforderlich, dafs die Richtung der Schenkel des zu mefsenden Winkels auf dem Winkelmefser nicht allein erkannt oder angegeben, sondern auch durch eine Achsendrehung um eine Gerade in diese Lage gebracht werden können. Bei den eigentlichen Winkelmefsern ist die Richtung der Schenkel durch eine Linie (Indexlinie), welche auf einem lineal- oder scheibenförmigen Körper (Alhidadenregel, Alhidade *) dargestellt ist, bestimmt; bei den winkelzeichnenden Werkzeugen wird sie jedesmal durch Construction auf einer Horizontalebene angegeben. Zur Bestimmung der erwähnten Richtung dienen entweder an dem Lineale oder der Scheibe angebrachte Diopteru **), Absehen, oder ein mit einem Fadenkreuze versehenes Fernrohr, dessen Axe mit der Indexlinie entweder zusammenfällt (mit ihr in einerlei Verticalebene liegt), oder mit derselben einen bestimmten, unabänderlichen Winkel bildet, dann aber zugleich mit der Kreiseintheilung in dieselbe Ebene fällt.

A. Die Diopteru.

§. 37.

Sie bestehen aus zwei rechteckigen Metallplatten, von denen die eine einen schmalen, scharfkantigen verticalen Einschnitt, oder in einer Verticallinie unter einander liegende kleine Löcher zum Durchsehen (Oculardiopter), die andere einen breiteren Verticaleinschnitt enthält, dessen Mittelverticallinie durch ein straff ausgespanntes Haar, oder einen feinen Metallfaden, oder auch durch einen feinen Strich, der auf einer dünnen Glasplatte eingeätzt oder eingeschnitten ist, bezeichnet wird (Objectivdiopter). Hin und wieder bringt man zum Rückwärtsvisieren auch auf jeder Platte ein Ocular- und Objectivdiopter vertical

*) Von dem Arabischen al-hadât, ein drehbares Lineal.

**) Von διά, durch und ὀπτειν, sehen, ὀπτήρ, der nach etwas sicht.

unter einander an. Die Dioptern sind durch einen Fufs mittelst Schräubchen auf der Alhidadenregel befestigt; an den unteren Enden sind auch wohl zum Auf- und Niederlegen Charniere angebracht.

Zum Visieren nach Objecten, die über oder unter dem Horizont des Standortes liegen, trägt die Fufsplatte der Dioptern seitlich eine Drehungsachse, deren Büchse an einer Verticalsäule angebracht ist.

Abgesehen davon, dafs das Visieren die gleichzeitige Betrachtung eines nahen Gegenstandes, des Verticalfadens, und des entfernteren Objects fordert, was den Gesetzen des deutlichen Sehens aber widerspricht, haben die Dioptern noch den wesentlichen Mangel, dafs sie für so entfernte Objecte, welche das gesunde Auge nicht mehr deutlich wahrnehmen kann, und daher für Kurzsichtige ganz unbrauchbar sind. Man bedient sich ihrer nur bei den Winkelkreuzen, der Quecksilberwage und anderen kleinen Nivellierwerkzeugen.

§. 38.

Prüfung und Berichtigung der Dioptern.

Man stelle die Unterlage derselben horizontal, visiere auf die verticale Kante eines Hauses oder auf eine andere Linie, die man als vertical annehmen kann, und untersuche für die verschiedenen Visierlöcher oder die unter einander liegenden Stellen des verticalen Schlitzes des Oculardiopters, ob der Faden des Objectivdiopters in allen Punkten die Verticallinie deckt. Zeigt sich für dasselbe Visierloch eine Abweichung, so ist der Faden nicht vertical. Findet sich aber eine Abweichung für andere Visierlöcher oder andere Stellen des Schlitzes, so liegen diese nicht in einer Verticallinie. Zu ihrer Berichtigung hat man den feinen Schlitz des Oculars oder die Visierlöcher auf einer eigenen Platte angebracht, welche durch das Lüften der Zugschrauben eine geringe Verschiebung gestattet, wonach dann die Schrauben wieder angezogen werden.

B. Das Fernrohr.

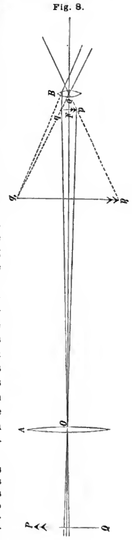
A. Allgemeine Bemerkungen über die Einrichtung des Fernrohrs.

§. 39.

Nach den Gesetzen der Brechung des Lichts in Convexlinsen erzeugen die von einem aufserhalb der vorderen Brennweite befindlichen Gegenstande PQ (Fig. 8) auf eine Convexlinse A fallenden Lichtstrahlen in geringerer oder gröfserer Entfernung hinter ihrem hinteren Brennpunkte F ein physisches umgekehrtes Bild qp des Gegenstandes. Wird diefs nun von einer zweiten Convexlinse B, deren Axe mit der der ersteren in einer Geraden liegt, oder von einer passenden Verbindung mehrerer Convexlinsen aufgefangen, und hat B eine solche Stellung, dafs qp innerhalb der vorderen Brennweite von B liegt, so vertritt qp

für die zweite Linse die Stelle eines Objects und es sieht dann das hinter B in der richtigen Stellung befindliche Auge nicht den Gegenstand PQ selbst, sondern von ihm ein unter einem gröfseren Sehwinkel $q_1 o p_1$ erscheinendes, ebenfalls umgekehrtes aber virtuelles (geometrisches) vergröfsertes Bild $q_1 p_1$. Eine feste Röhre, in welcher die erwähnten Linsengläser in geeigneter Stellung so befestigt sind, dafs ihre Achsen in einer Geraden liegen, heifst ein Fernrohr oder Teleskop*), und die Zahl der Einheiten, welche für den Winkel $q_1 o p_1$ das Vielfache des Winkels $q\,O\,p$ ist, unter welchem der Gegenstand dem freien Auge erscheint, wird die Vergröfserung des Fernrohrs genannt. Darin aber, dafs das physische Bild qp, obgleich sehr klein und kleiner als der Gegenstand, dem Auge doch unter einem gröfseren Sehwinkel erscheint, als jener ohne Fernrohr mit freiem Auge erscheinen würde, liegt der wesentliche Vortheil eines Fernrohrs bei der Betrachtung entfernter Gegenstände, den die Dioptern nie gewähren können.

Fig. 8.



Die Glaslinse A wird das Objectivglas oder das Objectiv, die Linse B, oder die Verbindung mehrerer derselben, die das vergröfserte virtuelle Bild giebt, das Ocular des Fernrohrs genannt; im ersten Falle ist es einfach, im anderen zusammengesetzt. Unter übrigens gleichen Umständen wird zur Herstellung eines deutlichen Bildes gefordert, dafs die Achsen sämmtlicher Glaslinsen in eine Gerade (die optische Achse) des Fernrohrs fallen; in diesem Falle sagt man, die Gläser sind centriert.

Anmerkungen. 1. Bezeichnet d die Entfernung eines in der Achse einer Convexlinse leuchtenden Punktes von der Linse, δ die Entfernung des Vereinigungspunktes der gebrochenen Lichtstrahlen von derselben, r und ρ beziehungsweise den Halbmefser der Vorder- und Hinterfläche und $n:1$ das Brechungsverhältnifs zwischen der Luft und der Glaslinse, so ist nach dioptrischen Sätzen für alle Strahlen, welche nur einen kleinen Winkel mit der Achse bilden,

*) Von τῆλε, fern und σκοπεῖν, betrachten.

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{\delta} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right).$$

Setzt man $d = \infty$, so sind die auf die Glaslinse fallenden Lichtstrahlen als parallel der Achse anzusehen und es werden dann die gebrochenen Strahlen aller Parallelstrahlen sich in einem Punkte (dem Brennpunkte, Focus) vereinigen. Setzt man den Abstand desselben von der Linse (Brennweite, Focalabstand) $= b$, so ist

$$\frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right),$$

und daher auch

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\delta},$$

oder

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{b} - \frac{1}{d}.$$

Hieraus folgt:

a. Je kleiner oder gröfser bei derselben Glaslinie d wird, desto gröfser oder kleiner wird beziehungsweise δ.

b. So lange $\frac{1}{d} < \frac{1}{b}$, oder so lange $d > b$ ist, wird δ positiv bleiben, d. h. der Vereinigungspunkt der gebrochenen Strahlen hinter die Linse fallen, oder es wird ein physisches Bild entstehen.

c. Ist aber $d < b$, d. h. liegt der leuchtende Punkt innerhalb der vorderen Brennweite, so wird δ negativ. Die gebrochenen Strahlen hinter der Linse zeigen sich demnach divergierend und haben eine Lage, als kämen sie von einem Punkte vor der Linse her. (Virtuelles Bild.)

d. Ist $d = b$, so ist $\delta = \infty$, d. h. liegt der leuchtende Punkt im vorderen Brennpunkte, so gehen die gebrochenen Strahlen hinter der Linse parallel zur Achse fort, erzeugen also kein Bild.

2. Liegen mehrere strahlende Punkte in einer auf der Achse der Linse normalen Linie über einander, so müfsen auch die optischen Bilder in einer solchen Linie liegen; zu deren Bestimmung kommt es daher nur auf die Bestimmung der Bilder der Gränzpunkte des Objects an.

a. Ist der Gegenstand in sehr grofser Entfernung vor der Linse, so erscheint das physische Bild in geringerer oder gröfserer Entfernuug hinter dem Brennpunkte und zwar umgekehrt.

b. Beim Näherrücken des Gegenstandes wird das Bild dieselbe Beschaffenheit behalten, aber sich von dem Brennpunkte weiter entfernen, mithin gröfser werden.

c. Kommt der Gegenstand in den vorderen Brennpunkt, so kann sich kein Bild erzeugen.

d. Steht das Object innerhalb der vordern Brennweite, so entsteht ein virtuelles und aufrechtes Bild, welches gröfser als der Gegenstand ist. Je mehr sich nun der Gegenstand dem Glase nähert, um so näher kommt auch das Bild, um so kleiner wird es aber.

Von der Richtigkeit dieser Sätze überzeugt man sich sogleich, wenn man von den äufsersten Punkten des Objects einen Parallelstrahl und einen Hauptstrahl auf die Linse sich gezogen denkt und den Durchschnittspunkt des hinter der Linse liegenden gebrochenen Strahls des Parallelstrahls mit dem uugebrochenen Hauptstrahl bestimmt.

§. 40.

Das Fadenkreuz des Fernrohrs.

Bei den Meſswerkzeugen soll aber das Fernrohr nicht allein die entfernten Gegenstände unter einem gröſseren Sehwinkel erscheinen laſsen, sondern auch, wie die Dioptern, die Richtung der Winkelschenkel der zu meſsenden Winkel angeben. Dazu dient das Fadenkreuz, ein meistens aus zwei auf einander normalstehenden Spinnenfäden bestehendes Kreuz, das auf einem kreisförmig ausgebohrten, plattenförmigen Metallringe befestigt ist, und dessen Durchschnittspunkt in der optischen Achse des Fernrohrs liegen muſs; letztere Gerade wird dann die Collimationslinie des Fernrohrs genannt. Dieser Ring befindet sich im Innern des Fernrohrs an der Stelle, wo das physische Bild des Gegenstandes sich bildet. Die weitere Einrichtung des Ringes (Ocularblendung) wird später angegeben werden.

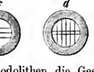
In Fernröhren für Meſstische, Boussolen, Nivellierinstrumente und kleinere Theodolithe hat das Fadenkreuz die vorhin bemerkte Gestalt *a*

Fig. 9.













in Fig. 9, bei gröſseren Theodolithen die Gestalt *b*, sowie bei dem gewöhnlichen distanzmeſsenden Fernrohr die Gestalt *c*. Die beiden äuſseren Horizontalfäden sind entweder auch auf der Ocularblendung, oder jeder derselben ist auf einer anderen Platte befestigt, die mittelst kleiner Schrauben verstellbar ist. In astronomischen Theodolithen oder Universalinstrumenten, mit welchen Sternbeobachtungen vorgenommen werden sollen, hat das Fadenkreuz die Gestalt *d*. Der mittlere Verticalfaden heiſst der Meridianfaden; zwischen die beiden nahe zusammenliegenden Horizontalfäden, die auch wohl nur durch einen mittlern vertreten werden, wird das Bild des zu beobachtenden Sterns gebracht. Das Fadenkreuz der Hülfsfernröhre, Collimatoren, Schraubenmikroſkope und Mikrometeroculare hat die Gestalt eines Andreaskreuzes, *e*, und ist dasselbe bei den beiden letzteren durch eine Mikrometerschraube beweglich. Das bei Spiegelinstrumenten angewandte endlich hat die Gestalt *f*; zweckmäſsiger werden die beiden Horizontalfäden noch von einem Verticalfaden in der Mitte durchschnitten.

Die innere Oeffnung der Ocularblendung begränzt den kreisförmigen Raum, den man durch das Fernrohr auf einmal übersehen kann und den man das Gesichtsfeld des Fernrohrs nennt.

§. 41.

Der Auszug des Fernrohrs.

Da nach §. 39, Anm. 2 der Ort des physischen Bildes des Gegenstandes nach der verschiedenen Entfernung des letzteren sich ändert; aufserdem aber wegen der verschiedenen Beschaffenheit der Augen, damit das durch das Ocular gesehene virtuelle Bild in die Sehweite jedes Auges gebracht werden kann, der Ort des Bildes eine Verstellung fordert: so befindet sich das Objectiv und Ocular des Fernrohrs, jedes für sich, in einer eigenen Röhre, von welchen die Ocularröhre, von kleinerem Durchmefser, meistens in der Objectivröhre verschoben werden kann. Zu diesem Zwecke trägt die Ocularröhre ein angeschraubtes Verlängerungsrohr, welches in eingelegten dickeren Ringen des Objectivrohrs und mittelst angebrachter plattenförmiger Federn eine sanfte und sichere Bewegung gestattet. Beide Röhren des Ocularrohrs nennt man deshalb den Auszug des Fernrohrs.

Um eine geringe Drehung des Auszuges um seine Längsachse möglich zu machen, enthält das Verlängerungsrohr auf seiner oberen äufseren Fläche ein aufgeschraubtes Parallelepipedum, den Stahlrücken, in einen Einschnitt des Objectivrohrs mit Spielraum tretend. Durch zwei einander gegenüberstehende Druckschrauben, welche in dem Objectivrohre ihre Muttern haben, kann der Auszug festgestellt werden. Die Bewegung desselben geschieht entweder aus freier Hand, oder mittelst eines Getriebes mit Zahnstange. (Vgl. H. g. I. Fig. 21.)

Ist die Verschiebbarkeit der Ocularröhre in der vorhin angegebenen Art nicht gestattet, so kann eine das Objectiv tragende Röhre in dem äufseren Objectivrohre mittelst eines Getriebes nebst Zahnstange bewegt werden. (Vgl. Fig. 82.)

C. Das astronomische oder Kepler'sche Fernrohr.

§. 42.

Diefs enthält aufser der convexen Objectivlinse nur noch eine Ocularlinse, ist daher das einfachste aller Fernröhre und wird nur bei den stärksten Vergröfserungen in der ausübenden Astronomie angewandt, soll aber bei den nachfolgenden Bestimmungen der Vergröfserung, des Gesichtsfeldes und der Helligkeit des Bildes des Fernrohrs zum Grunde gelegt werden. Ist der Auszug so weit eingeschoben, dafs von einem Stern ein ganz deutliches Bild entsteht, so kann die Entfernung der beiden Gläser der Summe ihrer Brennweiten nahezu gleichgesetzt werden.

Die Vergröfserung des Fernrohrs.

§. 43.

1. Wird die Vergröfserung eines Fernrohrs $= v$ gesetzt, so ist nach §. 39 (Fig. 8), wenn o und O die optischen Mittelpunkte der Linsen bezeichnen,

$$v = \frac{q\,o\,p}{q\,O\,p} = \frac{q\,o\,F}{q\,O\,F}.$$

Da aber $\quad \operatorname{tg} q\,o\,F = \frac{q\,F}{o\,F}, \quad \operatorname{tg} q\,O\,F = \frac{q\,F}{O\,F},$

die beiden Winkel auch ohne merklichen Fehler als so klein angenommen werden können, dafs sie ihren Tangenten proportional sind, so ist bei der im vorigen Paragraph angegebenen Stellung des Auszuges

$$v = \frac{O\,F}{o\,F} = \frac{B}{b}$$

oder: Die Vergröfserung eines Fernrohrs erhält man, wenn man die Brennweite des Objectivs durch die des Oculars dividiert.

2. Ohne Kenntnifs der Brennweiten B und b kann man die Vergröfserung des Fernrohrs bequem auf folgende Weise bestimmen. Man richte das Fernrohr bei der vorhin bemerkten Stellung des Auszuges gegen das helle Tageslicht, so wird sich hinter dem Oculare ein kleiner heller Kreis bilden, welcher das Bild der Objectivöffnung ist. Mifst man dann mittelst eines Glasmikrometers den Durchmefser d dieses Kreises, so wie den Durchmefser D des Objectivs, so ist $v = \frac{D}{d}$. Denn stellt in Fig. 10 MCN das Objectiv, mcn das Ocular, $\mu\gamma\nu$ den Durch-

Fig. 10.



mefser d vor, so ist, wenn beziehungsweise B und b die Brennweiten des Objectivs und Oculars, δ den Abstand zwischen mcn und $\mu\gamma\nu$ bezeichnen, und weil $Cc = B + b$ ist, $\frac{D}{d} = \frac{MN}{\mu\nu} = \frac{Cc}{c\gamma} = \frac{B+b}{\delta}$.
Da aber nach §. 39 Anmerkung 1

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{b} - \frac{1}{B+b} = \frac{B}{(B+b)\,b},$$

so ist $\quad \frac{D}{d} = \frac{B}{b} = v.$

Ueber andere Methoden vergl. man H. g. I. S. 44.

Das Gesichtsfeld des Fernrohrs.

§. 44.

Nach dem Begriffe des Gesichtsfeldes eines Fernrohrs (§. 40) wird die Gröfse desselben von dem Winkel φ abhängen, dessen Scheitel in der Mitte des Objectivs liegt und der dem Winkel an der Spitze des gleichschenklichten Achseudreiecks des normalen Kegels angehört, dessen Spitze mit dem Scheitel des Winkels zusammenfällt und zu dessen Basis entweder die Oeffnung d der Ocularblendung oder die des Oculars $= o$ angenommen wird.

In dem ersten Falle erhält man, da der Abstand des Objectivs von der Ocularblendung $= B$ genommen werden kann,

$$\varphi \text{ in Minuten} = \frac{d}{B}\, 3437{,}7;$$

je gröfser daher d, desto gröfser ist auch φ. Im anderen Falle, da der Abstand der Objectivlinse von der Ocularlinse $= B + b$ ist, erhält man

$$\varphi \text{ in Minuten} = \frac{o}{B+b}\, 3437{,}7.$$

Weil aber das auf das Ocular fallende gebrochene Licht nicht auf seine ganze Oberfläche, sondern nur auf einen Kreis fallen darf, dessen Durchmefser etwa $0{,}6\,b$ beträgt und $B = b\,v$ (§. 43) ist, so erhält man

$$\varphi \text{ in Minuten} = \frac{0{,}6\,b}{b\,(v+1)}\, 3437{,}7 = \frac{2062{,}6}{v+1};$$

je stärker daher die Vergröfserung eines Fernrohrs werden soll, desto kleiner wird das Gesichtsfeld desselben sein.

Anmerkung. Annähernd kann man die Gröfse des Gesichtsfeldes eines Fernrohrs aus der Vergleichung mit dem scheinbaren Durchmefser der Sonne und des Mondes, der etwa 32 Minuten beträgt, bestimmen.

Die Deutlichkeit und Helligkeit des Bildes im Fernrohr.

§. 45.

Sowohl das physische Bild eines Objects im Fernrohr, als auch das von dem Ocular hervorgebrachte und von dem Auge wahrgenommene virtuelle Bild mufs die nämlichen Bedingungen erfüllen, welche an die auf der Retina des Auges hervorgebrachten Bilder gestellt werden, wenn der Zweck des Fernrohrs vollständig erreicht werden soll. Die Bilder müfsen nämlich eine möglichste Deutlichkeit und Helligkeit besitzen.

1. Unter Deutlichkeit des Bildes versteht man die Schärfe, mit der jeder Punkt desselben sich zeigt. Das vom Objectiv entstandene physische Bild wird daher den höchsten Grad der Deutlichkeit haben, wenn jeder Punkt des Objects auch nur einen Punkt im Bilde erzeugt,

d. h. wenn ein Bild ganz frei von der **chromatischen** und **sphärischen Aberration** ist*).

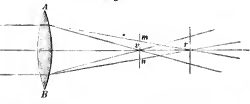
*) Das Phänomen der Brechung des Lichts ist noch mit der anderen Erscheinung verbunden, dafs die reinen (weifsen) Strahlen des Sonnenlichts in farbige Strahlen zerlegt werden, die eine ungleiche Brechung erleiden. Man nennt diefs Phänomen die **Zerlegung** oder **Zerstreuung des weifsen Lichts**.

Läfst man nämlich durch eine kleine runde Oeffnung im Fensterladen eines verfinsterten Zimmers Sonnenstrahlen fallen, so zeigt sich auf einer weifsen Ebene, welche von den Strahlen getroffen wird, ein kleiner leuchtender weifser Kreis. Läfst man aber den von der Oeffnung ausgehenden Lichtcylinder auf ein dreiseitiges Glasprisma fallen, dessen Seitenkanten horizontal liegen und dessen brechender Winkel nach Unten gekehrt ist, so zeigt sich oberhalb des vorigen kleinen Kreises ein länglichtes, oben und unten abgerundetes, seitwärts aber von geraden Linien begränztes farbiges Bild (**Farbenbild, Spectrum**), dessen Länge aber theils vom Einfallswinkel der Sonnenstrahlen, theils von dem brechenden Winkel des Glasprisma abhängt. Der untere Theil des Farbenbildes ist dunkelroth; von da aufwärts zeigt es sich hellroth und durch Orange allmählich in das Schwefelgelbe übergehend. Diefs wird immer mehr grünlich und dann reingrün; dann zieht es sich wieder allmählich ins Lichtblaue und geht durch Indigoblau in ein dunkles Violet über.

Obgleich es also eigentlich eine grofse Menge einfacher farbiger Strahlen sind, woraus das weifse Sonnenlicht besteht und woraus sich auch die seitlichen geraden Contouren nur erklären lafsen, so pflegt man doch nur die sechs Hauptfarben, **Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau** und **Violet** die **prismatischen** oder **Regenbogenfarben** zu nennen. Während also das weifse Sonnenlicht aus einer bestimmten Menge einfacher Strahlen besteht, zeigt sich durch den angegebenen Versuch zugleich, dafs die verschieden gefärbten Strahlen ungleich gebrochen werden, nämlich bei Roth am wenigsten und bei Violet am stärksten; es ist aber auch noch zu bemerken, dafs ein farbiger Strahl, welcher einmal zerlegt worden ist, nicht weiter zerlegt werden kann. Denn bringt man auf der auffangenden Ebene mehrere durch geeignete Schieber verschliefsbare Spalten an und läfst durch eine offene Spalte einen einzelnen Farbenstrahl auf ein zweites Glasprisma fallen, so erscheint von ihm auf einer zweiten auffangenden Ebene nur ein rundes Bild von der Farbe des durchgelafsenen Lichts.

Die ungleiche Brechung, welche bei den verschiedenfarbigen Strahlen stattfindet, mufs aber offenbar einen wesentlichen Einflufs auf die Wirkung der Linsengläser ausüben. Fallen Lichtstrahlen auf die Glaslinse AB, Fig. 11, so werden die violetten Strahlen, als am stärksten gebrochen, etwa in v, die rothen etwa in r in einen Punkt sich vereinigen, mithin der zwischen r und v enthaltene Raum als eine Reihe der Brennpunkte für die anderen Farben zu betrachten sein. Auf einer in v oder dessen Nähe befindlichen weifsen Ebene würden in der Nähe von m und n nur rothe Strahlen sich zeigen, indem die orangefarbigen, als die etwas stärker gebrochenen, schon vor r zusammen-

Fig. 11.



Die erstere wird dadurch gehoben, dafs man mit der biconvexen Glaslinse von Kron(Crown)glas des Objectivs noch eine convexeoncave Linse von Flintglas verbiudet, so dafs erstere dem Objecte zu liegt und die Zerstreuungsweite der Flintglaslinse gröfser ist, als die Brennweite des Kronglases, damit das stärker zerstreuende Flintglas die Farben des Kronglases aufheben kann, ohne die brechende Kraft desselben zu sehr zu beeinträchtigen. Man nennt deshalb solche Objective achromatische und ein mit einem solchen versehenes Fernrohr ein achromatisches Fernrohr. Die beiden Gläser werden indessen nicht unmittelbar mit einander zur Berührung gebracht, sondern zwischen beiden liegen, in Abständen von 120°, an den Rändern drei gleich dicke Stanniolblättchen.

---

kommen, die Mitte aber, wo die andern farbigen Strahlen vereinigt sind, wird weifs erscheinen. Das Bild des Gegenstandes wird daher mit einem rothen Rande umgehen sein, der gegen die Mitte ins Orange und dann ins Weifse übergeht.

Das Bild dagegen, was in der Nähe von r betrachtet wird, mufs mit einem violetten Rande umgeben sein, der nach der Mitte zu in Blau und dann ebenfalls in Weifs übergeht. Das beobachtende Auge wird daher in keinem Punkte ein vollkommen scharfes Bild des Gegenstandes wahrnehmen können. Man nennt diese Undeutlichkeit der Bilder die Abweichung wegen der Farbenzerstreuung oder die chromatische Abweichung.

Wegen dieser Undeutlichkeit werden demnach auch alle dioptrischen Werkzeuge mit Mängeln behaftet sein, weshalb es von der höchsten Wichtigkeit ist, Mittel zu besitzen, wodurch die Farbenzerstreuung möglichst aufgehoben wird, ohne jedoch dabei zugleich die Ablenkung der Strahlen zu vernichten, weil diese gerade der Zweck der genannten Werkzeuge ist.

Solche Linsengläser, welche farbenlose Bilder der durch sie betrachteten Gegenstände liefern, bei denen also die Brennpunkte der verschiedenfarbigen Strahlen zusammenfallen, heifsen achromatisch (von dem verneinenden ἀ und χρῶμα, Farbe.)

Bekanntlich hielt Newton, welcher die Zerstreuung des Lichts der brechenden Kraft proportional setzte, das Zustandebringen der achromatischen Linsen für unmöglich, während Euler, der auf die Construction des menschlichen Auges sich stützte, es behauptete, und damals auch über diesen Gegenstand zwischen Newton, Euler, d'Alembert und Clairaut weitläufige Discussionen stattfanden. Der erste, welcher die Entdeckung 1757 bekannt machte, war John Dollond, obgleich schon 1733 von dem Engländer Hall achromatische Linsen verfertigt sein sollen. Die Dollond'schen achromatischen Linsen bestanden aus zwei Biconvexlinsen von Crownglas (das gewöhnliche Fenster- oder Tafelglas von grünlichem Stich) und einer dazwischen liegenden Biconcavlinse von Flintglas, in welchem dem Kiesel und Kali noch rothes Bleioxyd zugesetzt ist und dadurch nicht allein eine gröfsere brechende, sondern auch eine gröfsere Farben zerstreuende Kraft besitzt. Fraunhofer aber wandte eine Biconvexlinse aus Crownglas und eine dahinter stehende Biconcav- oder auch Planconcavlinse von Flintglas an. In neuerer Zeit wendet man nach Fraunhofer auch für die Flintglaslinse eine convexconcave an. Stets liegt aber die biconvexe Crownglaslinse dem Objecte zu.

Die sphärische Aberration, welche hauptsächlich durch die auf den Rand des Objectivs fallenden Lichtstrahlen hervorgebracht wird, kann dadurch möglichst vermieden werden, dafs man aufser der im §. 40 erwähnten Ocularblendung, im Innern der Objectiv- und Ocularröhre, vom Objective an, Blendungen oder Diaphragmen*) anbringt, deren innere Oeffnungen dem Mantel eines abgestumpften Kegels angehören, welcher die concave Fläche der Flintglaslinse zur einen und die Oeffnung der Ocularblendung zur anderen Grundebene hat. Wie man für das virtuelle Bild eine gröfsere Deutlichkeit und Helligkeit erreichen kann, wird im folgenden Paragraphen gezeigt werden.

Um jede störende Reflexion des Lichts zu vermeiden, sind sowohl die Blendungen, als das ganze Innere des Rohrs mit einer matt aussehenden Schwärze überzogen.

2. Die Helligkeit eines Fernrohrs ist der Totaleindruck der Stärke des Lichts oder der Beleuchtung des vergröfserten Bildes auf das betrachtende Auge. Sie hängt hauptsächlich ab von der Oeffnung D des Objectivs und von der Stärke der Vergröfserung υ. Setzt man die Helligkeit eines bestimmten Objects, mit freiem Auge gesehen, $= 1$, so ist die Helligkeit des Fernrohrs, wenn man von der Lichtschwächung abstrahiert,

$$H = \frac{D^2}{\upsilon^2}.$$

Anmerkung. Eigentlich mufs hierbei auch noch das von dem Ocular in die Pupille des Auges gelangende Licht berücksichtigt werden. Man vergl. hierüber, so wie über die absolute Lichtstärke des Fernrohrs etc. H. g. I. S. 47 u. f.

Die zusammengesetzten oder achromatischen Oculare des astronomischen Fernrohrs.

§. 46.

Das bisjetzt vorausgesetzte einfache Ocular des astronomischen Fernrohrs würde wegen der starken Krümmung seiner Oberfläche das Bild des Objects, insbesondere bei terrestrischen Beobachtungen, aufs Neue hinsichtlich seiner Deutlichkeit und Helligkeit beeinträchtigen, wenn diefs nicht auf andere Weise wieder verhindert werden könnte. Zu diesem Zwecke wendet man in der Ocularröhre noch ein zweites Convexglas an, welches man zwischen das Ocular und das Objectiv stellt, dafs das physische Bild dem letzteren etwas näher gerückt wird, weshalb dasselbe die Collectivlinse**) des Oculars genannt wird. Diese hat eine solche Stellung, dafs seine Brennweite $\beta = \frac{2B}{\upsilon}$ ist,

*) διάφραγμα, Zwischenwand.

**) von colligere, sammeln.

unter B die Brennweite des Objectivs verstanden; durch beide Gläser wird dann die sphärische und chromatische Abweichung in mehr oder minder hohem Grade beseitigt.

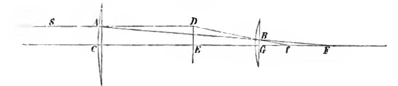
Denkt man sich eine dritte Linse, welche dieselbe Brennweite und denselben Sehwinkel, also auch die nämliche Vergröfserung besitzt, als die beiden Ocularlinsen in ihrer Verbindung mit einander haben, so nennt man diese imaginäre Glaslinse die **äquivalente Linse** des Oculars.

Werden die Brennweiten der Collectiv-, Ocular- und äquivalenten Linse beziehungsweise durch β, b und β_1 und der Abstand der beiden ersteren durch Δ bezeichnet, so ist

$$\beta_1 = \frac{\beta . b}{\beta + b - \Delta} .$$

Denn ist in Fig. 12 AC die Collectiv- und BG die Ocularlinse, so wird der Parallelstrahl SA durch die erstere in der Richtung AF

Fig. 12.



gebrochen, durch die Ocularlinse aber nach f abgelenkt. In dem Durchschnittspunkt D der Verlängerung von SA mit fB wird daher die äquivalente Linse ihre Stellung haben und Ef ihre Brennweite $= \beta_1$ sein.

Nun ist $\qquad CF : GF = AC : BG$

und $\qquad DE$ oder $AC : BG = Ef : Gf,$

mithin $\qquad CF : GF = Ef : Gf,$

oder, wenn man $\qquad Gf = y \qquad$ setzt,

$$\beta : \beta - \Delta = \beta_1 : y,$$

also $$\beta_1 = \frac{\beta}{\beta - \Delta} y.$$

Da aber nach §. 39, Anm. 1 $\frac{1}{b} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\delta}$,

also $$d = \frac{b\delta}{\delta - b} \quad \text{ist,}$$

mithin hier $$GF = \beta - \Delta = \frac{by}{b - y}$$

ist, so erhält man $$y = \frac{(\beta - \Delta) b}{(\beta - \Delta) + b}$$

und durch Substitution dieses Werthes in dem obigen Ausdrucke für y_1

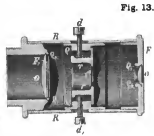
$$\beta_1 = \frac{\beta \cdot b}{\beta + b - \Delta}.$$

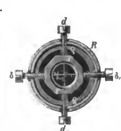
1. Das Huyghens'sche Ocular.

§. 47.

Das in Fig. 13 im Verticaldurchschnitt abgebildete Ocular von Huyghens besteht aus zwei Planconvexlinsen O und o von Kronglas, welche beide ihre convexe Fläche dem Objective zukehren, so dafs $\beta : \Delta : b = 3 : 2 : 1$, der Ort des Bildes also in der Mitte f zwischen den beiden Gläsern, woselbst auch der Ring der Ocularblendung

Fig. 13.





rr für das Fadenkreuz angebracht ist. Das Collectivglas fängt die durch das Objectiv gebrochenen Strahlen, ehe sie sich hinter dem vorderen Brennpunkte des Oculars vereinigen können, auf und bringt das Bild dem Objectiv etwas näher; durch das Ocular wird die Vergröfserung desselben bewirkt. Die Fafsungen F_1 und F für das Collectiv O und das Ocular o sind mittelst Schraubengewinden in der Ocularröhre RR befestigt; die erstere Fafsung nimmt an einem Gewinde noch die mit dem Stahlrücken versehene Auszugröhre auf. Gegen den Ring rr treten ein oder zwei Paar diametral gegenüberstehende Druckschrauben dd_1 und $\delta\delta_1$ zur Correction oder mit zur Verschiebung des Fadenkreuzes in der Röhre RR. Die Muttern der Schrauben liegen in dem Ringe $\rho\rho$, der entweder in RR in einem kleinen Einschnitte längs der Achse der Ocularröhre verschiebbar ist, wozu dann die Schrauben dd_1 dienen, oder er ist in RR unabänderlich befestigt. In diesem Falle mufs aber die Ocularfafsung F verstellbar sein und es dienen dann $\delta\delta_1$ als Correctionsschrauben. Mittelst vorgelegter kleiner Ringe $\rho_1\rho_1 \ldots$ werden die Linsen in ihren Fafsungen festgehalten.

§. 48.

Da nach dem vorigen Paragraphen $\beta : \Delta : b = 3 : 2 : 1$, so ist $\beta = 3b$ und $\Delta = 2b$, folglich die Brennweite β_1 der äquivalenten Linse $= \frac{3}{2}b$, mithin nach §. 43 die Vergröfserung des Fernrohrs mit

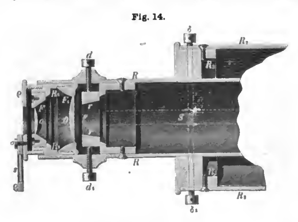
dem Huyghens'schen Ocular $\upsilon_1 = \frac{2}{3}\upsilon$, nämlich nur zwei Drittheile der Vergröfserung, welche entstünde, wenn das Fernrohr kein Collectivglas enthielte. Dagegen wird nach dem Ausdrucko $\varphi = \frac{2062,6}{\upsilon + 1}$ Minuten (§. 44), nicht nur das Gesichtsfeld, sondern auch nach dem Ausdrucke $H = \frac{D^2}{\upsilon^2}$ des §. 45 die Helligkeit, und zwar diese $\frac{9}{4}$ Mal gröfser. In optischer Beziehung besitzt also das Huyghens'sche Ocular wesentliche Vorzüge vor dem einfachen, und wird deshalh auch bei Universal-instrumenten, Theodolithen, den Kippregeln der Mefstische, Nivellier-instrumenten u. s. w. dann mit Vortheil angewandt, wenn damit nicht zugleich mikrometrische und Distanzmefsungen ausgeführt werden sollen. Dagegen darf nicht unerwähnt bleiben, dafs wegen der Stellung des Fadenkreuzes zwischen den beiden Convexlinsen die beabsichtigten Aufhebungen der sphärischen und chromatischen Aberration auf das physische Bild und das Fadenkreuz nicht gleichmäfsig wirken, indem auf ersteres beide Linsen influieren, auf letzteres aber nur das Ocular allein, was bei den folgenden Ocularen nicht der Fall ist. Diese Abnormität macht sich beim Einstellen auf verschieden entfernte Objecte und besonders bei verschiedenen Augen auch leicht bemerklich.

2. Das Ramsden'sche Ocular.

§. 49.

In Fig. 14 wird diefs Ocular im Horizontaldurchschnitt dargestellt.

Fig. 14.



Es besteht auch aus zwei Planconvexlinsen von Kronglas, von denen aber die Planseite der Collectivlinse O dem Objective zugekehrt ist,

während, wie beim vorigen Ocular, die Ocularlinse o ihre Planseite dem Auge zuwendet. Bei diesem Ocular ist $\beta : \Delta : b = 1 : \frac{4}{9} : \frac{5}{9} = 9 : 4 : 5$. Der das Fadenkreuz tragende Ring rr gestattet aber keine Verschiebung längs der Achse der Ocularröhre, sondern nur zur etwaigen Correction des Fadenkreuzes eine seitliche Bewegung durch die Druckschrauben dd_1. Auch wird hier die Röhre $R_1 R_1$, welche die beiden Gläser in besonderen Fafsungen enthält, gegen die unbewegliche Ocularblendung in der Auszugsröhre RR verschoben. Eine geringe Drehung der letzteren in dem Objectivrohre $R_2 R_2$ kann durch die Druckschrauben $\delta \delta_1$ ausgeführt werden. Während endlich beim Huyghens'schen Ocular das Auge dicht hinter die Ocularfafsung gebracht wird, hat das Ramsden'sche noch den Oculardeckel ρ, der in der Figur auch noch mit dem Sonnenglase s versehen ist. Der Ort des Auges bestimmt sich durch den Ausdruck $\delta = b + \frac{b^2}{B}$, welcher aus der Formel $\frac{1}{b} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\delta}$ (§. 39, Anm. 1) unter der Berücksichtigung sich ergiebt, dafs hier $d = B + b$ ist und δ den Abstand des Auges von dem Ocular o bezeichnet.

§. 50.

Aus $\beta : \Delta : b = 9 : 4 : 5$, folgt $\beta = \frac{9}{5} b$ und $\Delta = \frac{4}{5} b$; es ist mithin die Brennweite β_1 der äquivalenten Linse $= \frac{9}{10} b$ und die Vergröfserung v_1 des Fernrohrs mit dem Ramsden'schen Ocular $\frac{10}{9}$ der Vergröfserung, welche das Kepler'sche Fernrohr ohne Collectivlinse haben würde. Die Entfernung des Fadenkreuzes von der Collectivlinse also $\frac{1}{10} \beta$, nach dem Objectiv zu. Weil daher nun nicht nur das Gesichtsfeld, sondern auch die Helligkeit um ein Bedeutendes sich geringer zeigt, so steht das Ramsden'sche Ocular in optischer Hinsicht dem Huyghens'schen nach, dagegen hat es den Vorzug, dafs durch die Stellung seines Fadennetzes, dasselbe nicht nur in erhöhter Reinheit gesehen wird, sondern auch der Ort desselben weder von der gröfseren oder geringeren Entfernung der Objecte, noch von dem Accommodationsvermögen des Auges erheblich abhängig ist, deshalb auch vorzugsweise bei allen distanzmefsenden Fernröhren, den Schraubenmikrofkopen, den Mikrometerocularen und bei den Fernröhren, welche zu mefsenden Beobachtungen dienen sollen, angewandt wird.

Ueber das Ramsden'sche Ocular mit der Einrichtung zum Distanzmefsen mit verstellbaren Fäden vergl. man H. g. I. S. 57.

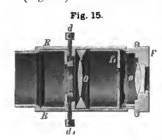
3. Das orthoſkopische Ocular von Kellner*).

§. 51.

Durch die beiden vorigen Oculare, besonders aber durch das Huyghens'sche, ist zwar die chromatische Abweichung meistens eliminiert und nur an der Gränze des Gesichtsfeldes ein schmaler blauer Rand wahrzunehmen; allein eine durch die sphärische Abweichung entstandene Krümmung und Verzerrung des Bildes am Rande des Gesichtsfeldes, die aber wieder mehr beim Huyghens'schen Oculare sich geltend macht, nicht ganz verdrängt.

Diese Unvollkommenheiten haben nun bei den gewöhnlichen terrestrischen Meſsungen deshalb kein bedeutendes Gewicht, als von den einzuvisierenden Objecten die Bilder immer an das Fadenkreuz, also in die Mitte des Gesichtsfeldes gebracht werden müſsen, woselbst sie immer rein und deutlich sich wahrnehmen laſsen. Bei Sternbeobachtungen dagegen, wobei an jedem der fünf bis elf Seitenfäden der Durchgang des Sterns mit gleicher Präcision beobachtet werden soll, haben jene Unvollkommenheiten ein gröſseres Gewicht und wendet man dann entweder eine Verschiebung des Oculars, worüber II. g. l. S. 59 u. f. zu vergleichen ist, oder das orthoſkopische Ocular von Kellner an. Leider ist die eigentliche Zusammensetzung desselben noch ein Geheimniſs und mag daher hier nur erwähnt werden, daſs das Ocularglas *o* (Fig. 15) eine combinierte achromatische Ocularlinse, die Collectivlinse *O* ein Biconvexglas mit fast gleicher Krümmung der Vorder- und Hinterfläche, die flachere Seite aber dem Objectiv zugekehrt ist. Wenngleich die Stellung der Ocularblendung mit dem Fadenkreuz *f* gegen die Collectiv- und Ocularlinse im Allgemeinen dem Ramsden'schen Oculare entspricht, so verdient doch die vor dem Oculare *o* angebrachte Blendung f_1 eine besondere Beachtung. Zur Correction des Fadenkreuzes dienen die Druckschrauben *d* und d_1.

Fig. 15.



4. Das prismatische Ocular.

§. 52.

Um vorzugsweise die Beobachtung eines Sterns, welche Lage er auch an der Himmelskugel einnehmen mag, mit gleicher Bequemlichkeit

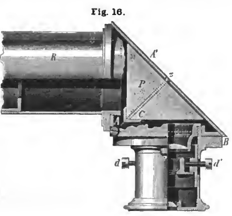
---

*) Das orthoſkopische Ocular, eine neu erfundene Linsencombination u. s. w. von E. Kellner. Braunschweig, Vieweg 1849. Der Name von ὀρθός, gerade und σκοπέω, beobachte.

zu machen, welches aber auch bei manchen terrestrischen Objecten Rücksicht verdient, bringt man vor dem Ocular (dem Huygens'schen oder Ramsden'schen) und dem Fadennetz in der Ocularröhre so ein Glasprisma von gleichschenklicht-rechtwinklichtem Querschnitt an, dafs die eine Kathetenebene zur optischen Achse des Fernrohrs normal steht, wodurch dann das durch das Objectiv gebrochene Licht nach den bekannten Eigenschaften der totalen Reflexion um 90⁰ so abgelenkt wird, dafs die Achse des in das Auge tretenden Lichtcylinders eine horizontale Lage hat. Man nennt solche Oculare wohl prismatische.

In Fig. 16 ruht das Prisma P auf dem Metallstuhle A und wird aufserdem von Deckplatten A_1 umgeben, gegen welche dasselbe in dem Dache C mittelst Zugschrauben z befestigt ist. An der einen Seite wird es an das Auszugrohr R geschraubt.

Fig. 16.



Diese Einrichtung gehört immer einem eigenen Auszuge an, der dann die Stelle eines gewöhnlichen Auszuges ohne Prisma in dem Objectivrohr des Fernrohrs einnimmt, wenn die oben erwähnten Beobachtungen angestellt werden sollen. Sie führt die Unbequemlichkeit mit sich, dafs der Collimationsfehler des Fernrohrs für jedes der Oculare und durch den fortwährenden Austausch auch wiederholt bestimmt werden mufs. Diese Unbequemlichkeit wird dadurch in neuerer Zeit beseitigt, dafs man ein nur dem Oculare des Fernrohrs entsprechendes, also viel kleineres Prisma in eine Fafsung bringt und diefs dann bei dem Gebrauche in Nuthen schiebt, welche auf der Ocularplatte angebracht sind und daher auch leicht wieder entfernt werden kann.

Eine Abbildung von dieser Einrichtung findet sich in Figg. 41 und 42, so wie in Fig. 102 v. H. g. I. S. 251.

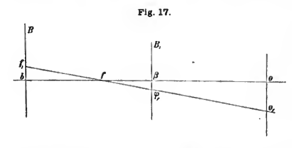
Denselben Zweck erreicht man auch durch das s. g. gebrochene Fernrohr, über dessen Construction H. g. I. Fig. 35, S. 63 zu vergleichen ist.

Die Einstellung oder Pointierung des Fernrohrs auf ein terrestrisches Object.

§. 53.

Beim Einstellen des Fernrohrs auf ein Object mufs zuerst das Fadenkreuz in die richtige Stellung gegen das Ocular gebracht werden. Man richtet das Ferurohr gegen den hellen Himmel und verstellt entweder die Ocularblendung, wenn diese, wie bei einigen Huyghens'schen Ocularen verstellbar ist, oder das Ocular allein; oder, wie bei dem Ramsden'schen und orthoſkopischen Oculare, die Ocularröhre mit ihren beiden Gläsern, so lange, bis die Fäden einfach und ganz schwarz erscheinen; dann liegen letztere in der deutlichen Sehweite. Dann richtet man das Fernrohr durch Verschiebung des Ocular- oder Objectivauszuges (§. 41) auf einen bestimmten Gegenstand, bis dessen Bild von dem Auge deutlich wahrgenommen wird. Da aber sowohl das Fadenkreuz, als das Bild des Objects in einer und derselben Ebene sich befinden und beide auch in der deutlichen Sehweite des Auges erscheinen müfsen, so bewege man, zur Erforschung dieser Forderung, das Auge etwas seitlich vor dem Oculare. Bleibt dabei das erwähnte Bild mit dem Fadenkreuz gedeckt, so hat der Auszug des Fernrohrs die richtige Stellung gegen sein Objectiv. Deckt aber das Fadenkreuz scheinbar solche Stellen des Bildes, die auf der entgegengesetzten Seite von der liegen, nach welcher das Auge bewegt wurde, so ist das Bild des Objects weiter vom Auge entfernt, als das Fadenkreuz, und es ist dann der Auszug einzuschieben, mithin auszuziehen, wenn Bild und Fadenkreuz mit dem bewegten Auge auf derselben Seite liegen. Den Grund hiervon zeigt Fig. 17. Denn wenn f den Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes, B oder B_1 den Durchschnitt der Ebene des Bildes vorstellt, so wird das beobachtende Auge o nur dann die Punkte f und β oder b zusammenfallend erblicken, wenn die Augenachse mit bf oder βf zusammenfällt. Rückt aber die Pupille des Auges nach o_1, so wird f entweder den auf der entgegengesetzten Seite von bo entfernter liegenden Punkt f_1 oder den auf derselben Seite näher liegenden Punkt φ_1 einnehmen.

Fig. 17.



Das Einziehen der Fäden des Fadenkreuzes.

§. 54.

Man nimmt zu den Spinnenfäden, aus denen nach §. 40 das Fadennetz besteht, entweder solche, die unmittelbar von der lebenden Spinne erhalten werden, indem man sie zwingt, sich von einem Gegenstande herabzulafsen, oder die Fäden eines Cocons der Spinne, welche vor den ersteren noch den Vorzug haben, dafs sie alle gleich dick sind. Man zieht nun einen solchen Faden heraus, fährt einige Male mit dem Daumen und Zeigefinger an demselben herab, um ihn vom Staube zu reinigen und spannt ihn unter Anhauchen zwischen zwei hinlänglich geöffneten Zirkelspitzen, an denen sich etwas Klebwachs befindet, möglichst stark aus. Indem man nun den Faden auf die bezeichneten Stellen der Ocularblendung legt, läfst man ein Tröpfchen flüfsig gemachtes Wachs auf die beiden Enden des Fadens fallen und befestigt die Enden. Um sich zu überzeugen, ob der Faden nach seiner Befestigung gut gespannt ist, behaucht man ihn nochmals und untersucht mit der Loupe, ob er die Straffheit behält.

Die Arbeit wird nicht allein wesentlich erleichtert, sondern das Einziehen von Fäden in möglichst gleichen Abständen, oder in der Mitte der Oeffnung der Ocularblendung, oder in genau senkrechter Lage u. s. w. nur möglich durch Anwendung eines kleinen Hülfsapparats, worüber zu vergleichen ist H. g. I. S. 67, Fig. 38.

D. Das terrestrische oder Erd-Fernrohr.

§. 55.

Für manche Mefsungen, insbesondere für das Nivellieren mit Latten, die nicht zum Selbstablesen eingerichtet sind, ist es besonders für den Anfänger störend, die beobachteten Objecte in umgekehrter Stellung im Fernrohr zu erblicken. Es ist der Zweck des Erdfernrohrs, die vergröfsert erscheinenden Gegenstände in aufrechter Stellung zu zeigen. Um das durch das Objectiv entstandene umgekehrte physische Bild in ein aufrechtes zu verwandeln, reicht es hin, wenn die von ihm ausgehenden Strahlen auf zwei Convexlinsen fallen, welche hinter dem Brennpunkte des Objectivs und vor dem eigentlichen Oculare in geeigneter Stellung angebracht sind, wie diefs der in Fig. 18 dargestellte Gang der Lichtstrahlen zeigt. Die von dem Gegenstande PQ ausgehenden Lichtstrahlen werden von dem Objective so gebrochen, dafs innerhalb der vorderen Brennweite der ersten Convexlinse A das umgekehrte physische Bild qp entsteht. Durch jene Linse würde nun, wie beim astronomischen Fernrohr, wieder ein vergröfsertes, ebenfalls

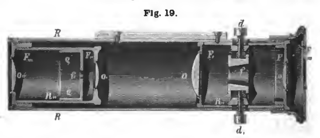
umgekehrtes geometrisches Bild $q_1 p_1$ entstehen, wenn die von qp ausgehenden Strahlen nicht auf die zweite Convexlinse B fielen. Da nun qp weit vor dem vorderen Brennpunkte f des Glases B steht, so bewirkt dasselbe, dafs die Lichtstrahlen, die von $q_1 p_1$ herzukommen scheinen, hinter dem hinteren Brennpunkte f_1 desselben ein von jenem Bilde umgekehrtes, d. h. ein aufrechtes Bild $p_{11} q_{11}$ des Objects erzeugen, welches dem in der gehörigen Sehweite befindlichen Auge, durch das Ocular C, das vergröfserte aufrechte Bild $p_{111} q_{111}$ liefert.

Fig. 18.

§. 56.

Damit aber das im vorigen Paragraph genannte dreifache Ocular nach demselben Principe, wie bei den in den §§. 46 u. f. genannten Doppelocularen ein Bild giebt, welches möglichst achromatisch und frei von sphärischer Abweichung ist, setzt man das terrestrische Ocular aus vier Planconvexlinsen zusammen, von denen, wie Fig. 19 im Verticaldurchschnitte zeigt, die vordern zwei, O_{11} und O_1, ihre Plan-, die hintern zwei, O und o, ihre Convexseite dem Objective zukehren. Das im vorigen Paragraph erwähnte umgekehrte Bild qp (Fig. 18) liegt ebenfalls etwas in der vorderen Brennweite des Glases O_{11}, während das aufrechte $p_{11} q_{11}$ zwischen O und o und zwar etwas in der vorderen Brennweite des Oculars o liegt, woselbst auch die Ocularblendung mit dem Fadenkreuz f angebracht ist. Weil indessen durch den Gang der von dem physischen Bilde qp ausgehenden Lichtstrahlen die Oeffnung der zweiten Linse O_1 eine so kleine sein würde, dafs die

Fig. 19.



Linse nicht bequem einzusetzen ist, so giebt man ihr eine gröfsere Oeffnung und daher auch einen gröfseren Durchmefser, bringt aber vor demselben einen Ring ρρ mit der entsprechenden Oeffnung f_1 an.

Die in den Fafsungen F_{111} und F_{11} sitzenden Linsen O_{11} und O_1 befinden sich in der Röhre R_{11}, welche in die Ocularröhre R eingeschraubt wird. Auch die Fafsungen F_1 und F der Gläser O und o sitzen in einer Röhre R_1, welche in der Ocularröhre verschiebbar ist. F_{1111} stellt den Oculardeckel vor, der mittelst eines Schraubengewindes mit R_1 verbunden ist. Wie beim Huyghens'schen Oculare läfst sich durch die Schrauben dd_1 das Fadenkreuz verstellen, die Ocularröhre selbst aber in der Objectivröhre vor- und zurückschieben. Hinsichtlich der Einstellung auf ein Object gelten auch für diefs terrestrische Ocular die im §. 53 angegebenen Regeln.

E. Das Holländische oder Galilei'sche Fernrohr.

§. 57.

Obgleich untauglich zu Mefsungen in der praktischen Geometrie, findet die Erwähnung dieses Fernrohrs doch darin seine Rechtfertigung, dafs es bei Linienmefsungen oder den damit in Verbindung stehenden Operationen, u. a. bei der Aufsuchung sehr entfernter oder nur undeutlich wahrnehmbarer Signale, zuweilen mit Nutzen angewandt wird. Es enthält aufser der achromatischen oder nichtachromatischen Objectivlinse A in Fig. 20 noch ein biconcaves Ocular B, dessen Zerstreuungsweite kleiner ist, als die Brennweite des Objectivs und zugleich eine solche Stellung hat, dafs das durch das Objectiv hervorgebrachte umgekehrte physische Bild noch aufserhalb der hinteren Zerstreuungsweite des Oculars liegt. Ist nämlich F der hintere Brennpunkt des Objectivs, so würde ohne das Ocular, dessen hinterer Zerstreuungspunkt f ist, von dem Objecte PQ das Bild qp entstehen. Ehe aber die Lichtstrahlen sich in demselben vereinigen, werden sie von dem Oculare aufgefangen und dadurch das geometrische, aber aufrechte Bild $p_1 q_1$ hervorbringen. Aus diesem

Fig. 20.

Grunde gestattet das Fernrohr kein Fadenkreuz und ist deshalb zum Einstellen bei Meſsungen untauglich. Es giebt zwar nur eine schwache Vergröſserung, aber deutliche Bilder. Unter dem Namen **Feldsteeher** wird es in vollkommenem Grade von Plöſsl in Wien geliefert.

F. Das Mikrofkop.

§. 58.

Während die, dem freien Auge unter einem zu kleinen Sehwinkel erseheinenden einzelnen Theile eines entfernten Gegenstandes, mittelst des Fernrohrs unter einem gröſseren Sehwinkel sich zeigen sollten, soll das Mikrofkop von sehr kleinen Objecten, die man wegen der Beschränktheit unseres Accommodationsvermögens dem Auge nicht nahe genug bringen kann, ebenfalls gröſsere Bilder liefern. Man wendet dasselbe vorzugsweise zum Ablesen der Theilungen der eingetheilten Kreisränder an.

Das **einfache Mikrofkop** und die **Loupe** besteht aus einer Biconvexlinse, deren Brennweite aber kleiner ist, als die Sehweite. Beträgt sie 1 bis 2 Zoll, so heiſst das Glas eine Loupe. Zur Erreichung gröſserer Helligkeit und eines gröſseren Gesichtsfeldes wendet man auch wohl 2 Convexlinsen an, die man nahe zusammenstellt.

Fig. 21.

Beim Gebrauche des Mikrofkops muſs das Object innerhalb der vorderen Brennweite sich befinden. Ist in Fig. 21 f der vordere Brennpunkt, PQ der Gegenstand, so entsteht von ihm das vergröſserte, aufrechte aber virtuelle Bild pq, welches von dem hinter dem Glase befindlichen Auge in der Sehweite betrachtet wird.

Da hier $CO = d$, $cO = \Delta = s$, nämlich gleich der Sehweite, so verwandelt sich der Ausdruck der Dioptrik $\frac{1}{b} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\Delta}$, indem hier s negativ ist, in $\frac{1}{b} = \frac{1}{d} - \frac{1}{s}$, oder $\frac{s}{b} + 1 = \frac{s}{d}$; da aber die Vergröſserung v der Linse $= \frac{pc}{PC} = \frac{cO}{CO} = \frac{s}{d}$, so erhält man die Vergröſserung, wenn man den Quotienten der Sehweite und Brennweite der Linse um 1 vermehrt.

Hinsichtlich der Helligkeit des Bildes gilt auch hier der im §. 45, 2 angegebene Ausdruck $H = \frac{D^2}{v^2}$. Bei der nämlichen Glaslinse wird daher die Vergröfserung mit der Sehweite des Auges, und daher auch das Bild sich vergröfsern, wenn sich das Auge vom Glase entfernt, aber es wird dann zugleich die Helligkeit und das Gesichtsfeld der Linse geringer und wegen der auf das Auge fallenden Randstrahlen das Bild farbig, also weniger deutlich sich zeigen.

§. 59.

Beim Ablesen der Theilstriche der Libelle oder der Trommel bei den Schraubenmikrofkopen wendet man die Loupe als Handloupe an, in welchem Falle man sie in eine Fafsung von Horn oder Holz bringt. Meistentheils dient sie aber zu der Bestimmung der Coincidenz der Theilstriche des Limbus und des Verniers. Zu diesem Zwecke bringt man die cylindrische Messingfafsung, so wie auch den Oculardeckel in eine Messingröhre, welche in einer anderen für verschiedene Augen sich verschieben läfst. Letztere steht durch einen Bügel mit dem Arme in Verbindung, der von dem Loupenringe ausgeht. Das untere Ende der Röhre trägt eine Blendung, nämlich einen mit einem Papierstückchen ausgespannten Metallrahmen zur Beleuchtung der Theilstriche.

§. 60.

Das zusammengesetzte Mikrofkop besteht in seiner einfachsten Gestalt aus zwei Convexlinsen, von denen das Objectiv die kleinere ist und zugleich eine viel kleinere Brennweite hat, als das Ocular. Der Gegenstand steht nur etwas aufserhalb der vorderen Brennweite des Objectivs, daher durch dieses, dem Ocular ziemlich nahe, ein physisches, aber umgekehrtes Bild sich erzeugt, welches durch Verschiebung des Oculars in dessen vordere Brennweite gebracht werden kann, und wie beim Fernrohr in ein vergröfsertes, ebenfalls umgekehrtes virtuelles Bild verwandelt wird.

Man wendet das zusammengesetzte Mikrofkop bei den Mefswerkzeugen nur in Verbindung mit der Mikrometerschraube, zur Subdivision der unmittelbaren Theilung der Kreisränder an. Das Objectiv besteht dann aus einer Planconvexlinse, deren Planseite dem Objecte zugekehrt ist; das Ocular ist dabei stets ein zusammengesetztes, ähnlich dem Huyghens'schen Ocular des astronomischen Fernrohrs eingerichtet und wird nach seinem Erfinder das Campani'sche Ocular genannt. Ueber die Construction und nähere Anwendung des zusammengesetzten Mikrofkops vgl. m. §. 69.

IV. Die Glasprismen als Stellvertreter der Spiegel.

§. 61.

Schon im §. 52 ist gezeigt, wie durch das prismatische Ocular die auf das Objectiv des Fernrohrs senkrecht auffallenden Lichtstrahlen eine Ablenkung um 90^0 erfahren und dadurch in eine für gewifse Beobachtungen bequemere Richtung gebracht werden können. In noch ausgedehnterem Mafse wendet man aber die Glasprismen bei den Spiegelinstrumenten an, indem sie, als Stellvertreter der Spiegel, vor diesen den wesentlichen Vorzug haben, dafs sie die Undeutlichkeit des zweiten reflectierten Bildes, welche bei der Anwendung der Glasspiegel mit der Gröfse des zu mefsenden Winkels zunimmt, gänzlich beseitigen. Man bedient sich hierbei meistens nur der normalen dreiseitigen Glasprismen von der Gestalt, dafs der normal auf die Seitenkanten geführte Schnitt ein gleichschenklicht-rechtwinklichtes Dreieck giebt. Auch werden sie allein in der Lage angewandt, dafs die eine der Kathetenebenen als Lichteintrittsebene, die andere als Lichtaustrittsebene, die Hypotenusenebene also als reflectierende Ebene für die totale Reflexion benutzt wird.

Denkt man sich aber verschiedene, von einem Gegenstande oder einem leuchtenden Punkte auf die eine Kathetenebene auffallende Lichtstrahlen, so wird selbst bei denselben Einfallswinkeln das vor der anderen Kathetenebene gedachte Auge des Beobachters eine verschiedene Erscheinung wahrnehmen, je nachdem der zu bestimmten Lichtstrahlen gehörige Einfallspunkt dem spitzen oder rechten Winkel des Durchschnittsdreiecks näher oder entfernter liegt, wie diefs die nachfolgenden Betrachtungen zeigen werden.

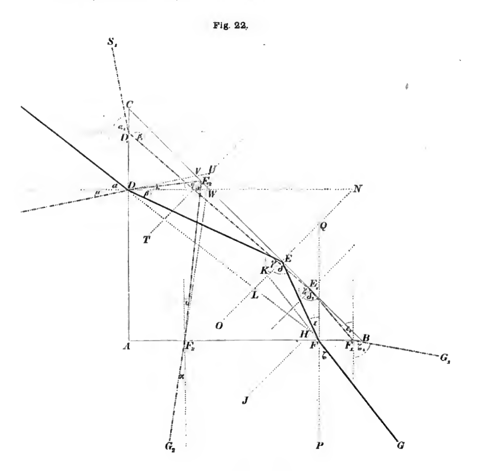
§. 62.

1. Es sei in Fig. 22 ABC der auf den Seitenkanten eines gleichschenklicht-rechtwinklichten Prisma's normale Durchschnitt, so dafs daher AC und AB den Durchschnitt der Kathetenebenen, BC den der Hypotenusenebene bezeichnen. D sei ein in der Kathetenebene AC liegender Einfallspunkt für verschiedene mit dem Durchschnitt ABC parallele Lichtstrahlen, MN das durch ihn gezogene Einfallsloth.

Der Einfallswinkel des dem spitzen Winkel des Prisma's zugekehrten Einfallsstrahls SD sei α, so ist, wenn $\sin\alpha : \sin\beta = n : 1$, DE der den Winkel β einschliefsende gebrochene Strahl. Wird in E das Einfallsloth NO gezogen, so ist $\gamma = N + \beta = 45^0 + \beta$, also, nach den bekannten Gesetzen der totalen Reflexion, γ gröfser als der Gränzwinkel $40^0\,31'$; es findet daher für den Strahl DE in E unter einem Winkel $\delta = \gamma$ eine totale Reflexion nach der Richtung EF auf die zweite

Kathetenebene AB Statt, der dann wieder bei seinem Austritt in die Luft so nach der Richtung FG gebrochen wird, dafs, wenn man durch F das Einfallsloth PQ zieht, $\sin\zeta = n \sin\varepsilon$ ist. Da nun auch $\delta = 45^0 + \varepsilon$, so ist $\varepsilon = \beta$ und daher auch $\zeta = \alpha$.

Fig. 22.



Verlängert man den zum zweiten Male gebrochenen Strahl FG über F hinaus, bis er von der Verlängerung des Einfallsstrahls SD in H geschnitten wird, so drückt der Winkel SHG den Ablenkungswinkel beider Strahlen aus. Zieht man HJ parallel mit ON und verlängert GH bis K, so ist

$$SLO = \gamma + \alpha - \beta,$$
$$OKG = \delta + \zeta - \varepsilon,$$

folglich $SLO + OKG = SHG = 45^0 + \beta + 45^0 + \varepsilon + \alpha + \zeta - \beta - \varepsilon$,
oder der Ablenkungswinkel $SHG = A = 90^0 + 2\alpha$.

Es folgt hieraus noch, dafs wenn $\alpha = 45^0$ ist, auch $\zeta = 45^0$ sein mufs, d. h. das mit der Hypotenusenebene in D parallel auffallende Licht wird auch nach der zweiten Brechung parallel mit derselben Ebene austreten.

2. Ebenso wird für den Einfallsstrahl $S_1 D_1$, der mit dem durch D_1 gehenden Einfallslothe einen Einfallswinkel α_1 von fast 90^0 bildet, $D_1 E_1 F_1 G_1$ den Weg des durch das Prisma abgelenkten Lichts darstellen.

Wächst nun der Einfallswinkel α_1 bis zu 90^0, so wird β_1 zum Gränzwinkel; es werden daher dann auch γ_1 und δ_1 ihre Maximalwerthe erhalten und das mit der Kathetenebene CA einfallende Licht, wenn dasselbe bei D_1 in das Prisma eindringen könnte, den Weg $D_1 E_1 F_1 B$ nehmen, d. h. parallel mit der Kathetenebene AB sich von F_1 ab fortbewegen; da aber die Intensität des Lichts in diesem Falle $= 0$ ist, so wird das in der Verlängerung von AB befindliche Auge überall keine Lichterscheinung wahrnehmen.

3. Denkt man sich nun ferner von D, oder von jedem anderen Punkte der Kathete CA, in dem Prisma einen Strahl DE_2 gezogen, der mit dem in E_2 gezogenen Einfallslothe TU einen Winkel $\eta = 40^0\,31'$ bildet, so wird auch dieser wieder unter demselben Winkel ϑ bis zur Kathetenebene AB nach F_2 total reflectiert, hier aber, wenn $\sin \varkappa = n \sin \iota$ ist, nach G_2 zum zweiten Male gebrochen werden. Weil nun, da $\chi = 45^0$ ist,

$$45^0 = \eta + \lambda, \text{ oder } \eta = 45^0 - \lambda \text{ ist,}$$

so wird $\lambda = 4^0\,29'$ und, bei dem Brechungsexponenten $\frac{1539}{1000}$, der zum gebrochenen Strahle $D_1 E_2$ gehörige Einfallsstrahl $S_2 D_1$ unter dem Winkel $\mu = 6^0\,54'$ auf der negativen oder entgegengesetzten Seite des Einfallslothes liegen, auf welcher die vorhin betrachteten Einfallsstrahlen angenommen wurden, so dafs demnach für jedes beliebige Einfallsloth, welches in der Brechungsebene eines gleichschenklicht-rechtwinklichten Glasprisma's auf dessen Eintrittsebene errichtet wird, innerhalb des Raumes von 90^0 bis $-6^0\,54'$ eine totale Reflexion der auffallenden Lichtstrahlen Statt findet. Da nun ferner $\vartheta = \eta$, so ist auch wieder $\iota = \lambda$ und $\varkappa = \mu$.

Verlängert man den Einfallsstrahl $S_2 D$, bis er den verlängerten gebrochenen Strahl $G_2 F_2$ in U schneidet, so ist der Ablenkungswinkel A_1 derselben $S_2 U G_2$. Es ist aber

$$D\,U\,T = \gamma_1 - (\mu - \lambda)$$
$$= 45^0 - \lambda - \mu + \lambda = 45^0 - \mu,$$

folglich $A_1 = 90^0 - 2\mu$.

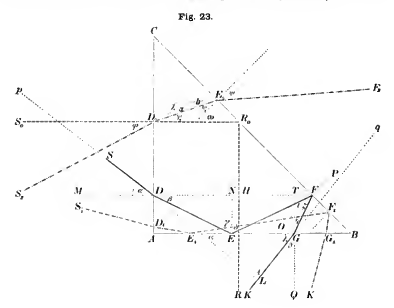
Es ist daher die Ablenkung aller auf die eine Kathetenebene innerhalb des Raums von 90^0 bis $-6^0\,54'$ auffallenden Lichtstrahlen, welche eine einmalige totale Reflexion und eine zweimalige Brechung erleiden, wenn der Einfallswinkel des Einfallsstrahls $= \alpha$ ist, $A = 90^0 \pm 2\,\alpha$.

4. Verlängert man den Einfallsstrahl $S_2 D$ bis zur Hypotenusenebene in V, und ist der daselbst gebildete Winkel $S_2 V C = \lambda$, so ist, da $S_2 D C = G_2 F_2 B = \lambda + 45^0$ und $G_2 W B = G_2 F_2 B - 45^0$, $G_2 W C = 180^0 - G_2 W B = 180^0 - \lambda$, d. h. der Winkel, welchen ein Einfallsstrahl innerhalb der totalen Reflexionsgränze mit der Hypotenusenebene einschliefst, ist das Supplement des Winkels, welchen der zum zweiten Male gebrochene Strahl mit derselben bildet. Da nun nach dem Vorhergehenden der Gränzwerth von $\mu = 6^0\,54'$ beträgt, so ist der von $\lambda = 51^0\,56'$ und daher sein Supplementarwerth $128^0\,4'$.

§. 63.

1. Ist in Fig. 23 für einen beliebigen Einfallspunkt D_0 der Einfallswinkel $\alpha = 0$, d. h. fällt ein Lichtstrahl $S_0 D_0$ normal auf die eine Kathetenebene, so ist auch der zugehörige Brechungswinkel $\beta = o$, d. h.

Fig. 23.



er wird ungebrochen bis zum Punkte R_0 der Hypotenusenebene fortgehen, folglich auch die andere Kathetenebene AB in der Richtung $R_0 R$ normal treffen und in derselben Richtung aus derselben austreten, so dafs die Gröfse der Ablenkung $= 90^0$ ist, welches auch mit dem Ausdrucke des vorigen Paragraphen $A = 90^0 \pm 2\alpha$ übereinstimmt.

2. Dieselbe Gröfse der Ablenkung zeigen aber auch noch solche auf die eine Kathetenebene fallende Lichtstrahlen, welche nach einer zweimaligen Reflexion von der anderen Katheten- und Hypotenusenebene und einer nochmaligen Brechung an der letzteren Kathetenebene wieder austreten.

Es sei zur Bestimmung der Lage des Gränzeinfallsstrahls SD ein, vorerst unter einem beliebigen Winkel α einfallender Lichtstrahl; ist $\sin\alpha = n \sin\beta$ und $NDE = \beta$, so bezeichnet DE den zugehörigen gebrochenen Strahl, welcher mit dem in E errichteten Einfallslothe den Winkel γ bildet. Da $\gamma = 90^0 - = \beta$, β aber nicht gröfser als $40^0\,31'$ sein kann, so ist γ gröfser als der Gränzwinkel und daher, wenn $\delta = \gamma$ ist, eine totale Reflexion nach der Hypotenusenebene in der Richtung EF möglich. Mit dem in F errichteten Einfallslothe OP bildet EF den Winkel ε; es kann also nur dann von einer totalen Reflexion des Strahles EF in der Richtung FG nach der Kathetenebene AB unter dem Winkel $\zeta = \varepsilon$ die Rede sein, wenn ε mindestens dem Gränzwinkel $40^0\,31'$ gleich ist. Zieht man durch F mit AB die Parallele FH, so folgt, dafs, da $\varepsilon = 45^0 - \beta$ ist, β höchstens $4^0\,29'$, und, da $\sin\alpha = \frac{1539}{1000} \sin\beta$ ist, dafs α höchstens $6^0\,54'$ betragen kann. Bildet nun FG mit dem durch G gezogenen Einfallslothe QT den Winkel γ_1, so wird, da $\gamma_1 + \zeta = 45^0$, also $\zeta = 45^0 - \gamma_1$ und $\varepsilon = \zeta$ ist, auch $\gamma_1 = \beta$ und daher auch, wenn $\sin\vartheta = n \sin\gamma_1$ ist, GK der zum zweiten Male gebrochene Strahl und mithin auch $\vartheta = \alpha$ sein. Wird demnach ε gröfser, so wird β und deshalb auch α abnehmen, so dafs der einfallende Strahl nur zwischen $+ 6^0\,54'$ und 0^0 liegen kann.

Werden die Winkel ε und ζ dem Gränzwinkel $40^0\,31'$ gleich gemacht, so zeigt der gebrochene Linienzug $S_1\,D_1\,E_1\,F_1\,G_1\,K_1$ den Gang der vom Objecte S_1 herkommenden zwei Mal total reflectierten und zwei Mal gebrochenen Strahlen.

Um die Gröfse des Ablenkungswinkels des Einfallsstrahls SD mit dem zum zweiten Male gebrochenen Strahle GK zu bestimmen, verlängere man SD bis L in GK, so ist der Nebenwinkel des Ablenkungswinkels

$$A = \lambda + \alpha = 90^0 - \alpha + \alpha = 90^0,$$

so dafs daher dem in L befindlichen Auge, die in den Richtungen DS und KG liegenden Objecte p und q unter einem rechten Winkel erscheinen.

Die optischen Bilder von Objecten, welche durch eine zweimalige Brechung und eine zweimalige Reflexion in einem Glasprisma mit gleichschenklicht-rechtwinklichtem Querschnitt entstehen, unterscheiden sich daher in zweifacher Hinsicht von solchen, die durch eine zweimalige Brechung und eine einmalige totale Reflexion sich erzeugen. Wegen des kleinen Auffallraums wird, in Bezug auf die ersteren Bilder, nur eine geringere Lichtmenge zur Erzeugung des Bildes verbraucht und dieselbe durch Zerstreuung noch vermindert, sobald die zweite Reflexion von der Hypotenusenebene keine totale sein kann, daher die Bilder viel dunkler und zwar um so dunkler erscheinen, je mehr die zweite Reflexion von der totalen abweicht. Und da ferner der Ablenkungswinkel A, unabhängig von dem Einfallswinkel, immer einerlei Gröfse, nämlich 90^0 hat, so wird das Bild des Objects p, so lange das Auge auf denselben Gegenstand q gerichtet ist, bei einer Drehung des Prisma's um die Kathete AC, stillstehen, eine Eigenschaft, wodurch sich die hier in Rede stehenden Bilder sogleich von den früher betrachteten wesentlich unterscheiden, bei welchen eine Drehung des Prisma's auch eine Drehung der Bilder zur Folge haben mufs.

Anmerkung. Auf die Eigenthümlichkeit der hier in Rede stehenden Bilder hat, soviel mir bekannt, Bauernfeind in einem Werkchen „Das Prismenkreuz" zuerst aufmerksam gemacht und dieselbe bei dem von ihm construierten, mit demselben Namen belegten kleinen Mefsapparat mit zum Grunde gelegt (§. 167). Man vgl. noch über andere in Prismen vorkommende Reflexionen eine Abhandlung von E. Reusch über die Brechung des Lichts in Prismen mit Rücksicht auf mehrere innere Reflexionen in Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Band 93.

§. 64.

Denkt man sich durch einen beliebigen Punkt D_0 der Kathetenebene CA eine Ebene, parallel der anderen Kathetenebene gelegt, wodurch der Lichteinfallsraum in den oberen, positiven uud den unteren, negativen zerfällt, so findet nach den vorigen Paragraphen für alle Lichtstrahlen, welche zwischen $-6^0 54'$ und $+90^0$ liegen, dann eine zweimalige Brechung und eine totale Reflexion, für Lichtstrahlen zwischen 0^0 und $+90^0$ aber dann eine zweimalige Brechung und eine zweimalige Reflexion von der Hypotenusenebene Statt, wenn der zuerst gebrochene Strahl im ersten Fall die Hypotenusen-, im anderen die andere Kathetenebene trifft. Unter diesen Umständen wird auch für die im positiven Raume zwischen 0^0 und $+6^0 54'$ liegenden Lichtstrahlen die Reflexion sich in eine totale verwandeln. Für alle übrigen Lichtstrahlen des negativen Raums aber wird nur die Erscheinung der zweimaligen Brechung des Lichts sich zeigen, die aber bei den Spiegelwerkzeugen nicht weiter in Betracht kommt.

Ist nun ein solcher Lichtstrahl in Fig. 23 $S_2 D_0$, welcher mit dem Einfallslothe $S_0 R_0$ den Einfallswinkel φ bildet, so wird derselbe in dem Glase, wenn $\sin\varphi = n \sin\varphi_1$ ist, in der Richtung $D_0 F_2$ gebrochen und wenn $\sin\psi = n \sin\psi_1$ ist, in E_2 beim Austritt in die Luft, die Richtung $E_2 F_2$ annehmen. Verlängert man $S_2 D_0$ und $F_2 E_2$, bis sie sich schneiden, so bezeichnet der Winkel χ die Gröfse der Ablenkung des Einfallsstrahls mit dem zum zweiten Male gebrochenen Strahle. Es ist aber

$$\chi = a + b = (\varphi - \varphi_1) + (\psi - \psi_1),$$

oder da

$$\omega = 45^0 = \varphi_1 + \psi \quad \text{ist,}$$

$$\chi = \varphi + \psi - 45^0.$$

§. 65.

Als ein besonderer Fall kann noch der angegeben werden, wenn $C = o$ ist, d. h. wenn das Glasprisma sich in eine Glastafel mit parallelen Gränzebenen verwandelt. Dann ist in Bezug auf die Lage der Winkelschenkel beim Prisma $\psi_1 = -\varphi_1$ und daher auch $\psi = -\varphi$, mithin $\chi = o$, d. h. der zum zweiten Male gebrochene Strahl $E_2 F_2$ ist dem Einfallsstrahle $S_2 D_0$ parallel. Bei Plangläsern mit parallelen Ebenen wird man demnach alle Gegenstände, deren Lichtstrahlen nicht zu schief auffallen, um so mehr gerade so sehen, als ob kein Glas da wäre, je dünner dieselben sind; nur wenn man in sehr schiefer Richtung durch solche Gläser sieht, erscheinen die Objecte etwas seitwärts gerückt.

V. Vorrichtungen zur Bestimmung kleinerer Theile der eingetheilten Kreisränder.

A. Der Vernier oder Nonius *).

§. 66.

Der Vernier hat den Zweck, von den auf den Kreisen der Winkelmefser oder den geradlinichten Mafsstäben befindlichen Theilungen noch kleinere Theile ablesen zu können, da durch die Dicke der Theilstriche und ihre Entfernung von einander der unmittelbaren Theilung immer eine gewifse Gränze gesteckt ist, die nicht überschritten werden kann. Er besteht bei der Kreistheilung, auf welche hier, als bei weitem am

*) Diese Vorrichtung wurde von dem Niederländer Peter Werner (Pierre Vernier) 1631 erfunden, daher sie eigentlich den ersten Namen führen mufs, während 1542 ein Portugiese Pedro Nunnez (Nonius) eine nach dem Princip der Kreistransversalen ausgeführte Ablesung kleinerer Theile der Limbustheilung zur Anwendung brachte.

häufigsten an geometrischen Instrumenten vorkommend, nur Bezug genommen werden soll, aus einem mit der Limbustheilung sich concentrisch bewegenden Bogenstück, dessen Länge, der Summe von n Theilen des Limbus gleich, entweder in $n+1$, oder in $n-1$ gleiche Theile getheilt ist. Erstere Einrichtung wird deshalb auch der Vernier mit der $n+1$ Theilung, letztere der Vernier mit der $n-1$ Theilung genannt. Bei den eingetheilten Kreisen kommt nur die erstere Art in Anwendung, während man sich der letzteren bei einigen geradlinigten Eintheilungen, insbesondere bei den Barometerscalen bedient.

Es sei l die Gröfse eines Theils des Limbus, $n\,l$ die Länge des Verniers, die in $n+1$ gleiche Theile getheilt ist; die Gröfse eines Theiles desselben v ist also $= \frac{n\,l}{n+1}$ und daher $l - v = \delta = l - \frac{l\,n}{n+1} = \frac{l}{n+1}$. Man nennt den Zahlenwerth für δ die Angabe des Verniers.

Fällt demnach der Nullpunkt des Verniers, oder wie er auch genannt wird, der Index der Theilung mit einem Theilstriche ω des Limbus zusammen, so wird auch der $n+1$ste des Verniers mit dem $n$ten des Limbus coincidiren und es weicht demnach der mit 1, 2, 3, ... n bezeichnete Strich des Verniers von dem in derselben Richtung auf ihn folgenden Striche des Limbus beziehungsweise um δ, $2\,\delta$, $3\,\delta$ ..... $n\,\delta$ ab. Würde nun der Vernier nach der mit den wachsenden Ziffern der Theilung bezeichneten Richtung an dem Limbus so fortgeschoben, dafs der mit 1. 2. 3. ..... n bezeichnete Strich des Verniers mit irgend einem Theilstriche des Limbus zusammenfiele, so würde der Index, der vor der Verschiebung mit dem Theile ω coincidierte, von ω beziehungsweise um δ, $2\,\delta$, $3\,\delta$ ..... $n\,\delta$ abstehen, wodurch offenbar die Möglichkeit der Ablesung kleinerer Theile der Limbustheile ausgesprochen ist.

Bezeichnet nun Ω den s. g. Nullpunkt des Limbus, gegen welchen bei der Einstellung des Fernrohrs auf irgend ein Richtobject der Ort des Indexpunktes 0 des Verniers bestimmt werden soll, so finden hinsichtlich der Lage desselben gegen einen Punkt ω der Limbustheilung, der um p Limbusstriche von Ω absteht, folgende 3 Fälle Statt.

1. Es fällt 0 mit ω genau zusammen. In diesem Falle ist der Ort des Index oder die Ablesung des Verniers $= p\,.\,l$, welchen Werth daher die, wenn auch nicht immer beigesetzte, aber doch leicht zu bestimmende Ziffer der Limbustheilung unmittelbar giebt.

2. Es fällt 0 über ω hinaus, liegt also zwischen ω und $\omega+1$. Coincidiert nun unter dieser Voraussetzung

a) irgend einer der übrigen Striche des Verniers, z. B. der $q$te nach 0 mit einem Theilstriche des Limbus, so ist der Ort des Index auf demselben durch $p\,.\,l + q\,.\,\delta$ dargestellt. Trifft aber auch

b) diese Annahme, wie es sehr häufig der Fall sein wird, nicht zu, sondern findet die Coincidenz weder bei dem $q$ten, noch dem $r$ten Striche nach 0 Statt (wenn r den unmittelbar auf q folgenden Strich des Verniers bezeichnet), so kann der Werth, welchen man dem vorigen Orte $p.l + q.\delta$ noch zusetzen mufs, nur durch Schätzung bestimmt werden, indem man die Gröfse der Differenzen x und y mit einander vergleicht, welche sich beziehungsweise bei dem $q$ten und $r$ten Striche des Verniers gegen die auf einander folgenden Theilstriche des Limbus zeigen. Ist nun z. B. $y = m\,x$, so wird, da $x + y$ immer $= \delta$ ist, $x + m\,x = \delta$, also $x = \frac{\delta}{m+1}$, mithin der Ort des Index durch $p.l + q.\delta + \frac{\delta}{m+1}$ bezeichnet.

Wäre z. B. bei einem in Sechstelgrade eingetheilten Limbus, dessen Vernier unmittelbar 10 Sekunden $= \delta$ angiebt, bei welchem daher nach dem Obigen 59 Sechstelgrade in 60 gleiche Theile getheilt sind, ω dem 40sten Striche nach Ω gleich, also $= 6^0\,40'$ und wären für den 8ten und 9ten Strich nach dem Index 0 beziehungsweise $x = 1$ und $y = 2$, so würde der Ort des Index $= 6^0\,40' + 8.10'' + 3'', 33 \ldots = 6^0\,41'\,23'', 33 \ldots$

Um nun bei der Bestimmung des Orts des Indexpunktes auf dem Limbus, sowohl die Zählung von p und q, als auch die Multiplication des p mit l, und des q mit δ zu vermeiden, ist nicht nur die Zahl der Limbusstriche vom Punkte Ω an, durch verschiedene Längen und beigesetzte Ziffern leichter zählbar gemacht, sondern es sind auch den auf dieselbe Weise ausgeführten Theilstrichen des Verniers diejenigen Ziffern beigesetzt, welche die aliquoten Theile der Gröfse l darstellen. So ist z. B. für die oben erwähnte Eintheilung der 2te, 4te und 6te Strich nach 0 länger, als der 1te, 3te und 5te, und auf dem Vernier der 6te, 12te, 18te .... Strich nach 0 mit den Ziffern 1, 2, 3 ... bezeichnet, da sie beziehungsweise 1, 2, 3 Minuten darstellen, während dieselben Ziffern auf dem Limbus dann Grade bezeichnen. Durch diese Einrichtung wird daher die Ablesung wesentlich erleichtert.

§. 67.

1. Für den Fall 1 oder 2 a des vorigen Paragraphs ist aber noch zu bemerken, dafs wenn man die Coincidenz zweier Striche gefunden zu haben glaubt, man nie unterlafsen darf, die Gleichheit der Differenzen der vorhergehenden und nachfolgenden Striche mit denen der anderen Theilung zu beurtheilen, indem nur bei diesem Thatbestande, falls das durch die Loupe sehende Auge die richtige Stellung eingenommen hat, auf die Coincidenz geschlofsen werden darf. Deshalb müfsen auch an den Enden des Verniers über 0 und die obige Zahl

$n+1$ hinaus, noch einige Striche angegeben sein, welche man Ueberstriche oder den Excedeuz des Verniers zu nennen pflegt.

2. Obgleich nun im Allgemeinen aus §. 66 folgt, dafs wenn man die Zahl n oder $n+1$ nur grofs genug wählt, man so kleine Theile der Limbustheilung mittelst des Verniers ablesen kann, als man nur verlangt: so darf doch auch nicht übersehen werden, dafs man jene Zahlen immer so zu wählen hat, dafs δ nicht nur als ganze Zahl, sondern zugleich $q.\delta$ immer als aliquoter Theil von l erscheint, so wie auch, dafs die Theilstriche des Verniers nur so eng gegeneinander und gegen die Limbustheilung stehen dürfen, dafs immer nur einer derselben, nie aber zwei benachbarte zugleich eine Coincidenz erkennen lafsen.

3. Will man umgekehrt angehen, wie viel Theile des Limbus auf dem Vernier in $n+1$ gleiche Theile getheilt werden müfsen, um eine geforderte Angabe des Verniers zu erhalten, so dient dazu der aus §. 66 folgende Ausdruck $n+1=\frac{l}{\delta}$.

§. 68.

Eine zweite Einrichtung des Verniers besteht, wie schon im §. 66 bemerkt wurde, darin, dafs n Theile des Limbus oder eines Mafsstabes nicht in $n+1$, sondern in $n-1$ gleiche Theile getheilt werden, so dafs also $v>l$ ist und deshalb die Zahlen der Theilstriche des Verniers hier in umgekehrter Ordnung gegen die auf dem Mafsstabe geschrieben werden müfsen. Man erhält wie im §. 66, da $v=\frac{n.l}{n-1}$ ist,

$$v-l=\delta=\frac{l}{n-1}.$$

Der Gebrauch eines solchen Verniers, den man dann mit Vortheil anwendet, wenn wegen Mangels an Raum die Theilung des Mafsstabes nicht um die Länge des Verniers, wie es bei der im §. 66 beschriebenen Einrichtung erforderlich wäre, über ihren Endpunkt hinaus verlängert werden kann, und der vorzugsweise bei den Scalen der Barometer zu Höhenmefsungen seine Anwendung findet, ist übrigens der nämliche, wie der bei dem Vernier mit der $n+1$ Theilung.

B. Das Schraubenmikrofkop.

§. 69.

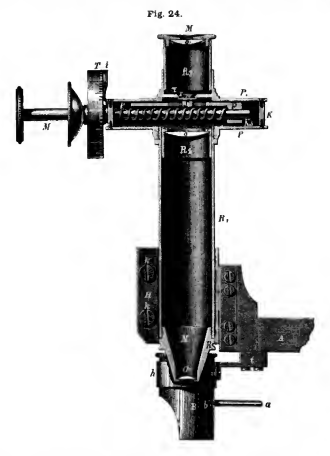
Zur Bestimmung kleinerer Theile der Limbustheilung wendet man in neuerer Zeit auch bei geodätischen Werkzeugen, wie es bei den astronomischen Meridian- und Verticalkreisen u. s. w. schon länger üblich war, statt der Verniere zusammengesetzte Mikrofkope mit eigent-

lichen Mikrometerschrauben (§. 19. 5) an und nennt deshalb diese Vorrichtungen Schraubenmikrofkope. Man erhält dadurch den bedeutenden Vortheil, den eingetheilten Kreisen kleinere Dimensionen geben zu können. Die Art der Verbindung derselben mit dem Mefswerkzeuge kann folgende sein. Von dem Mittelstück des Untertheils der Stütze des Fernrohrs gehen zwei oder vier Arme aus (der Mikrofkopenträger, das Mikrofkopenkreuz), in dem ersten Falle diametral gegenüberstehend, in dem andern sich rechtwinklicht kreuzend, deren Enden eine aufgeschlitzte Hülse zur Aufnahme des Mikrofkops tragen, welches in jener bewegt und durch Klemmschrauben so befestigt werden kann, dafs die Theilstriche des Limbus in möglichster Reinheit gesehen werden können. Mit dem Mikrofkope ist ein parallelepipedischer Kasten verbunden, der die Mikrometerschraube mit dem beweglichen Fadenkreuze enthält. Die Gröfse der Umdrehung derselben kann an dem 60 gleiche Theile enthaltenden Schraubenkopfe (der Trommel) mittelst eines Index abgelesen werden. Der Werth eines solchen Theiles im Bogenmafs ist, wie nachher gezeigt wird, genau zu bestimmen. Der Nullpunkt der Trommel, oder der ihm zugehörige Ort des Fadenkreuzes, entspricht dann dem Indexpunkte des Verniers. Indem man nun dem Mikrofkope in seiner Hülse diejenige Stellung giebt, dafs durch das Anziehen der Mikrometerschraube wachsende Zahlenwerthe der Trommeltheile durchlaufen werden, zugleich aber das Fadenkreuz nach dem nächstniedrigeren Theilstriche ω (§. 66) des Limbus sich bewegt, so ergiebt sich, dafs man nach dem Einstellen des Fernrohrs auf ein bestimmtes Object durch die erwähnte Drehung der Mikrometerschraube den Ort des Fadenkreuzes, oder seinen Abstand vom erwähnten Theilstriche ω, im Bogenmafse auf dieselbe Weise bestimmen kann, wie diefs der Vernier durch die Coincidenz zweier Theilstriche angab. Um aber zugleich den Ort des Fadenkreuzes gegen den Nullpunkt der Limbustheilung (dem Abstande $\Omega\omega$ des §. 66 entsprechend) zu erhalten, bewegt sich mit dem Mikrofkopenträger zugleich ein Arm mit einem Vernier oder Indexstrich als Alhidade, der die abgeschnittenen Grade und Gradtheile bis zum Theilstriche ω angiebt.

In Fig. 24, welche den Verticaldurchschnitt des Schraubenmikrofkops darstellt, bezeichnet O das Objectiv des Mikrofkops MM, dessen Fafsungsröhre R in das Rohr R_1 eingeschraubt ist; letzteres nimmt auch die Hülse R_2 des Collectivglases o auf und ist durch ein Schraubengewinde in dem cylindrischen Ansatz der Bodenplatte p des Fadenkreuzkastens K befestigt. Der cylindrische Ansatz der Deckplatte p_1 desselben nimmt die Ocularröhre R_3 auf, die in jenem verschiebbar ist. Nachdem man dem Mikrofkop in der Hülse H, welche in der Verlängerung des Armes A vom Mikrofkopenträger angebracht ist, die richtige

Stellung gegeben hat, dafs die Theilstriche des Limbus rein und deutlich erscheinen, wird dasselbe durch Klemmschrauben *k k* in der Hülse befestigt. An der Unterfläche des Arms ist der Träger *t* des Ringes *h* mittelst Schrauben befestigt, welcher letztere den seitlich ausgeschnittenen und in seiner Innenfläche mit Gyps bekleideten Blendrahmen *B*

Fig. 24.

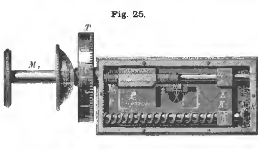


aufnimmt; dieser kann mittelst des cylindrischen Armes *a* zugleich so gedreht werden, dafs das auf die sphärisch ausgehöhlte Gypsfläche *b* fallende Licht die Limbustheilung gehörig beleuchtet.

Fig. 25 stellt den Horizontaldurchschnitt des Fadenkreuzkastens nebst Mikrometerschraube M_1, bei Weglafsung der Bodenplatte *p*, von

unten gesehen, dar, während in Fig. 24 nur die hintere Hälfte desselben mit dem Kopf der Mikrometerschraube dargestellt ist. Der in dem Kasten unterhalb und nach der Längsrichtung der Deckplatte p_1 zu bewegende Theil ist die Fadenkreuz- oder Schieberplatte P, welche an der einen Längsseite zwei Klötze K_1 und K_2 zur Mutter und zur Führung der Mikrometerschraube, an der anderen einen würfelförmigen Klotz K_3 zur Aufnahme des von einer Spiralfeder umwundenen Führungsstifts F trägt, um der Platte P durch Umdrehung der Mikrometerschraube eine möglichst gleichförmige Bewegung ertheilen zu können, während letztere in der Hinterwand des Kastens ihren Stützpunkt hat. In ihrer Mitte ist die Platte rechteckig ausgeschnitten und enthält auf ihrer oberen Ebene das ausgespannte Fadenkreuz f. Zur Ersparung des Zählens der Umdrehungen der Mikrometerschraube ist unterhalb der Platte π, in welcher die Oeffnung der Ocularblendung ausgeschnitten ist, ein Rechen r mit 9—11 Zähnen befestigt, längs welchem ein kleines mit seiner Spitze auf den Kreuzungspunkt weisendes Stiftchen, das in einem mit der Platte P verbundenen Klötzchen steckt, von einem Zahn zum andern sich fortschiebt und dadurch die Umdrehungen der Schraube erkennen läfst. T endlich bezeichnet die in 60 gleiche Theile getheilte Trommel, deren Indexplatte i (Fig. 24) an der einen kurzen Seitenwand des Kastens befestigt ist.

Fig. 25.



Ueber andere Constructionen des Schraubenmikrofkops vergl. m. H. g. I. S. 83 u. f.

Bestimmung des Werthes eines Trommeltheiles im Bogenmafs und Ablesung des Schraubenmikrofkops.

§. 70.

Wenn auch den Gewinden der Mikrometerschrauben im Allgemeinen eine solche Höhe gegeben wird, dafs eine bestimmte Anzahl von Umdrehungen der Trommel dem Abstande zweier Theilstriche des eingetheilten Kreises entspricht: so darf doch nicht angenommen werden, dafs jene Höhe bei jeder der Schrauben genau dieselbe ist. Es ist deshalb für jede einzelne Schraube der Werth eines Theiles der Trommel genau zu ermitteln.

Jedes der Schraubenmikrofkope hat in seiner Hülse eine solche Stellung, dafs beim Anziehen der Schraube und beim Bewegen des Fadenkreuzes nach dem nächst niedrigeren Theilstriche der Kreistheilung wachsende Werthe der Trommel sich ergeben. Geht die Kreistheilung, vom Einstellungsorte aus betrachtet, von Rechts nach Links in wachsender Bezifferung fort, so wird, wie beim Vernier, der Abstand des Ortes des Index vom zunächst rechtsliegenden Theilstriche zu bestimmen sein; wegen der Umkehrung der Bilder durch das Mikrofkop aber wird der Beobachter den Abstand des Index vom zunächst linksliegenden (niedrigeren) Theilstriche zu bestimmen haben.

Zu der in Rede stehenden Bestimmung werde ein Kreis vorausgesetzt, der von 10 zu 10 Minuten getheilt ist und für diefs Intervall gebe das Schraubenmikrofkop nahe 2 Umdrehungen, mithin ein Trommeltheil nahe 5 Sekunden an. Man bringe nun durch Lösen der Mikrometerschraube das Fadenkreuz auf den Theilstrich rechts, dann durch Anziehen derselben auf den Theilstrich links und lese in beiden Fällen den Stand des Index der Trommel ab, so erhält man, da bei der zweiten Drehung die Trommeltheilung wächst, wenn man von der zweiten Ablesung die erste abzieht, die Anzahl der Trommeltheile, welche dem Intervall von 10 Minuten entsprechen und daraus also auch den Werth eines Trommeltheils in Sekunden. Es gebe z. B. die erste Ablesung 18,3, die zweite 20,6, so entsprechen 10 Minuten oder 600 Sekunden $2\frac{2,3}{60}$ Umdrehungen oder 122,3 Trommeltheilen, mithin ist 1 Trommeltheil $= \frac{600}{122,3} = 4,906$ Sekunden. Hätte dagegen umgekehrt

die erste Ablesung 20,6
die zweite „ 18,3

betragen, so würden 600 Sekunden $1\frac{57,7}{60}$ Umdrehungen oder 117,7 Trommeltheilen, also 1 Trommeltheil 5,097 Sekunden, entsprechen. Auf diese Weise kann man sich daher den Werth eines Trommeltheils an jeder beliebigen Stelle des Limbus, einer bestimmten Einstellung des Fernrohrs entsprechend, verschaffen, wodurch gerade die mikrofkopische Ablesung eine gröfsere Genauigkeit gewährt, als die durch Verniers. Stellt man aber solche Beobachtungen durch die ganze Kreisperipherie von 10 zu 10 Graden an, so kann man sich dadurch den Mittelwerth für den ganzen Umkreis verschaffen und dann leicht den einer bestimmten Einstellung des Fernrohres zugehörigen Winkelwerth bestimmen, welchen man der am Index der Alhidade gemachten Ablesung der Kreistheilung zuzusetzen hat.

VI. Das Stativ*) als feste Unterlage der Winkelmeßer.

§. 71.

Bei gröfseren Winkelmefsern bildet wohl ein auf einem festen Fundamente ruhender Quader, oder ein, mit einer Platte bedecktes, solides Mauerwerk, oder ein oben geebneter, abgeschnittener Baumstamm u. dgl. eine feste Unterlage. Hier aber sollen nur die dazu eigens angefertigten Apparate betrachtet werden, welche man Stative nennt. Wenn auch in Rücksicht auf die Beschaffenheit und Gröfse der Mefswerkzeuge, in verschiedener Form und Gröfse ausgeführt, kann man doch den oberen, die eigentliche Grundlage des Mefswerkzeugs bildenden Theil, den Kopf, von den drei Füfsen desselben unterscheiden, deren untere Enden in den Erdboden kommen und zugleich eine bequeme Höhe zum Beobachten möglich machen sollen. Ersterer ist entweder von Holz oder Metall, letztere dagegen sind von Holz verfertigt.

A. Das Scheibenstativ.

§. 72.

Bei diesem hat der, meistens hölzerne Kopf, von verschiedener Gröfse und Dicke, entweder eine rein cylindrische oder eine ausgeschweift cylindrische Gestalt und in der Mitte meistens eine Oeffnung von mehreren Zollen. Bei der ersteren Form enthält seine untere Fläche drei Pfannen zur Aufnahme der abgerundeten oberen Enden der Füfse, welche um eingesteckte Metallachsen, die parallel mit der Kopffläche liegen, sich bewegen und dadurch sich zusammenlegen oder auseinanderschlagen lafsen. Zur Verbindung jedes Fufses mit dem Kopfe dient eine, die Achse theilweise umschliefsende Metallscheibe, deren cylindrische Verlängerung nach Oben in Schraubengewinde ausläuft und durch deren Mutter, welche entweder frei auf dem Kopfe oder versenkt in demselben liegt, der Fufs mehr oder weniger fest angezogen werden kann. So befestigte Füfse sind immer massiv und das Stativ dient dann nur gröfseren, gewichtigeren Mefswerkzeugen zur Unterlage. An dem unteren Ende tragen die Füfse einen Metallschuh und etwas höher einen Vorsprung zum bequemeren Niederdrücken in den Boden.

Um das Stativ bei derselben Stabilität möglichst zu erleichtern, besteht bei einer andern Construction jeder Fufs aus zwei hinlänglich starken Platten, welche durch zwischenliegende Sprossen leiterartig mit einander verbunden sind und Unten zu einem Stück sich vereinigen, welches den Schuh trägt. Die Platten legen sich an die vorspringenden

*) Von stativus, feststehend.

Theile des ausgeschweiften Kopfes, welche wieder die Achse aufnehmen, an deren einem Ende dann seitlich die Flügelmutter angebracht ist. Um das Aufstellen des Mefswerkzeugs in eine bequeme Höhe noch mehr zu erleichtern, enthält der Stativkopf nach Unten noch einen cylindrischen prismatisch durchlöcherten Fortsatz. Ein durch ihn gehendes dreiseitiges Prisma trägt Oben den cylindrischen Teller zur Aufnahme des Mefswerkzeugs und kann daher derselbe beliebig erhöht oder erniedrigt und durch eine gegen das Prisma tretende Prefsschraube festgestellt werden.

Gestattet das Mefswerkzeug seiner Construction nach keine hohe Aufstellung, so pflegt mau die Füfse nicht nur mit dem Kopfe, sondern auch unter sich in etwa mittlerer Höhe durch eine Platte unabänderlich fest zu verbinden, welche zugleich zum Auflegen von Gewichten benutzt werden kann. Die unteren Enden der Füfse laufen dann auch in cylindrische Platten aus, die auf versenkte Steinplatten gestellt werden.

B. Das Zapfenstativ.

§. 73.

Der Haupttheil des Kopfes dieses Stativs besteht aus einem geraden dreiseitigen Prisma, an dessen Seitenebenen um Metallachsen die Füfse sich bewegen lafsen und durch Flügelmuttern festgestellt werden können. Nach Oben läuft der Kopf in einen konischen Zapfen aus, auf welchen die Hülse des Mefswerkzeugs gesteckt und mittelst einer daran befindlichen Klemm- oder Druckschraube befestigt wird. Ein solches Stativ dient nur für leichtere, kleinere Mefswerkzeuge, die keinen Dreifufs zur Unterlage haben, und ist für gröfsere Winkelmefser unbrauchbar. Es bietet den Vortheil dar, dafs die Verbindung des Mefswerkzeugs mit demselben bequem ist und alle zum Mefsinstrumente gehörige Bestandtheile für sich transportiert werden können.

VII. Die wesentlichen Theile der Winkelmeßser mit fester Unterlage.

§. 74.

Der Begriff der Winkelmefsung (§. 3) fordert von dem anzuwendenden Winkelmefser zunächst die Möglichkeit der sicheren Einstellung der Collimationslinie des Fernrohrs in die Richtung der Winkelschenkel, mithin eine Drehung derselben sowohl in horizontaler, als verticaler Richtung, um das Fadenkreuz des Fernrohrs mit den Richtobjecten zur Coincidenz bringen zu können. Es wird daher bei den Mefswerkzeugen mit fester Unterlage, um die Horizontal- oder Verticalprojection der Naturwinkel zu erhalten, der eingetheilte Kreis bei den winkelmefsenden Werkzeugen, oder ein zum Construieren der Winkel dienender Theil bei

den winkelzeichnenden, oder die Unterlage des Fernrohrs bei den Nivellierwerkzeugen beziehungsweise in eine genauo horizontale oder verticale Lage zu bringen sein.

Aufserdem wird aber dann noch eine Rotation gewifser Theile der Winkelmefser nicht nur in horizontaler Richtung um eine Verticalachse, sondern auch in verticaler Richtung um eine Horizontalachse erfordert, damit beim Drehen des Fernrohrs um seine Rotationsachse die Collimationslinie desselben einen Verticalkreis beschreibt. Endlich mufs der Winkelmefser auch noch die Möglichkeit gewähren, die anfangs grobe, d. h. nur mit der freien Hand, ohne fremde Mittel ausgeführte Achsendrehung aufzuheben, zu hemmen, um den beweglichen Theil gegen einen zur Zeit unbeweglichen und insofern feststehenden Theil des Mefswerkzeugs durch eine möglichst gleichförmige und nur sehr geringe Bewegung in dieselbe Rotation versetzen zu können. Man nennt letztere dann die mikrometrische oder feine Einstellung.

A. Die Einrichtungen zur Horizontalstellung.

§. 75.

Da die im vorigen Paragraphen erwähnten Kreise u. s. w. mit ihren Umdrehungsachsen als rechtwinklicht verbunden angenommen werden dürfen, so werden an den Winkelmefsern Einrichtungen vorhanden sein müfsen, durch welche mittelst der Libelle den Umdrehungsachsen die horizontale oder verticale Lage ertheilt werden kann. Dazu dient der Dreifufs oder die Nufs (Kugel). Ersterer wird bei allen gröfseren und auch solchen kleineren Mefsapparaten angewandt, von denen man eine möglichste Genauigkeit der Einstellung und der Beobachtungen fordert.

1. Der Dreifufs.

§. 76.

Der Dreifufs besteht, zur Aufnahme der anderen, wesentlichen Theile der Winkelmefser, aus einem meistens konisch durchbohrten, bei einigen Constructionen auch aus einem massiven Konus oder Cylinder, mit welchem die mehr oder weniger gegen den Horizont geneigten drei Arme, unter sich Winkel von 120° bildend, ein Ganzes ausmachen. Die äufseren Enden der Arme enthalten in verstärkten cylindrischen Ansätzen die Muttern für die vertical stehenden Stellschrauben (Fufsschrauben). Jede Mutter ist zur Beseitigung eines etwa entstandenen todten Ganges aufgeschlitzt und an dem lappenartigen Fortsatze mit einer Klemmschraube versehen, durch welche auch, nach erfolgter Horizontalstellung, die Stellschraube festgestellt werden könnte.

Wird die eine der Stellschrauben angezogen, so folgt aus §. 20, dafs der mit dem Dreifufs verbundene Mefsapparat um die Spitzen der beiden anderen Stellschrauben, je nachdem der Kopf der Schraube über oder unter der Mutter sich befindet, beziehungsweise eine Hebung oder Senkung erleiden wird. Bei Anwendung der beiden anderen Stellschrauben wird daher eine Bewegung in einer Richtung erfolgen, die auf der ersteren normal steht, mithin eine Horizontalstellung der Ebene des Winkelmefsers ermöglicht.

Enthalten die Köpfe der Stellschrauben eine Eintheilung (§. 27), so dient die eine Seitenkante der auf den Armen des Dreifufses befestigten normalen dreiseitigen Prismen als Index.

§. 77.

Die Füfse der Stellschrauben laufen meistens in konische Spitzen aus, die in konische oder dreiseitig prismatische Vertiefungen metallener Unterlegscheiben oder Fufsplatten treten. Diese sind entweder auf dem hölzernen Stativkopfe befestigt oder werden aufgelegt. Ist die Unterlage des Mefsinstruments eine Steinplatte, so enthält jede der Scheiben noch drei kleine Schrauben mit vortretenden Spitzen. Bei einem metallenen Stativkopf kann dieser selbst die erwähnten Vertiefungen oder Einschnitte enthalten. Es mag noch erwähnt werden, dafs zuweilen die Enden der Stellschrauben kugelförmig abgedreht und in eben solchen Lagern angebracht, so wie, dafs sie durch eine Kugel gelenkartig mit den Unterlegscheiben verbunden sind.

Dreifufsconstructionen finden sich u. a. in Figg. 28. 30 u. s. w.

Die Verbindung des Dreifufses mit dem Scheibenstativ.

§. 78.

Theils wegen des oft verlangten Transports des Mefsapparats mit dem Stativ von einem Standorte bis zu einem anderen, theils wegen der Sicherstellung gewifser unbeweglicher Theile der kleineren Mefsapparate gegen andere bewegliche während der Mefsungen, ist es erforderlich, letztere mit dem Stativ temporär zu verbinden.

Zu diesem Zwecke enthält die untere Fläche des mittleren Theils des Dreifufses eine starke, eine Oese enthaltende Mutter. Wird in diese, durch die Mitte des Stativkopfes gesteckt, ein Haken gehangen, der an seinem unteren Ende Schraubengewinde enthält, so wird eine von Unten um den Haken gesteckte Spiralfeder, die mit ihrem oberen Ende gegen eine Unterlegscheibe, oder gegen die Grundebene eines Oben geschlofsenen Cylinders drückt, durch das Anziehen einer von Unten wirkenden Mutter aber zusammengedrückt werden kann, durch

ihre Spannkraft ein Sinken der Oese und dadurch eine temporäre, mehr oder weniger feste Verbindung des Mefsapparats mit dem Stativ gestatten. Es ist bequem, wenn der erwähnte Cylinder in dem Stativkopfe befestigt werden kann (m. vgl. H. g. I. S. 86). Durch das Lösen der Schraubenmutter kann der Haken leicht aus der Oese ausgehangen und so der Mefsapparat leicht vom Stativ entfernt werden.

Einige andere, aber zum Theil weniger zweckmäfsige Einrichtungen mögen hier übergangen werden.

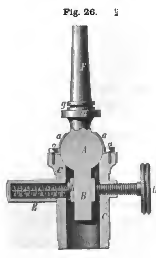
2. Die Nufs mit Stellschrauben.

§. 79.

Sie wird nur bei kleineren, leichteren Mefsapparaten angewandt.

In Fig. 26, in welcher der obere Theil eine vordere Ansicht, der untere einen Verticaldurchschnitt darstellt, ist *A* die Kugel, welche sich in einem kugelsegmentförmigen Lager des hohlen cylindrischen Körpers *C C* drehen läfst. Mit dem oberen Theile des letzteren ist durch Schräubchen *a a* eine kugelsegmentartige Hülse *a a* verbunden, wodurch der Gang der Bewegung der Kugel moderiert werden kann, die zugleich aber auch zur Führung dient. Der unterwärts mit der Kugel aus einem Stück bestehende Cylinder *B* ist in einen hohlen Würfel *b* eingetrieben, gegen welchen vier Stellschrauben *D* treten, deren Muttern der auf den metallenen Stativkopf geschraubte hohle Cylinder *C C* enthält. Durch die Stellschrauben kann daher wegen des Spielraums zwischen den Seitenebenen des Würfels *b* und dem inneren Mantel des Cylinders *C C*, der konische Zapfen *F*, der ebenfalls mit der Kugel ein Ganzes bildet und die Hülse des Mefswerkzeuges aufnimmt, in zwei auf einander normal stehenden Verticalebenen bewegt werden, woraus die Möglichkeit der Horizontalstellung des Winkelmefsers sich ergiebt.

Fig. 26.



Da aber bei der Anwendung von vier Stellschrauben erfordert wird, dafs die eine jedes Schraubenpaars so viel gelöst werden mufs, als die andere angezogen werden soll, wobei daher immer beide Hände des Beobachters in Anspruch genommen werden müfsen: so wird theils

zur Vermeidung dieser Unbequemlichkeit, vorzugsweise aber zur Beseitigung eines etwa entstandenen todten Ganges der Stellschrauben, die eine jedes Schraubenpaars durch eine in einem Gehäuse E liegende Spiralfeder ersetzt, deren Endplatte sich gegen die Seitenebene des Würfels b legt. Das Gehäuse enthält zwei seitliche Flügel, durch welche es mittelst Schrauben in dem äufseren Mantel des Cylinders CC befestigt wird. Selbstverständlich mufs die Spiralfeder eine so starke spannende Kraft besitzen, dafs sie auch dann noch eine Wirkung äufsert, wenn durch die Lösung der Stellschraube D die zugehörige Seitenebene des Würfels an die innere Wand des Cylinders CC sich legt.

Die an dem unteren Ende des Zapfens F befindliche Scheibe G, so wie die über derselben angebrachte Rille g, welche beide mit F ein Ganzes bilden, dienen zur Aufnahme des zur Mikrometerbewegung des Mefsapparats angewandten Klemmringes.

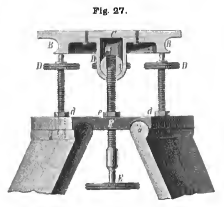
Ueber die Nufsconstruction des Stampfer-Starke'schen Nivellierinstruments, die sowohl durch ihre grofse Solidität, als auch durch ihre Präcision, hinsichtlich der Verbindung der einzelnen Theile sich auszeichnet, vgl. m. H. g. I. S. 94.

3. Die Nufs mit der Centralschraube.

§. 80.

Diese Construction fordert, wie die im §. 79 angegebene, ein Scheibenstativ mit einem Metallkopf zur Unterlage, von welchem die Stellschrauben und die Centralschraube nicht getrennt werden können, und insofern letztere auch leichter zufälligen Beschädigungen ausgesetzt sind. In Fig. 27 ist ein Verticaldurchschnitt derselben dargestellt. Die drei Stellschrauben DDD haben ihre Muttern in dem Stativkopf F, der aufserdem noch eine Oeffnung für die Centralschraube E enthält; durch die aufgesetzten Platten $d\ d$ werden die Muttern der ersteren verstärkt; e ist die Gegenmutter zum Feststellen der Centralschraube. Die Messingknöpfe der drei Stellschrauben, oberhalb der

Fig. 27.



Köpfe derselben, treten gegen den Innen cylindrisch ausgedrehten Teller BB, mit welchem die Scheibe C, die z. B. den Limbus eines Kreises enthalten kann, ein Ganzes bildet. In der erwähnten Ausbohrung wird das Oben in eine Scheibe auslaufende hohle cylindrische Kugellager a, nachdem in dem untern sphärisch ausgedrehten Theil die mit der Mutter der Centralschraube versehene Kugel A in die gehörige Lage gebracht ist, durch vier Zugschrauben mit BCB befestigt. Aufserdem wird auch noch die Kugel durch einen aufgesetzten passenden hohlen Ring in dem Lager gehörig festgehalten. Beim Horizontalstellen des mit C verbundenen Mefsapparats wird daher zuerst die Centralschraube etwas gelöst, darauf die Scheibe C mittelst der Stellschrauben horizontal gestellt, dann die Centralschraube wieder angezogen und mittelst ihrer Gegenmutter befestigt.

B. Die Horizontalrotation um die erste oder Verticalachse.

§. 81.

Ist der mittlere Theil des Dreifufses durchbohrt (§. 76), so ist mit demselben eine Büchse (Centralbüchse) verbunden, welche, so wie der erstere, einen theils konisch, theils cylindrisch abgedrehten Zapfen, Centralzapfen, die erste oder Verticalachse, von Stahl oder Rothmetall, aufnimmt, an dessen Flansche dann der bewegliche Theil des Mefsapparats befestigt ist, während die Centralbüchse auf gleiche Art mit dem festen Theile desselben in Verbindung steht. Diese Einrichtung findet sich bei den einfachen Theodolithen, den gröfseren Mefstischen und Niveaux u. s. w. und kann die Horizontalrotation mit einfachem Achsensystem genannt werden. Nimmt dagegen, wie es aber nur bei Universalinstrumenten, Repetitionstheodolithen u. s. w. der Fall ist, die Centralbüchse einen ebenfalls durchbohrten Konus (oder Cylinder) auf, an dessen Flansche der Limbuskreis befestigt ist, während der in diesem Falle stets stählerne Centralzapfen, an seiner Flansche die Alhidade oder den Mikrofkopenträger enthält: so bildet diese Einrichtung das zweifache Achsensystem.

§. 82.

Das einfache Achsensystem wird in Fig. 28, in welcher der rechtsliegende Theil den Verticaldurchschnitt bezeichnet, von einem Theodolithen dargestellt. Hier ist mit dem Cylinder A des Dreifufses die Büchse A_1 mittelst Schrauben verbunden; letztere trägt an einer Flansche den Limbuskreis H, während an der Flansche x der Verticalachse X die Alhidade H_1 befestigt ist. Die Verticalachse ruht auf einer plattenförmigen Tragfeder I, deren drei Arme mittelst Schrauben ii in den

Armen des Dreifufses befestigt und verstellbar sind, um die Verniere der Alhidade mit dem Limbus in eine zum Ablesen passende Höhe zu bringen. Durch die Mutter v_1 wird die Verticalachse gegen den Drei-

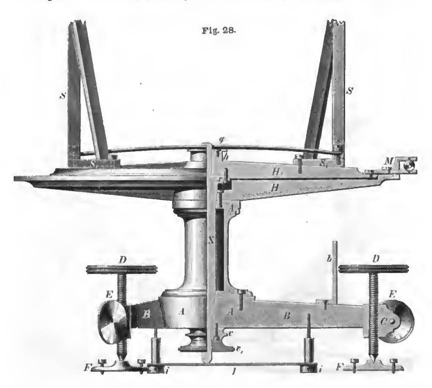


Fig. 28.

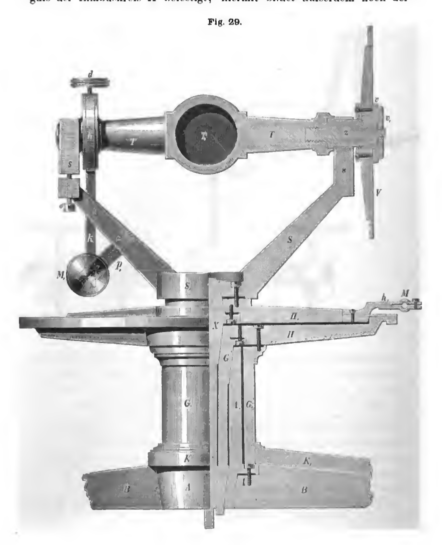
fufs festgehalten und kann ihr Gang in der Büchse moderirt werden. Um die Last des beweglichen Obertheils des Theodoliths auf die Verticalachse zu versetzen, wird der Fortsatz derselben von einer plattenförmigen Feder φ umgeben, deren Enden unter die Köpfe *s* zweier Schrauben treten, die auf den Grundlagen S_1 S_1 der Stützen *SS* des Fernrohrs befestigt sind. *BB* bezeichnen die Arme des Dreifufses, *DD* die Stellschrauben, *C* deren Muttern, *EE* die Klemmschrauben, *FF* die Unterlegscheiben und *b* das dreiseitige Prisma zum Index der Schraubenkopfeintheilung (§. 76). Der Theodolith kann zum Transport mit dem Stativ nicht fest verbunden werden.

Ueber andere Einrichtungen des einfachen Achsensystems vgl. m. H. g. I. S. 98 und f.

§. 83.

Ein zweiachsiges Rotationssystem nach der gewöhnlichen Construction wird in Fig. 29 dargestellt, deren rechtsliegender Theil wieder den Verticaldurchschnitt bezeichnet. An der Flansche des Stahlzapfens X ist der Alhidadenkreis H_1, an der Flansche der Kreisachse G von Rothgufs der Limbuskreis H befestigt; hiermit bildet aufserdem noch der

Fig. 29.



Mantel G_1, der die Büchse A_1 des Dreifufses umschliefst und nur den Zweck hat, die Hemmung des Limbuskreises möglichst in das Centrum zu verlegen, ein Ganzes. Ferner ist an dem mittleren Theile der Alhidade der Innen ausgedrehte Cylinder S_1 befestigt, mit welchem wieder die Stützen SS der Fernrohrachse TT ein Ganzes bilden. Ist der Mefsapparat in gröfseren Dimensionen ausgeführt, so ruht sowohl die Kreis- als die Alhidadenachse, jede für sich, auf einer Tragfeder, welche Beide in den Armen des Dreifufses befestigt sind.

Will man bei dem Mefsapparat die Repetitionsmethode bei der Winkelbestimmung aufgeben und dafür den Anfangspunkt (Nullpunkt) der Limbustheilung, so viel man will, variieren können, um die Theilungsfehler zu vermindern, so zeigt die in Fig. 30 dargestellte Construction die erforderliche Einrichtung.

Die mit dem Dreifufs AA verbundene Büchse B nimmt den unteren Conus C des stählernen Verticalzapfens CC_1 auf, während um den oberen Theil C_1, die mit den Stützen GG der Rotationsachse K des Fernrohrs verbundene Büchse F und der mit der Stützenplatte verbundene Mikrofkopenträger H im Horizonte herumgeführt werden können. Der an der Flansche cc befestigte Limbuskreis DD kann mit dem Zapfen CC_1 durch Lösung der unter die Dreifufsbüchse tretenden Mutter E gegen die Mikrofkope des Mikrofkopenträgers daher beliebig verstellt, durch Anziehung derselben aber an die Dreifufsbüchse angeschlofsen werden. Durch die auf das Mittelstück des Limbuskreises gelegte kugelcalotteförmige Feder wird nicht nur dem zu bewegenden Obertheil eine sichere Bewegung um den Verticalzapfen, sondern auch, bei Lösung der Mutter E, eine leichte und sanfte Verstellung des Kreises und des Verticalzapfens gegen die Büchse F gewährt.

Ueber andere Constructionen des zweiachsigen Systems vgl. m. H. g. I. S. 102 u. f.

C. Die Verticalrotation um die zweite oder Horizontalachse.

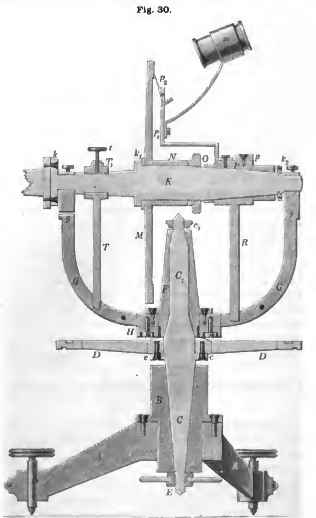
§. 84.

Die Verticalrotation betrifft nur die Bewegung des Fernrohrs mit seiner Rotationsachse und dem daran befindlichen Höhenkreise in einer Ebene, die zu der Ebene, welche die mit der ersten Achse verbundenen Theile darstellen, normal steht.

Bei den Universalinstrumenten, Theodolithen und bei einigen Kippregeln liegt das Fernrohr mit zwei cylindrischen Stahlzapfen seiner Rotationsachse in Achsenlagern mit y-förmigen Ausschnitten, und ist entweder in der Mitte, oder an dem einen Ende der doppeltkonischen Rotationsachse befestigt. Die Ausschnitte sind aufserdem so ausgeschliffen,

dafs jeder Zapfen an jeder Seite nur einen Punkt mit der Unterlage gemein hat. Bei den meisten Kippregeln des Mefstisches, den Boussolen u. e. a. Apparaten hat das Fernrohr nur eine einseitige konische Achse in einer Büchse, die meistens mit einer Säule ein Ganzes bildet.

Fig. 30.



Nur in Bezug auf den Höhenkreis läfst sich auch hier ein ein- und ein zweiachsiges Rotationssystem unterscheiden. Bei dem ersteren ist

der Höhenkreis an einer Flansche der Rotationsachse des Fernrohrs befestigt und wird daher mit diesem zugleich gedreht, während die Verniers mit dem einen Zapfenlager zu einem Ganzen verbunden sind. Diese Construction zeigt Fig. 29. Die Stützen *SS* enthalten die beiden Achsenlager *ss* des Fernrohrs, von welchen das eine aus 2 Stücken besteht, welche durch 2 Druckschrauben *σ* und einer (nicht sichtbaren) Zugschraube gegen einander verstellt und verbunden werden können. Die Stahlzapfen *z* sind in die Konus *TT'* des Fernrohrs T_1 eingeschraubt. Auf dem einen findet sich die Flansche, an welcher der Verticalkreis *V* befestigt ist; aufserdem ist derselbe noch durch die Vorlegscheibe *v* und die Mutter v_1 mit dem Zapfen verbunden. Der Ring *k* nebst der Druckschraube *d* an dem anderen Ende der Rotationsachse dient zur Hemmung der groben Bewegung.

§. 85.

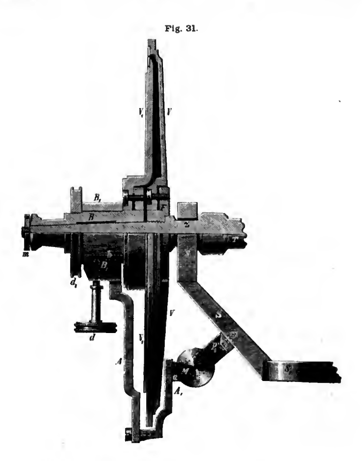
Bei dem zweiachsigen Rotationssysteme ist ebenfalls die Möglichkeit gegeben, wie bei dem Horizontalkreise, die Verticalwinkel von verschiedenen Punkten des Limbus aus zu bestimmen, daher dasselbe sich vorzugsweise für terrestrische Höhenbestimmungen eignet, bei astronomischen Beobachtungen aber als ganz überflüfsig erscheint. Ist der Limbuskreis mit einem Vernierkreise versehen, so ist gewöhnlich der erstere wieder an der Rotationsachse des Fernrohrs befestigt, der Vernierkreis aber mit seiner auf die Achse geschobenen Büchse verstellbar und zugleich festzustellen. Diese Construction zeigt Fig. 31, in welcher *V* den an der Flansche *F* der Achse *T* befestigten Verticalkreis darstellt, während der Vernierkreis V_1 mit seiner Büchse *B* um die Achse gedreht und durch die Druckschraube d_1 an derselben festgehalten werden kann. Hier geschieht die Hemmung der groben Bewegung mittelst der durch den Ring B_1 gegen eine Bremsplatte tretenden Druckschraube *d*; die andern Theile der Zeichnung stellen die zur mikrometrischen Bewegung erforderlichen Stücke dar.

Einen mit mikrofkopischer Ablesung eingerichteten Verticalkreis zeigt Fig. 30. Die an dem einen Ende der Rotationsachse *K* angebrachte Büchse *P* enthält den Mikrofkopenträger, der durch den von der Büchse ausgehenden Arm *R* mit der Stütze des Fernrohrs zu einem Ganzen vereinigt werden kann. Gegen die Flansche k_1 der Achse *K* legt sich der Verticalkreis *M* mit seiner die Achse umschliefsenden Büchse *N*. Wird die Mutter *O* angezogen, so wird der Kreis mit der Rotationsachse *K* zugleich rotieren; durch Lösung derselben ist aber eine Verstellung des Kreises gegen die festen Mikrofkope gegeben, wodurch also der Anfangspunkt (Nullpunkt) der Theilung wieder soviel, als man will, variiert werden kann.

§. 86.

Die in Fig. 32 dargestellte Construction zeigt die Einrichtung der einseitigen Umdrehungsachse des Fernrohrs bei der Kippregel eines Mefstisches. Die konische Achse T bildet mit der Hülse des Fernrohrs

Fig. 31.



ein Ganzes; an dieser Hülse ist auch der Verticalkreis V befestigt. Zum Festhalten der Achse in dem mit der Säule S verbundenen Achsenlager B dient die plattenförmige Feder f und die Schraube m. Mit der Flansche des Achsenlagers ist durch versenkte Schrauben ein Rahmen verbunden, welcher die Verniers trägt. Die Schrauben z, z, σ dienen

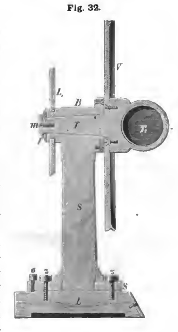
theils zum Befestigen, theils zum Verstellen des Fufses der Säule gegen das Lineal *L.*

D. Die Einrichtungen zur Hemmung der groben und zur feinen Achsenumdrehung.

§. 87.

Beide Einrichtungen hängen auf eine so innige Weise mit einander zusammen, dafs eine getrennte Darstellung beider nicht zulässig ist. Gleichwohl hängt von der zweckmäfsigen Construction, also von der richtigen Wahl der einen oder andern Art, so wie von ihrer gründlichen Kenntnifs und der richtigen Behandlung derselben vorzugsweise die Güte der mit dem Mefswerkzeuge ausgeführten Beobachtungen oder Mefsungen ab.

Fig. 32.



Das Mittel zur Hemmung der groben Achsenumdrehung gewährt die Klemm- und Druckschraube (§. 19. 4) mit einzelnen Hülfstheilen, oder die Schraube ohne Ende (§. 19. 6) in Verbiudung mit einer starken Druckfeder, die durch ein excentrisches Kreisstück in Wirksamkeit gesetzt werden kann. Zur mikrometrischen Bewegung dient die Mikrometerschraube (§. 19. 3), die gewöhnlich nur eine rotierende Bewegung gestattet und durch deren Rotation daher die bewegliche Mutter eine Fortschiebung erleidet (§. 20), aber auch von der Schraube ohne Ende vertreten werden kann. Hin und wieder macht man indessen auch von der fortgleitenden Bewegung der Schraube, mit welcher daher die unbewegliche Mutter verbunden sein mufs (§. 21), Gebrauch. Den festliegenden Stützpunkt der Schraube bildet entweder die zwischen dem Kopfe und dem Gewinde liegende Kugel, die dann in dem ersten Falle an dem festliegenden, unbeweglichen Theile des Mefsapparats angebracht ist, oder ein, ebenfalls an dem festliegenden Theile angebrachter prismatischer Anschlag- (Stütz-) Zapfen, gegen dessen eine Seite das Ende der Schraube tritt, während gegen die andere Seite eine mit dem beweglichen Theile in Verbindung stehende Druckfeder sich legt. Diese letztere Art der Construction wird von Einigen mit dem unpassenden Namen Federmikrometer belegt. Beide Constructionen lafsen sich aber mit den verschiedenen Hemmungsvorrichtungen verbinden, daher

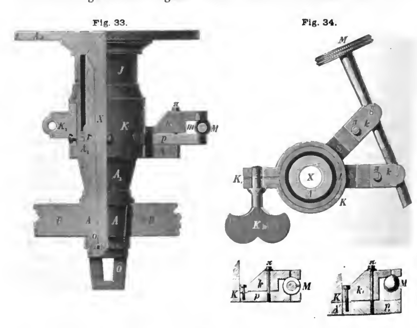
letztere auch allein das Unterscheidungsprincip abgeben. Es mufs aber noch bemerkt werden, dafs in dem ersten Falle die Mikrometerschraube allein, in dem letzteren aber in ihrer Verbindung mit der Druckfeder immer eine Vereinigung des festen und beweglichen Theils des Mefsapparats bildet. Alle hierbei angewandten Schrauben haben einen geränderten oder einen mit einem Hebel versehenen Kopf (§. 19). Es lafsen sich folgende vier Arten von Hemmungsvorrichtungen unterscheiden.

1. Der Klemmring mit der Klemmschraube.

§. 88.

Der Klemmring der Figg. 33 u. 34 besteht aus einem starken Messingringe K von einer dem zu hemmenden Theile entsprechenden Breite. In der Richtung einer Seite ist er aufgeschlitzt, um ihm eine federnde Eigenschaft zu geben. Jeder der Theile enthält einen hin-

Fig. 33. Fig. 34.



reichend starken prismatischen Fortsatz K_1. Der eine derselben dient der Klemmschraube K_2 als Stütze, während der andere die Mutter enthält. Durch Anziehen der Klemmschraube legt sich die innere Fläche

des Ringes an die äufsere Mantelfläche I, welche mit der Scheibe A_2 und dem Verticalzapfen X ein Ganzes bildet. Hierdurch ist daher die grobe Rotation des Mefswerkzeugs aufgehoben. Die Einrichtung zur feinen Einstellung besteht in zwei s. g. Klemmen mit der Mikrometerschraube M. Jede derselben ist aus zwei Stücken mit kugelförmigen Aushöhlungen zusammengesetzt, von denen das eine, hier das untere, p und p_1, die Klemmplatte, mit dem beweglichen Klemmringe oder der festen Dreifufsbüchse A_1 beziehungsweise zusammenhängt und theils die kugelförmige, aufgeschlitzte Mutter m (Fig. 33), theils die massive Kugel der Mikrometerschraube aufnimmt, während das andere, obere, k und k_1, der Kloben, durch versenkte Schrauben mit dem andern verbunden ist. Zwischen der ersten Klemme, $p_1 k_1$, welche mit dem festen Dreifufs in Verbindung steht, liegt daher die Kugel, zwischen der anderen die Mutter der Mikrometerschraube, durch deren Anziehung daher dem Klemmring K mit der Scheibe A_2 und dem damit verbundenen Mefsapparate eine Rotation nach dem Kopfe der Mikrometerschraube zu ertheilt werden wird. Um eine schlotternde Bewegung des Klemmringes zu vermeiden, treten von Aufsen Stifte, die in dem Ringe durch Schraubengänge festsitzen, in eine Rille r (Fig. 33), welche in die äufsere Fläche der Centralbüchse A_1 eingedreht ist.

Der Gang der Kugel, oder der todte Gang der Mutter der Mikrometerschraube kann beziehungsweise moderiert oder aufgehoben werden durch kleine Pressschrauben π_1 und π, die bei jeder Klemme angebracht sind; kleine Löcher in den Kloben bis zur Kugel oder Mutter gestatten das Eintröpfeln von Oel.

Da aber bei der Umdrehung der Mikrometerschraube die fortgleitende Bewegung ihrer Mutter in einer der Achse der Schraube entsprechenden, also in einer Richtung erfolgt, welche für die drehende Bewegung des Klemmringes und der daran geschlofsenen Theile eine Tangentialrichtung ist, so würde eine Spannung in der Mutter eine nothwendige Folge sein, wenn letztere nicht auch in eine drehende Bewegung übergehen könnte. Diefs wird aber durch einen cylindrischen Gelenkstift erreicht, der von der äufseren Fläche der Mutter ausgeht und in eine Vertiefung der Klemmplatte tritt.

Wegen der grofsen Berührungsfläche des inneren Mantels des Klemmringes mit der äufseren Mantelfläche der Hülse I ist die hier erwähnte Vorrichtung eine der vorzüglicheren Arten, da sie auf den Centralzapfen und dadurch auf das Mefswerkzeug nur eine möglichst geringe Spannung veranlafsen wird. Sie verdient bei den Mefsapparaten mit einfachem Achsensystem der Horizontalrotationen besonders dann immer angewendet zu werden, wenn die Centralbüchse ihre Anlage gestattet. Man kann sich ihrer bei letzterem Umstande nicht nur bei

Theodolithen, Meſstischen, Nivellierwerkzeugen, Boussolen, sondern auch bei den Nuſsconstructionen zweckmäſsig bedienen.

Ueber eine andere Construction des Klemmringes vgl. m. II. g. I. S. 117.

2. Die Halterplatte mit der Klemmschraube.

§. 89.

Diese Einrichtung wird besonders dann angewandt, wenn die Hemmung der rotierenden Bewegung, wegen des Baues der den Zapfen umgebenden Büchsen, nicht an diesen selbst angebracht werden kann und zugleich eine mit einer Achse in Verbindung stehende Scheibe gegen eine andere feste Scheibe oder einen festen Arm in drehende Bewegung versetzt werden soll. Vorzugsweise bedient man sich ihrer bei der drehenden Bewegung der Alhidade oder des Mikroſkopenträgers gegen den Limbuskreis oder bei der rotierenden Bewegung des letzteren gegen einen festen Arm der Dreifuſsbüchse. So unähnlich auch diese Vorrichtung der in 1. beschriebenen scheint, so sind beide im Princip doch einander sehr ähnlich. Denkt man sich z. B. die in Rede stehende Einrichtung zu der Bewegung des Limbuskreises eines Theodoliths gegen die festliegende Dreifuſsbüchse oder einen Arm derselben angebracht, so wird der Mantel I (Figg. 33 u. 34) in 1, hier durch den Kreisrand vertreten; die Dreifuſsbüchse A_1 dort, hier durch den von ihr ausgehenden Arm; so wie der Klemmring K mit seinen beiden prismatischen Fortsätzen K_1 in 1, hier durch zwei Platten substituiert wird, von denen die eine die Mutter der zugehörigen Klemmschraube enthält und so geschnitten ist, daſs sie zum Theil gegen, zum Theil aber über oder unter den vorspringenden Bord des Kreises sich legt. Die andere, die erstere deckende und ihr fast gleich geformte Platte, liegt beziehungsweise unter oder über dem erwähnten Borde und bildet zugleich die Stütze der erwähnten Klemmschraube. Da durch die zuersterwähnte Platte, mittelst des Anziehens der Klemmschraube, der Kreisrand festgehalten oder gehemmt wird, so wird sie die Halterplatte, die andere Platte aber die Deckplatte der Vorrichtung genannt. Die Construction der Klemmen ist hier der in Fig. 34 angegebenen ganz ähnlich. Die Klemme für die Kugel der Mikrometerschraube ist meistens an dem erwähnten Arme, die für die Mutter dann an der vorhin genannten zweiten Platte angebracht. Doch können auch Kugel und Mutter gegen einander vertauscht werden, nur findet dann nicht eine Fortschiebung der Mutter, sondern eine solche der Mikrometerschraube mit der Kugel Statt (§. 21). Durch das Anziehen der Klemmschraube wird daher der zwischen den beiden Platten liegende Kreisrand gehemmt und mittelst

der Mikrometerschraube zugleich mit dem Arme der Dreifufsbüchse zu einem Stück verbunden, so dafs demnach die grobe Achsenumdrehung gehoben ist, die feine Einstellnng aber auf die im §. 88 angegebene Weise erfolgt.

Bei dieser Art der Hemmung wird den sich berührenden Flächen ein weit geringeres Areal dargeboten, als bei der in 1. beschriebenen. Deshalb mufs aber die Berührnng der Halterplatte mit dem gehemmten Kreisrande eine möglichst innige sein, um Schwankungen in den verbundenen Stücken durch die Umdrehnng der Mikrometerschranbe zu vermeiden. Zu diesem Zwecke ist auf der Unterfläche des Kreisrandes eine schmale Rille ausgedreht, in welcher zwei kleine prismatische Ansätze der Deckplatte ihre Führung haben. Eben so enthält letztere noch zwei cylindrische Stifte, welche in die zngehörigen Löcher der Halterplatte treten. Zur Vermeidung des Aufschleifens der beiden Platten anf dem Kreisrande beim Lösen der Klemmsehraube enthält die eine derselben, oder auch beide, cylindrische Ausbohrungen mit Spiralfedern, wodurch dann die erwähnten Platten, beim Lösen der Klemmschranbe, sogleich nach entgegengesetzten Richtungen von einander entfernt werden. Letztere Einrichtung wendet Breithaupt bei seinen Mefsinstrnmenten vielfach an.

§. 90.

Bei der Hemmung und der feinen Einstellnng der Alhidaden gegen ihre eingetheilten Horizontalkreise macht man von der in dem vorigen Paragraph beschriebenen Einrichtnng fast ausschliefslich Gebrauch. Mit gleicher Bequemlichkeit kann man sich derselben aber anch bedienen beim Einstellen des Limbuskreises gegen die Büchse des Dreifnfses.

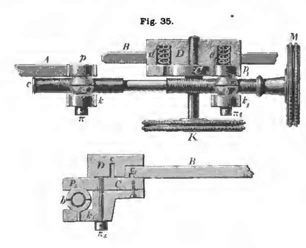
In Bezng anf die Hemmnng der Alhidaden gegen die Kreisränder ist aber noch zu bemerken, dafs wenn dieselbe direct an ihren Rändern, nicht aber, wie diefs die Constructionen der Figg. 108—110 in H. g. I. zeigen, an einem von der Büchse der Alhidade ausgehenden Arme erfolgt, dnrch die Umdrehung der Mikrometerschranbe, da sie in einer Tangentialrichtung für den Kreis wirkt, mehr oder weniger eine Biegung der dem Mikrometerwerke nahe liegenden Speichen der Alhidade nnd dadurch eine Ungenanigkeit in der Bestimmung des zn mefsenden Winkels hervorrufen wird. Es wird deshalb auch bei dem später (§. 228) zu beschreibenden Verfahren, mit einem Theodolith u. s. w. die Gröfse eines Horizontalwinkels zu bestimmen, angegeben werden, wodurch der angedentete Fehler eliminiert werden kann.

In Fig. 35 sind die Durchschnitte der Einrichtung der Hemmung und feinen Einstellung mittelst der Halterplatte und Klemmschraube

6*

dargestellt, die gewöhnliche Mikrometerschraube ist nur durch eine Differenzialschraube M vertreten. A bezeichnet den festliegenden Theil des Meſsapparats, gegen welchen der Theil B bewegt werden soll; a die festliegende, b die bewegliche (d. h. die den Theil B in Drehung versetzende) Mutter; D die Halter- und C die Deckplatte des Hemmungswerks, K dessen Klemmschraube. Ferner bezeichnen k und k_1

Fig. 35.



die Kloben; p und p_1 die Klemmplatten, von welchen p mit dem Arme A, p_1 aber mit der Deckplatte C ein Ganzes bildet; π und π_1 die zugehörigen Pressschräubchen, c und c_1 die Gelenkstifte und den Ansatz zur sicheren Führung, zu welchen die Platte D die nöthigen Löcher und die Scheibe B die erforderliche Rille enthält und endlich d und d_1 die hohlen Cylinder, welche die zur Vermeidung des Aufschleifens nöthigen Spiralfedern aufnehmen, in dem unteren Theile der Figur aber weggelaſsen sind.

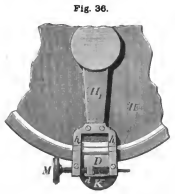
Ueber die Wirkung der Differenzialschraube ist §. 22 zu vergleichen.

§. 91.

In Fig. 36 ist ein Theil des Kreises und der Alhidade eines kleinen Spiegelkreises mit dem s. g. Federmikrometer dargestellt. Auf der Alhidade H_1 ist eine aus zwei Armen $h_1 h_1$ bestehende Platte befestigt, deren vordere Enden in horizontaler Richtung aufgeschlitzt und mit Klemmschräubchen versehen sind; der eine Arm enthält die Mutter der Mikrometerschraube M. Auf der Halterplatte D ist der stählerne Anschlagzapfen d befestigt, dessen eine Seitenebene den Stützpunkt der

Schraube M bildet; damit letzterer sich nicht ändert, also die Wirkung der Mikrometerschraube und die Verbindung des beweglichen Theiles mit dem festen (§. 87) nicht aufgehoben wird, treibt die Elasticität der Spiralfeder φ den Knopf eines in dem zweiten Arme beweglichen Stahlstiftes gegen den Zapfen d, daher die den Stift umgebende Spiralfeder zwischen dem Arme und dem erwähnten Knopfe angebracht ist. Es wird bei dem praktischen Gebrauch nur immer darauf zu achten sein, dafs die Windungen der Feder so nahe zusammenliegen, um die erforderliche spannende Kraft äufsern zu können.

Fig. 36.



Ueber eine Construction des Federmikrometers mit plattenförmiger Feder vgl. m. H. g. I. S. 121.

3. Der geschlofsene Ring mit der Pressschraube und der Bremsplatte.

§. 92.

Dieser Einrichtung bedient man sich vorzugsweise bei der Verticalrotation um die Horizontalachse. Zu der mikrometrischen Bewegung dient aber fast ausschliefslich die Construction der einfachen Mikrometerschraube mit der Druckfeder, wenngleich auch die Mikrometerschraube mit den Klemmen angewandt werden kann.

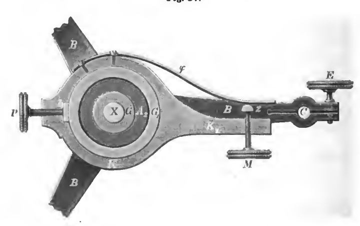
Die Einrichtung zur Hemmung der groben Achsenumdrehung besteht aus einem starken, an einer Seite verdickten, nicht gespaltenen Ringe, an dessen innere Mantelfläche um den zu hemmenden Theil eine, Innen cylindrisch ausgedrehte Stahlplatte (Bremsplatte) sich legt, gegen welche durch den erwähnten verdickten Theil des geschlofsenen Ringes die Pressschraube tritt, durch deren Anziehung demnach die Hemmung der Rotationsachse bewirkt werden kann.

Die Einrichtung zur federmikrometrischen Einstellung fordert eine Verschiedenheit, je nachdem sie bei Horizontal- oder Verticalbewegungen angewandt wird. Bei der ersteren ist die Stütze der Mikrometerschraube wieder ein verticalstehender Anschlagzapfen auf dem einen Arme des Dreifufses. Die Mutter derselben liegt in einem, von dem geschlofsenen Ringe ausgehenden und mit diesem zu einem Stück verbundenen Arme, während die Verbindung des beweglichen und festen Theils (§. 87) und

die Wirksamkeit der Schraube durch eine plattenförmige Druckfeder, die sich gegen den erwähnten Zapfen legt und an dem äufseren Mantel des Ringes mittelst Schrauben befestigt ist, hervorgebracht wird.

Diese Construction zeigt Fig. 37 im Grundrifs, worin *BBB* die Arme des Dreifufses, *z* den Anschlagzapfen für die Druckfeder φ und die Stütze der Mikrometerschraube *M*, die in dem Fortsatze K_1 des Ringes *K* ihre Mutter hat, bezeichnen; *P* stellt die Pressschraube, *b*


Fig. 37.



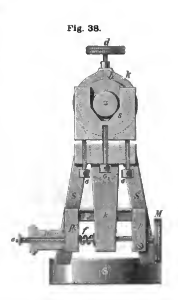
die Bremsplatte vor, welche durch die Anziehung der Schraube gegen den Mantel G_1 gedrückt wird. *G* bezeichnet die Kreisachse, *X* den Verticalzapfen und A_1 die nach Oben erweiterte Büchse des Dreifusses, welche von dem Mantel G_1 umhüllt wird.

§. 93.

Bei der Verticalrotation um die Horizontalachse tritt das Ende der Mikrometerschraube, deren Mutter an dem einen Arm der einen Stütze der Umdrehungsachse des Fernrohrs angebracht ist, unmittelbar gegen den vertical abwärtsgehenden Arm des geschlofsenen Ringes. Bei kleineren Mefsapparaten, bei denen die Umlegung der Horizontalachse des Fernrohrs mit nur geringen Schwierigkeiten schnell und zugleich sicher ausgeführt werden kann, kann zwar eine **plattenförmige** Druckfeder, die sich gegen einen vorstehenden Zapfen legt, die Verbindung des beweglichen und festen Theils (§. 82) bewirken, allein zweckmäfsiger ist die in Fig. 38 dargestellte Construction, in welcher der Zapfen durch eine Schraube σ_2 vertreten wird, durch deren Mutter *m* der Spiralfeder

f die zur Wirkung der Mikrometerschraube M erforderliche Spannkraft ertheilt werden kann. Drückt man durch Anziehen der Mutter m die Windungen der Feder noch mehr zusammen, so bekommt der Arm k_1 hinreichenden Spielraum zwischen der zu diesem Zwecke etwas gelüfteten Mikrometerschraube und dem Knopfe der Spiralfeder, dafs die Aushebung und Umlegung der Fernrohrachse nebst Zubehör mit Leichtigkeit ausgeführt werden kann. Insofern verdient auch die Anwendung einer Spiralfeder vor einer plattenförmigen Feder den Vorzug. $\sigma \sigma \sigma_1$ bezeichnen die Stell- und Zugschrauben zur Verstellung des beweglichen Achsenlagers s.

Fig. 38.



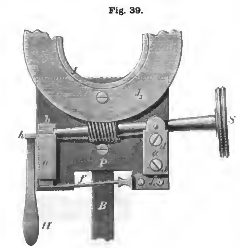
4. Die Schraube ohne Ende mit dem Schlitten.

§. 94.

Diese Einrichtung kommt, obgleich im Allgemeinen nur beschränkt, sowohl bei Horizontal- als Verticalrotationen zur Anwendung, fordert aber aufser der Schraube immer eine Scheibe mit einem dem Durchmefser der Schraube entsprechenden Rande, in welchen die Mutter eingeschnitten ist und von der die Vorrichtung den obigen Namen erhalten hat. Sie unterscheidet sich dadurch wesentlich von den drei vorhergehenden, dafs während bei letzteren zur Hemmung der groben Achsenrotation eine Klemm- oder Pressschraube, zur feinen Einstellung aber eine s. g. Mikrometerschraube diente, hier beide Arten der Kreisbewegung dadurch erreicht werden, dafs durch eine um die Kugel der Schraube vorgenommene seitliche Drehung derselben in der Richtung der erwähnten Scheibe, die Gewinde derselben in die Muttersehraube ein-, oder aus derselben heraustreten. In dem letzteren Falle ist die grobe Rotation des beweglichen Theils des Mefsapparats gegen den festen, im ersteren die Hemmung desselben und durch Umdrehung der Schraube die feine Einstellung möglich. Hierzu dient eine starke plattenförmige Druckfeder und ein mit einem excentrischen Cylinderstück verbundener Hebel, wodurch dem vorderen Ende der Schraube die erwähnte drehende Bewegung ertheilt werden kann, sobald die Kugel in einem Lager sich befindet, das mit dem festen Theile des Mefsapparats in Verbindung steht.

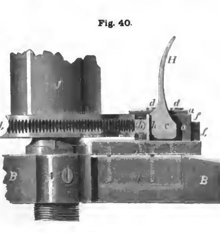
Die Figg. 39 und 40 stellen die zu einem Meſstisch gehörige Vorrichtung der Schraube ohne Ende im Grundriſs und in der Seitenansicht dar. In ersterer ist die Schraube als ausgerückt, mithin zur groben Achsendrehung geeignet, in letzterer aber zur feinen Einstellung, eingerückt dargestellt.

Fig. 39.



B ist der eine Arm des Dreifuſses, auf welchem durch zwei versenkte Schrauben die Fuſsplatte *P*, welche die Lager der Schraube *S* enthält, befestigt ist. An dem unteren Ende des Mantels *I*, der mit dem Verticalzapfen ein Ganzes bildet und die Dreifuſsbüchse A_1 umgiebt, findet sich die Scheibe I_1, in deren äuſsere Randfläche die Mutter der Schraube eingeschnitten ist. In dem, dem Schraubenkopfe zunächst liegenden Lager *a* läſst sich die Schraube mit der Kugel sowohl um ihre Achse, als auch seitlich zum Ein- und Ausrücken drehen, durch die Pressschrauben *d d* aber ihr Gang moderieren. Das andere, parallelepipedische Lager *b*, der Schubbolzen oder Schlitten genannt, nimmt das in einen kleineren Cylinder auslaufende Ende der Schraube auf und ist in einem auf der Fuſsplatte *P* befestigten hohlen Parallelepipedum *a*, dem Bolzenlager, nach dem Rande der Scheibe I_1 zu verschiebbar. Dadurch wird das erwähnte Ein- und Ausrücken der Schraube

Fig. 40.



aus ihren Mutterwindungen möglich gemacht. Das Ausrücken erfolgt nämlich durch das Niederrücken eines Hebels *H*, der seitlich an dem Bolzenlager drehbar, mit dem Bolzen aber durch einen Stift verbunden ist, auch mit einem Excentrik *c* ein Ganzes bildet, dessen Stützpunkt aber durch eine schmale Platte *h* an dem Bolzenlager gebildet wird. In diesem Falle wird der Abstand des Stützpunkts vom veränderlichen Drehpunkt am gröfsten. Das Einrücken der Schraubengänge in die Mutter geschieht durch eine Hebung des Hebels, wobei zugleich das freie Ende einer starken plattenförmigen Druckfeder ff_1, die an der Seitenebene der Grundplatte *P* festgeschraubt ist, gegen den Bolzen *b* tritt und denselben soweit vortreibt, bis die Gänge der Schraube in die Windungen der Mutter getreten sind. Die feine Einstellung des Mefsapparats geschieht dann durch Umdrehung der Schraube.

Es ergiebt sich leicht, dafs sowohl die sichere Hemmung des Mefsapparats, als dessen feine Einstellung lediglich davon abhängig ist, dafs die Schraubengänge genau in die Mutter greifen, in derselben auch verbleiben und die Druckfeder die nöthige Elasticität behält; Forderungen indessen, die nach langem Gebrauche des Apparats nicht immer zu erfüllen sein werden. Deshalb aber ist diese Hemmungsvorrichtung, wenngleich meistens die bequemste im Gebrauch, doch die am wenigsten zu empfehlende.

Zweiter Abschnitt.

Beschreibung, Prüfung und Berichtigung der Winkelmefs-Apparate.

Uebersicht derselben.

§. 95.

Die Mefsapparate der praktischen Geometrie, welche zur Bestimmung von Winkeln auf dem Felde dienen, zerfallen wieder in mehrere Classen.

1. Entweder gestatten sie die Bestimmung der Gröfse der Winkel im Gradmafse. In diesem Falle werden sie winkelmefsende Werkzeuge oder Winkelmefser im engeren Sinne des Wortes genannt. Hierzu können in dieser Beziehung auch die meisten der Reflexions- oder Spiegelinstrumente gezählt werden, obgleich sie keiner festen Unterlage bedürfen.

2. Oder von den Winkeln werden die Horizontalprojectionen durch Construction auf einer horizontal liegenden Zeichenebene bestimmt;

die hierzu dienenden Apparate bilden die winkelzeichnenden Werkzeuge. Auch sie setzen, wie die ersteren der winkelmefsenden Werkzeuge, eine feste Unterlage voraus.

3. Eine dritte Art der Mefsapparate mit fester Unterlage dient zur Bestimmung von Höhenunterschieden gegebener Punkte, die auf eingetheilten Mafsstäben im Längenmafs abgelesen werden. Sie bilden die Nivellierinstrumente mit Nivellierlatten.

§. 96.

Die winkelmefsenden Werkzeuge werden entweder zur Bestimmung der Horizontal- oder Azimuthalwinkel angewandt und können daher Azimuthalinstrumente genannt werden. Zu ihnen gehören die verschiedenen Arten der Theodolithe, gleichgültig, ob sie nur zur Mefsung der Horizontal-(Azimuthal-)winkel dienen, oder ob man zugleich an kleineren Höhenkreisen auch Höhenwinkel, zur Reduction der schiefliegenden Schenkellängen auf den Horizont, bestimmen kann.

Oder sie dienen vorzugsweise zur Mefsung der Höhenwinkel und lafsen die Mefsung von Horizontal- oder Azimuthalwinkeln nur untergeordnet erscheinen. Sie heifsen dann Höheninstrumente und finden ihre Anwendung, aufser in der Astronomie, nur in der höheren Geodäsie und auch hier nur beschränkt.

Haben die Winkelmefser aber zwei Kreise von gleichen oder fast gleichen Dimensionen, von denen der eine zur Mefsung der Horizontal-, der andere zur Mefsung der Verticalwinkel (in Zenithdistanzen) dient, so werden sie Azimuthal- und Höheninstrumente genannt. Zu ihnen gehören die astronomischen Theodolithe und die Universalinstrumente.

§. 97.

Die Reflexions- oder Spiegelinstrumente haben zwar ebenfalls einen eingetheilten Kreisrand und eine bewegliche Alhidade, enthalten aber aufserdem noch zwei Planspiegel oder dreiseitige Glasprismen, deren spiegelnde Ebenen nahezu eine parallele Lage haben, wenn der Indexpunkt der Alhidade auf dem Nullpunkt der Theilung steht, so dafs dann durch Drehung der Alhidade mit ihrem Spiegel oder Prisma die Gröfse des schiefliegenden Naturwinkels bestimmt werden kann. Der Kreisrand ist entweder nur ein Theil des Kreises oder ein Vollkreis, wonach dann Spiegelsextanten, Spiegeloctanten und Spiegel- oder Reflexionskreise und Prismenkreise unterschieden werden. Diese Apparate können auch als Höheninstrumente benutzt werden, erfordern dann aber noch die Anwendung eines Horizonts, der bei der Mefsung auf dem Festlande immer ein künstlicher ist.

Erstes Capitel.

Beschreibung, Prüfung und Berichtigung der Winkelmefser mit fester Unterlage.

I. Beschreibung der winkelmeßenden Werkzeuge.

A. Das Universalinstrument als Azimuthal- und Höhenapparat.

§. 98.

Der Begriff des Universalinstrumentes fordert nicht nur die Möglichkeit der Horizontal-, sondern auch der Verticalwinkelmefsung von verschiedenen Punkten des Limbus aus, um die Theilungsfehler der Kreise möglichst eliminieren zu können. Es setzt daher für beide Rotationen ein zweifaches Achsensystem voraus (§§. 83 u. 85) und fordert aufserdem die Möglichkeit der Beobachtung der Gestirne. Es mufs daher das Ocular des Fernrohrs nicht nur mit einem Sonnenglase versehen sein, sondern auch die Beleuchtung des Fadenkreuzes für nächtliche Beobachtungen gestatten; endlich auch mufs das Fernrohr selbst eine gleich bequeme Beobachtung für die Gestirne in jeder beliebigen Lage derselben an der Himmelskugel an verschiedenen Fäden des Fadennetzes (§. 40) möglich machen.

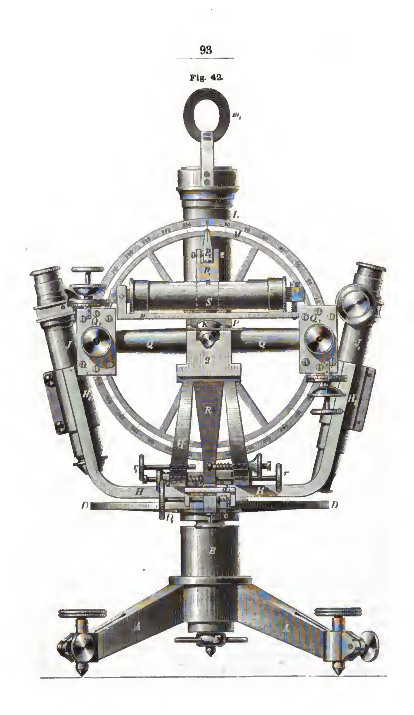
Die Figg. 41 u. 42 stellen die Vorder- und Seitenansicht eines von Meyerstein in Göttingen verfertigten Universalinstrumentes für geodätische und geodätisch-astronomische Beobachtungen in halber natürlicher Gröfse dar. Einen Verticaldurchschnitt der Haupttheile in der Vorderansicht enthält Fig. 30, welche hier zu vergleichen ist.

Mit der Grundlage des Instruments, dem durchbohrten Dreifufs AA steht die Büchse B in Verbindung, welche den unteren Konus C des Verticalzapfens CC_1 aufnimmt. Letzterer läfst daher, mit dem an der Flansche c befestigten Azimuthalkreise DD, in der Büchse B sich drehen; durch das Anziehen der Mutter E zwar auch an die Büchse und den Dreifufs sich anschliefsen, gestattet indessen keine feine Einstellung. Eine zweite Horizontal-Achsendrehung findet um den oberen Theil C_1 des Verticalzapfens durch die Büchse F (Fig. 30) mit den daran befestigten Stützen GG und dem Mikrofkopenträger H sammt seinen Schraubenmikrofkopen Statt. Büchse und Zapfen werden durch die Mutter c_1 und eine Feder gehalten, welche letztere auch eine geringe Senkung des Verticalzapfens mit dem Kreise in der Büchse B zuläfst. Der mittlere, plattenförmige Theil H des Mikrofkopenträgers verläuft nach beiden Seiten zu in zwei Arme, welche, knieförmig gebogen, als Rippen mit den aufgeschlitzten Hülsen H_1H_2 zur Aufnahme der Schraubenmikrofkope II_1 ein Ganzes ausmachen. Durch seitliche Klemmschrauben



Fig. 41.

Fig. 42



kann man die Mikrofkope, deren untere Enden noch Blenden zur Beleuchtung der Theilung enthalten, in den Hülsen feststellen (§. 69).

Die vertical auslaufenden Theile *gg* der Stützen enthalten die Achsenlager für die Rotationsachse *K* des Fernrohrs, deren eines in verticaler Richtung verstellbar ist und eine Stellschraube nebst zwei Zugschrauben enthält.

Zur Hemmung und Mikrometerbewegung des Mikrofkopenträgers gegen den Kreis dient ein Federmikrometer D_1 mit Klemmschraube und Halterplatte (vgl. §. 91 u. Fig. 36). Zwischen den Armen der zugehörigen Platte d_1 ist zugleich zwischen Schraubenspitzen eine Platte mit dem Indexstrich, sowie auf d_1 der Arm der Loupe d_2 zum Ablesen der Theilstriche des Limbus angebracht.

Anmerkung. Die Büchse *F* (Fig. 30) ist in Figg. 41 u. 42 und das Mikrofkop Q_1 in Fig. 41 nicht dargestellt.

§. 99.

Der zweite, obere Theil des Universalinstruments besteht aus der stählernen Fernrohrachse *K*, dem an ihrem einen Ende an einer Flansche *k* befestigten Fernrohre *L* und den die Achse umschliefsenden Theilen. Durch die excentrische Lage des Fernrohrs wird nicht nur eine zweckmäfsige Ablesungsart des Azimuthal- und Verticalkreises durch Schraubenmikrofkope, sondern auch eine bequeme Einstellung auf Objecte bei Höhenmefsungen gewonnen. Für kleine Zenithdistanzen und Sonnenbeobachtungen wird vor die mit Nuthen versehene Ocularplatte *l* ein prismatisches Ocular l_1 (§. 52) mit einem Blend(Sonnen-)glase l_2 geschoben. Die, die Fernrohrachse umschliefsenden Theile sind folgende drei. Vor einer Flansche k_1 liegt der Verticalkreis *M* mit seiner Büchse *N*. Durch das Anziehen der Mutter *O* kann der Kreis an der Rotationsachse befestigt und durch Lösen derselben gegen die Schraubenmikrofkope verstellt werden, wodurch also eine Bestimmung der Verticalwinkel von verschiedenen Punkten des Limbus aus gewonnen wird. Eine zweite, die Achse umschliefsende Hülse *P* enthält nicht nur die beiden Konus *QQ* des Mikrofkopenträgers, sondern auch den Arm *R* zur Anschliefsung des Mikrofkopenträgers an die eine der Stützen *G*, so wie eine aufgeschraubte Platte *p* als Grundlage der Versicherungslibelle *S*. Die Einstellung der Luftblase derselben vor der Winkelmefsung geschieht durch die auf den Arm *R* wirkende Mikrometerschraube *r* nebst Spiralfeder, worüber Fig. 38 zu vergleichen ist. Die erwähnten Konus endigen in Hülsen zur Aufnahme der Schraubenmikrofkope $Q_1 Q_2$ mit ihren Blenden. Die Büchse *P* wird durch eine Flansche k_2 der Horizontalachse und Feder gehalten; durch letztere daher auch eine geringe Drehung der Büchse um die Achse ermöglicht. Zur Hemmung und Mikrometerbewegung der Fernrohrachse in der

vorerwähnten Büchse P endlich dient der Arm T des geschlofsenen Ringes T_1 nebst Druckschraube t und der zugehörigen Mikrometerschraube sammt Zubehör (Fig. 38). Zu dem Einstellen, nach erfolgtem Umlegen dieses Obertheils, dessen öftere Wiederholung bei so vielen Mefsoperationen ganz unentbehrlich ist und in einem Bruchtheile einer Minute bewerkstelligt werden kann, enthält die andere der Stützen an der entsprechenden Stelle noch eine zweite Mikrometerschraube nebst Spiralfederhalter, zwischen welche der Arm R zu liegen kommt, während der Hemmungsarm T alsdann zwischen die Mikrometerschraube r_1 und den Spiralfederhalter an der ersteren Stütze sich legt. Ein auf P angeschraubter Arm p_1 trägt, wie beim Azimuthalkreise, zwischen Schraubenspitzen die Platte p_2 mit dem Indexstrich und zugleich den Arm der Loupe m zum Ablesen der Theilstriche des Limbus des Verticalkreises M.

Endlich dient zum Einstellen der Verticalachse CC_1 die auf die Zapfen der Horizontalachse K gestellte Aufsetzlibelle U, welche durch die auf die oberen Flächen der Lager geschobenen und mit Einschnitten versehenen Deckplatten vor dem Herunterfallen gesichert wird. Der Werth eines Theiles der Libelle = 15",44, über dessen Bestimmung H. g. I. S. 236 zu vergleichen ist.

§. 100.

Beide Kreise, deren Mittelstücke mit den Rändern durch Speichen verbunden sind, haben einen Durchmefser von 5 Zoll und sind unmittelbar in Sechstelgrade getheilt, zu deren Ablesung die erwähnten Indexplatten dienen. Für das Intervall von 10 Minuten giebt jedes der Schraubenmikrofkope nahezu 2 Umdrehungen an, mithin 1 Trommeltheil nahezu 5 Sekunden, der aber noch bequem in 10 gleiche Theile getheilt werden kann. Ueber die genaue Bestimmung desselben an jeder beliebigen Stelle des Limbus jedes Kreises und für jedes Mikrofkop ist §. 70 zu vergleichen.

Das Objectiv des achromatischen Fernrohrs hat 12 Linien Oeffnung; die Vergröfserung desselben = 25, und sein Ocular ein Huyghenssches. Das Fadennetz besteht aus 5 Verticalfäden, die in der Mitte von 2 nahe zusammen stehenden Horizontalfäden geschnitten werden. Zur Beleuchtung der Fäden dient ein Illuminator m_1, dessen Ring auf die Objectivrohrfafsung geschoben wird und dessen spiegelnde Randflächen dann die durch die seitlich aufgestellte Lichtflamme erzeugten Lichtstrahlen in das Innere des Fernrohrs senden.

Ueber eine noch zweckmäfsigere Beleuchtung vgl. m. H. g. I. S. 189, §. 154. Eben daselbst S. 219 u. f. findet man das Nöthige über die Bestimmung des Abstandes der Seitenfäden vom Mittelfaden und die

Reduction der an den ersteren beobachteten Durchgänge auf den Mittelfaden.

Der Apparat wird zum Transport in einen Kasten verpackt, dessen unterer Raum den unteren Theil, der obere den oberen Theil und die Libelle aufnimmt.

Anmerkung. Prof. Dr. Klinkerfues drückt sich in Schumacher's astronom. Nachrichten Nr. 1619 über die Leistungsfähigkeit des vorhin beschriebenen Universalinstruments, nach den damit angestellten Untersuchungen auf der Göttinger Sternwarte, folgendermafsen aus.

..... Die Ablesung geschieht sowohl bei dem Horizontal- als bei dem Höhenkreise durch zwei Mikrofkope und gewährt so grofse Schärfe, dafs der wahrscheinliche Fehler einer von mir gemachten Einstellung eines Mikrofkops 1 Sekunde nicht übersteigt. Für den Verticalkreis bestimmte ich, um ein Urtheil über die Theilungsfehler zu gewinnen, von 10 zu 10° die Differenz der Mikrofkope in der Weise, dafs, wenn der Nullpunkt des einen durch die feine Bewegung des Kreises genau auf einen Theilstrich gebracht worden, die Mikrometerschraube des anderen eingestellt wurde, dabei nach meiner Gewöhnung mit der Ablesung 5° beginnend und mit 355° schliefsend. Diese Operation lieferte mir die Excentricität des Kreises $e = 22{,}35$ Sekunden. Die Differenz der Mikrofkope II und I schliefst sich der Formel

$$\text{II} - \text{I} = -248'',77 + 44{,}70 \sin (k - 56^{\circ}\, 17'\, 9'')$$

an, wobei k die Kreisablesung bedeutet. Die Vergleichung dieser Formel mit den wirklich gefundenen Differenzen liefert den wahrscheinlichen Fehler des Mittels aus 2 Mikrofkopen = 1'',88, zu welchem Betrage Theilungs- und Einstellungsfehler zusammen wirken. Ich brauche kaum zu bemerken, dafs diefs Resultat ein sehr befriedigendes ist.

Den Azimuthalkreis einer gleichen Untersuchung zu unterwerfen, fand ich keine Mufse, da der Ablieferungstermin des Instruments herangekommen; jedoch bot sich noch Gelegenheit, die Leistung bei einer Zeitbestimmung zu versuchen. Am 25. September d. J. beobachtete ich an den 5 Fäden, welche zu diesem Zwecke passend eingespannt sind, die Sterne γ, α, β Aquilae und α Andromedae, welche unter Zuziehung des Polaris zur Orientierung der Reihe nach folgende Uhrcorrectionen ergeben:

aus	γ Aquilae	− 1'',24
	α —	− 1,27
	β —	− 1,26
	α Androm.	— 1,34.

Die Uebereinstimmung ist weit gröfser, als irgend von einem Instrumente dieser Dimensionen erwartet werden konnte. Auch selbst die Mitwirkung eines günstigen Zufalls abgezogen, würde die Schärfe der Bestimmung den Anforderungen der Gradmefsungsarbeiten gewifs vollkommen genügen.

B. Die Azimuthal-Instrumente.

A. Der Repetitions- und Multiplications-Theodolith).*

§. 101.

Der in Fig. 43 dargestellte Apparat bezeichnet eine Construction, mittelst welcher die Horizontalwinkel nicht nur nach der einfachen,

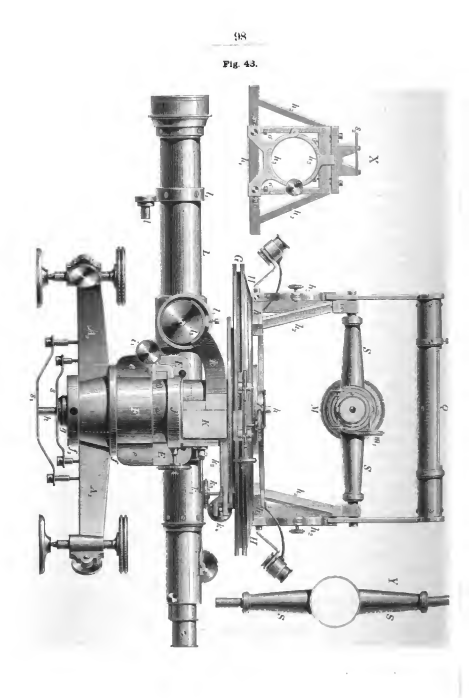
---

*) Von θέα, die Betrachtung, ὁδός, der Weg, auch Mittel und Weg, um etwas auszurichten und λίθος, der Stein.

sondern auch nach der doppelten oder Borda'schen Repetitions-(Multiplications-)Methode gemefsen werden können. Er bildet in der Hauptsache einen Theil eines Universalinstruments älterer Construction, indem, nur den Dreifufs ausgenommen, der Apparat so mit einer um einen Zapfen drehbaren Säule in Verbindung gebracht werden kann, dafs dasselbe Kreissystem, welches in Fig. 43 zur Mefsung der Horizontalwinkel angewandt wird, dann zur Verticalwinkelmefsung dient (vgl. Fig. 100 in II. g. I.). Deshalb erscheinen einzelne Theile, welche nur zur erwähnten Zusammensetzung dienen, hier als überflüfsig und es bildet hier der durchbohrte Dreifufs $A_1 A_1$ mit seinen Stell- und Klemmschrauben und den Tragfedern $s s_1$ einen Theil für sich. Mit ihm wird der untere in den Dreifufs gesteckte Theil der äufseren Centralbüchse F durch die aufgeschraubte Mutter f_2 verbunden. Die Centralbüchse nimmt die durchbohrte Kreisachse von Rothgufs nebst dem daran befestigten Limbuskreis G, letztere aber den stählernen Centralzapfen mit dem Alhidadenkreise H auf. Die erstere Achse g ruht auf der durchbohrten Tragfeder s, der Zapfen h auf der Feder s_1. Die Mittelstücke des Kreises und der Alhidade sind mit ihren konisch abgedrehten Rändern nicht durch Speichen verbunden, sondern bilden ausgedrehte Scheiben; auch wird der Kreisrand mit seinem silbernen Limbus von dem Borde der Alhidade überragt, wodurch die Theilung vor Beschädigung geschützt wird. Die Silberplatten der vier Verniers sind nicht in den Rand der Alhidade eingelafsen, sondern so in Ausschnitten derselben mit Zug- und Druckschrauben befestigt (vgl. H. g. I. Fig. 61), dafs ihre oberen konischen Flächen mit der des Kreisrandes in eine konische Fläche fallen. Mittelst geschliffener Gläser, welche in Rahmen befestigt sind, wird auch den Verniersplatten Schutz gewährt.

Auf das obere Ende der Centralbüchse F legt sich um einen die Kreisachse umgebenden Mantel, zur Hemmung und mikrometrischen Bewegung des Kreises, der geschlofsene Ring I mit der Druckschraube i und die Mikrometerschraube i_1. Um die, oberhalb des Ringes hervortretende, in zwei konische und eine zwischenliegende cylindrische Fläche abgedrehte Kreisachse, legt sich die aus zwei Stücken bestehende und durch vier Zugschrauben zusammengefügte Büchse K. Die eine Hälfte derselben läuft in einen abwärts gebogenen Arm k aus, welcher die Büchse k_1 für das s. g. untere Fernrohr L enthält; an der anderen ist der Arm k_2 befestigt, welcher das zur Hemmung und Mikrometerbewegung dienende Mikrometerwerk $k_3 k_4$ enthält. Hierdurch kann also das untere Fernrohr nicht nur an den Limbuskreis geschlofsen, sondern auch unabhängig von demselben rund um dessen Achse bewegt werden, Bedingungen, welche die s. g. Multiplicationsmethode der Winkelmefsung fordert. Da diefs Fernrohr seitlich von dem Achsensystem des Hori-

Fig. 43.



zontalkreises angebracht ist, so dient zur Balancierung ein in der Zeichnung nicht sichtbares Gegengewicht, welches auf einer Eisenstange befestigt wird. Denkt man sich das untere Fernrohr nebst Zubehör hinweg, so stellt der Apparat einen Repetitionstheodolith dar. Das Mikrometerwerk zur Hemmung und feinen Einstellung der Alhidade gegen den Limbuskreis besteht, wie das vorhin erwähnte, aufser der Mikrometerschraube, aus der Halterplatte mit der Klemmschraube. Die drei genannten Mikrometerwerke enthalten die Differenzialschraube als Mikrometerschraube.

§. 102.

An zwei diametral gegenüberliegenden Stellen der Alhidade H sind die Lager $h_1 h_1$ für die Stützen $h_2 h_2$ des Hauptfernrohrs M befestigt (m. vgl. H. g. I. Fig. 61). Die Stützen enthalten die Lager für die Stahlzapfen der Rotationsachse SS des Fernrohrs; das eine Lager ist durch 2 Stellschrauben in verticaler Richtung verstellbar, und kann durch 2 Zugschrauben mit der Stütze fest verbunden werden. Die auf die Zapfen der Rotationsachse gesetzte Röhrenlibelle Q dient zum Einstellen des Apparats.

Das Fadennetz des Huyghens'schen Oculars des Hauptfernrohrs besteht aus 2 Horizontal- und 2 sie senkrecht schneidenden Verticalfäden, die von der Mitte einen gleichen Abstand haben, so dafs das Bild des Objects in den quadratischen Raum gebracht wird.

Der 10zöllige Theilungsdurchmefser des Kreises ist unmittelbar in Sechstelgrade getheilt und mit 4 Verniers versehen, die 10 Sekunden angeben, von denen aber noch 3 Sekunden sicher geschätzt werden können. Der zum Ablesen der Theilung um einen Ansatz der Alhidade sich bewegende Loupenring hat 2 Arme mit Loupen.

Der Apparat, von Breithaupt in Cassel angefertigt, wird von einem Kasten aufgenommen, in welchem das Fernrohr und die Libelle an besonderen Stellen befestigt werden.

Die Construction eines astronomischen Theodoliths mit gebrochenem Fernrohr und anderer Repetitionstheodolithe findet man in H. g. I. Figg. 104, 105, 108—112.

B. Der einfache Theodolith.

§. 103.

Er unterscheidet sich von dem vorhergehenden Theodolith nur durch das einfache Achsensystem des Horizontalkreises. Bei gröfseren Dimensionen ist der Limbuskreis stets an einer Flansche der Dreifufsbüchse, die Alhidade an einer Flansche der stählernen Verticalachse befestigt; bei kleineren kann der erstere mit dem Dreifufs ein Ganzes bilden und die mit der Alhidade verbundene Büchse um einen Vertical-

7*

zapfen sich drehen, der von dem Dreifufs ausgeht. Durch solche Einrichtungen wird zwar den Theodolithen mehr Einfachheit und Festigkeit verliehen, allein man verliert dadurch die Möglichkeit, ohne Verstellung des Dreifufses von verschiedenen Punkten des Limbus aus die Winkel zu mefsen.

1. Der grofse Theodolith.

§. 104.

In Fig. 44 ist im Drittel der wahren Gröfse ein noch zu gröfseren Mefsungen dienender Theodolith des Wiener polytechnischen Instituts in der Seitenansicht dargestellt, wozu Fig. 28 den Verticaldurchschnitt enthält. Der Rand des Horizontalkreises $A\,A$ sowohl, als der des Alhidadenkreises $D\,D$ mit seinen vier Verniers ist mit dem konischen Mittelstück durch acht Speichen verbunden; der stählerne Centralzapfen, der auf der dreiarmigen Feder d ruht, wird durch die Mutter c gegen den Dreifufs gehalten. Auf der Alhidade sind die Grundplatten E für die Stützen $F\,F$ und die Achsenlager der Umdrehungsachse des Fernrohrs befestigt, von welchen letzteren das eine durch zwei Stellschrauben $g_1\,g_1$ verstellt, durch die Zugschrauben $g\,g$ aber befestigt werden kann. In der Zeichnung ist das entgegengesetztliegende Lager als verstellbar dargestellt.

An der Rotationsachse ist der Verticalkreis J befestigt, während die an dem nicht verstellbaren Achsenlager angebrachten federnden Platten $K\,K$ die Rahmen für die beiden Verniers $v\,v$ und die Blendungen $k\,k$ tragen. Das Fernrohr H kann mit dem Ocularende durchgeschlagen werden, daher der Apparat ein Compensationstheodolith ist.

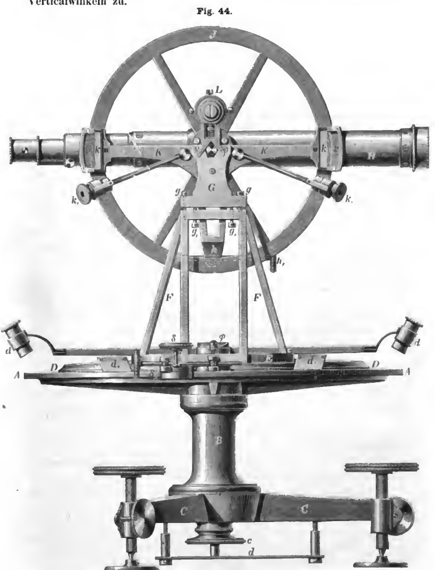
Zum Einstellen der Verticalachse dient die mit den Correctionsschrauben versehene Röhrenlibelle L.

Zur Hemmung der groben Bewegung der Alhidade und zur feinen Einstellung derselben dient die Klemmschraube δ mit der Halterplatte und die Mikrometerschraube δ_1. Die Hemmungsvorrichtung für die Fernrohrachse besteht in einem geschlofsenen Ringe mit einer Druckschraube, zur feinen Einstellung dient die Klemme an dem Arme h und die Mikrometerschraube h_1.

Der silberne Limbus des zwölfzölligen Theilungsdurchmefsers des Horizontalkreises ist unmittelbar von 5 zu 5 Minuten getheilt, jeder der mit Blenden $d_1\,d_1$ versehenen 4 Verniers giebt 4 Sekunden an. Der Theilungsdurchmefser des Verticalkreises beträgt 8 Zoll, sein silberner Limbus ist unmittelbar in Sechstelgrade getheilt, während jeder der beiden Verniers 10 Sekunden angiebt. Zum genauen Ablesen der Theilung

dienen die Loupen $d\,d$, $k_1\,k_1$. Die Bezifferung der Theilung an dem Verticalkreise läfst direct nur die Bestimmung der Zenithdistanzen bei Verticalwinkeln zu.

Fig. 44.



Ueber die Verlegung der Last des Obertheils des Instruments auf die Verticalachse ist §. 82 zu vergleichen.

Der Transport des Apparates erfolgt in 2 Kasten, von welchen der eine seinen Obertheil, der andere den Untertheil und die Libelle aufnimmt.

2. Der kleine Theodolith zur Detailaufnahme.

§. 105.

Ein solcher, von Meyerstein in Göttingen angefertigter, wird in Dreiviertel der natürlichen Gröfse in Fig. 45 in vorderer Ansicht und theilweise im Durchschnitt, in Fig. 46 in der Seitenansicht mit weggelafsenen Loupen dargestellt.

Der scheibenförmige, Innen ausgedrehte und in der Mitte durchbohrte Limbuskreis *A A* bildet mit den drei Armen des Dreifufses ein Ganzes. Die Durchbohrung nimmt die konische Verticalachse *C* auf, deren Flansche an der Unterfläche des Dreifufses befestigt ist, nach Unten aber in die Oese *D* zur Befestigung auf dem Stativkopfe ausläuft.

An der Flansche *e* der Büchse *E* ist die scheibenförmige Alhidade *FF* befestigt; erstere ruht aber auf einer kugelcalotteförmigen Feder, welche den Zapfen umgiebt und auf der Kreisfläche liegt. Mit der Alhidade ist wieder die Fufsplatte *G* der rahmenförmig ausgeschnittenen Stützen *HH* verbunden, deren obere Theile die Lager *JJ* für die Zapfen der Fernrohrachse bilden. Das eine der Lager ist durch Stell- und Zugschrauben $i\,i_1$ verstellbar. Durch die Mutter e_1 und die unterliegende Feder kann die Bewegung der Alhidade moderiert werden.

Durch die Röhrenlibelle *M* geschieht die Einstellung des Verticalzapfens. Zur Hemmung der groben Horizontalbewegung und zur feinen Einstellung der Alhidade dient das Federmikrometer mit der Klemmschraube *N* und der Mikrometerschraube *O*. Bei der verticalen Bewegung besteht die Einrichtung wieder aus dem geschlofsenen Ringe mit der Druckschraube *P*, der Mikrometerschraube *Q* und der Mutter *R* mit der zugehörigen Spiralfeder, zwischen welchen der Hemmungsarm *S* liegt.

Das Fernrohr *K* mit Huyghens'schem Ocular hat 6 Zoll Brennweite, 9 Linien Oeffnung und eine 20malige Vergröfserung.

Der innere Durchmefser des silbernen Limbus des Kreises beträgt 4 Zoll, die Theilung ist bis auf Viertelgrade ausgeführt, die beiden Verniers geben 20 Sekunden an, gestatten aber noch eine sichere Schätzung bis auf 10 Sekunden. Ein kleiner Verticalkreis, oder ein Theil desselben an der Fernrohrachse, zum Mefsen der Elevations- und Depressionswinkel auf unebenem Terrain ist leider nicht angebracht.

Zum Verpacken und Transport des Instruments dient ein bequem eingerichteter Kasten.

Anmerkung. Eine Beschreibung des Astrolabiums darf hier wohl aus dem Grunde übergangen werden, als dasselbe, selbst in den verbefserten Constructionen, durch die für die Winkelmefsung viel zweckmäfsiger construierten Theodolithe mit vollem Rechte schon längst ersetzt ist. Ein verbefsertes Astrolabium von Joh. Tob. Mayer findet der Leser in dessen Unterricht zur praktischen Geometrie I. S. 376. Auch vgl. m. H. g. I. S. 310.

Fig. 45.

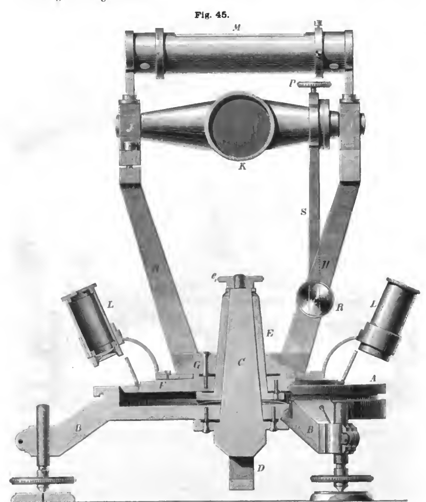




Fig. 46.

II. Prüfung und Berichtigung der winkelmeſsenden Werkzeuge.

§. 106.

Schon wegen der nothwendigen Zusammensetzung der geometrischen Meſsapparate aus einzelnen Stücken und der dadurch mehr oder weniger entstehenden Mängel bei der idealen Horizontal-, Vertical- und concen-

trischen Bewegung einzelner Theile des Instruments gegen andere, kann man keinen der Meſsapparate, wenn er nicht ganz einfacher Art ist, als absolut fehlerfrei betrachten. Es ist daher jeder derselben vor dem Gebrauche auf das Sorgfältigste zu untersuchen und es sind die sich zeigenden Fehler, falls sie nicht durch die Art der Beobachtungen eliminiert werden können, durch die zu diesem Zwecke vorhandenen Correctionsvorrichtungen zu verbeſsern. Aber auch schon durch den längeren Gebrauch eines Meſsapparats und insbesondere durch den Transport desselben von einem Orte zum anderen werden selbst berichtigte Fehler in kleinerem oder gröſserem Maſse aufs Neue wieder hervortreten, so daſs also auch in diesen Fällen nochmalige Prüfungen und etwaige Berichtigungen des Apparats unerläſslich werden.

Die Methoden zur Untersuchung einzelner Fehler können zwar verschieden, zusammengesetzterer oder einfacherer Art sein; indessen muſs dabei immer das Princip befolgt werden, nur von dem Grade der Genauigkeit der zu machenden Beobachtungen die Methode der Untersuchung abhängig zu machen, also diejenige Methode anzuwenden, welche den Fehler am sichersten erkennen läſst.

A. Prüfung und Berichtigung der Fehler des Universalinstruments.

§. 107.

Mag das Universalinstrument zum Meſsen der Horizontal- oder Verticalwinkel angewandt werden, so muſs die Collimationslinie des Fernrohrs bei seiner Rotation um die Horizontalachse, einen durch das Zenith des Beobachtungsortes gehenden gröſsten Kreis der Himmelskugel beschreiben. Es müſsen daher

1) die beiden stählernen Zapfen der Rotationsachse richtige normale Cylinder bilden, so daſs die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Durchschnittskreise derselben die constante Rotationsachse des Fernrohrs angiebt.

2) Muſs nicht nur die erste oder Verticalachse wirklich vertical, sondern auch die zweite oder Horizontalachse wirklich horizontal sein. Dieſs setzt aber nicht nur die Berichtigung der auf die Horizontalachse gestellten Röhrenlibelle, sondern auch die gleiche Höhe der Achsenlager und den gleichen Durchmeſser der Zapfen, oder doch eine genaue Bestimmung der Neigung der Rotationsachse und die Kenntniſs des Unterschiedes der Durchmeſser ihrer beiden Zapfen voraus. Bei Verticalwinkelbestimmungen läſst sich der Einfluſs, der durch die Nichterfüllung der letzteren Bedingungen sich äuſsern würde, durch die Umlegung des Obertheils des Instruments in seinen Achsenlagern unschädlich machen.

3) Muſs der Collimationsfehler des Fernrohrs gleich Null sein (§. 111).



1. Bestimmung der Gestalt der Zapfen.

§. 108.

Von der cylindrischen Gestalt der Zapfen kann man sich durch die in Bezug auf die seitliche Correction genau berichtigte Röhrenlibelle überzeugen, die man auf die Zapfen setzt und mit den Stellschrauben des Dreifufses zum Einspielen bringt. Dann darf bei der allmäligen Umdrehung des Fernrohrs die Blase derselben keine Abweichung zeigen.

Für gröfsere Instrumente wendet man ein Fühlhebel-Niveau an, worüber H. g. I. S. 208 zu vergleichen ist.

2. Berichtigung der Anfsetzlibelle der Horizontalrotationsachse.

§. 109.

Man wendet bierbei zunächst das im §. 32, 2. angegebene Verfahren au, indem man durch Drehung des Obertheils die Libelle in die Richtung des einen Armes des Dreifufses uud durch die zugehörige Stellschraube ihre Luftblase in die Mitte bringt. Nur ist dabei anzurathen, vorher die Verticalachse des Instrumeuts wenigstens nahezu vertical zu stellen, damit nach dem ersten Umstellen der Libelle die Luftblase derselben in ihrer ganzen Länge sichtbar bleibt.

Die Umsetzuug uud Berichtigung der Libelle wird man so lange zu wiederholeu haben, bis die Luftblase vor und nach dem Umsetzen ihre Stellung nicht ändert.

Dann erfolgt noch die Correction in Bezug auf die seitliche Verschiebung der Libelle nach §. 32, 3.

3. Berichtignng der nngleichen Höhe der Achsenlager der Horizontalrotationsachse und genane Einstellung der Verticalachse.

§. 110.

1. Dreht man nach der Berichtigung der Libelle den Obertheil des Universalinstruments um 180⁰ und verändert die Luftblase ihren vorigen Stand, so haben die Achsenlager ungleiche Höhe. Man wird daher die Hälfte der Abweichung an der betreffenden Stellschraube des Dreifufses, die audere Hälfte an den Correctionsschrauben des beweglichen Achsenlagers verbefsern und diefs Verfahren so lange wiederholen, bis keine Abweichung mehr sich zeigt.

2. Bei der excentrischen Lage des Fernrohrs kann man die Untersuchung unabhängig von der Libelle auch dadurch vornehmen, dafs man das Fadenkreuz längs eines straff ausgespannten Verticalfadens auf und nieder bewegt und untersucht, ob dasselbe immer das Bild des

Fadens trifft. Oder man bringe zwischen ein hoch belegenes Object O und das Fernrohr so eine horizontal liegende spiegelnde Ebene, also am zweckmäfsigsten einen **künstlichen Horizont** (§. 158), dafs das reflectierte Bild von O im Fernrohr wahrgenommen werden kann, richte dann das Fadenkreuz auf O und neige das Fernrohr dem Horizonte zu. Wird dann das Bild von O von dem Fadenkreuze getroffen, so ist die Rotationsachse normal zur Verticalachse. Eine sich zeigende Abweichung zeigt dann wieder den doppelten Fehler, der wie vorhin zu verbefsern ist.

3. Um nun den Verticalzapfen des Instruments vertical zu stellen, wird man, nachdem die Libelle in der im §. 109 angenommenen Lage derselben gegen die Arme des Dreifufses zum Einspielen gebracht ist, den Obertheil des Apparates um 90^0 nach der einen oder anderen Seite zu drehen, mit den Stellschrauben des Dreifufses die Libelle zum Einspielen zu bringen und diefs abwechselnde Drehen aus der zweiten Lage in die erste und umgekehrt so lange zu wiederholen haben, bis der Stand der Luftblase keine Abweichung mehr zeigt. Das Verfahren wird erleichtert bei Stellschrauben, deren Kopf mit einer Eintheilung versehen ist.

4. Bestimmung des Collimationsfehlers des Fernrohrs und Berichtigung der Stellung des Fadenkreuzes.

§. 111.

Bildet die Collimationslinie des Fernrohrs mit der Rotationsachse einen Winkel $90^0 \pm c$, so wird der kleine Winkel c der **Collimationsfehler** des Fernrohrs genannt.

1. Dieser wird am sichersten nach **Bessel's** Vorschrift durch Anwendung zweier s. g. **Hülfsfernröhre** gefunden, von denen Fig. 47 das eine in der Seitenansicht in halber wahrer Gröfse darstellt. Die Büchse des Dreifufses AA nimmt den konischen Verticalzapfen mit den Stützen B (von denen nur die eine sichtbar ist) für das Fernrohr C auf, das, wie beim Theodolith, mit den stählernen Zapfen seiner Rotationsachse in den Lagern der Stützen liegt. Zur Hemmung der groben Horizontalbewegung dient ein Ring D mit der Druckschraube d, während durch die Mikrometerschraube d_1 und die plattenförmige Feder d_2, die gegen den Anschlagzapfen d_3 sich legt, die feine Achsendrehung bewirkt wird. Für die Verticalbewegung dient der Klemmring E nebst der Klemmschraube e zur Hemmung der groben, die Mikrometerschraube F und die zur Spiralfeder gehörige Mutter f, welche gegen den Arm E_1 wirken, zur feinen Bewegung. Durch c ist die an einem Ringe c_1 befindliche Blende bezeichnet, welche zur Kenntlichmachung des Fadenkreuzes dient und, um c_2 drehbar, in die entsprechende Lage gebracht

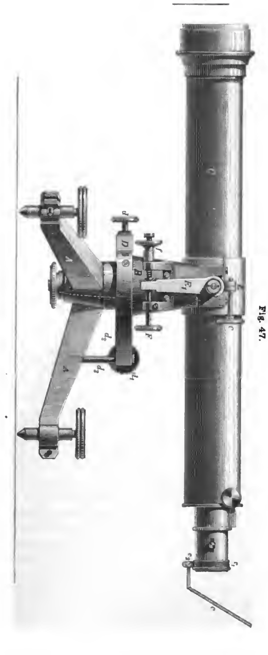


Fig. 47.

werden kann. Nachdem man nämlich sowohl die Auszüge der Hülfsfernröhre, als auch den Auszug des Fernrohrs des Universalinstruments so gestellt hat, dafs von einem sehr entfernten Objecte, am zweckmäfsigsten von einem Sterne, ein vollkommen reines Bild wahrgenommen wird, auch die Fadenkreuze in gehöriger Reinheit erscheinen, stellt man die Hülfsfernröhre mit ihren Objectiven so einander gegenüber, dafs die Fadenkreuze sich decken, also die Collimationslinien eine Gerade bilden. Darauf richtet man bei Anwendung der Mikrometerwerke das Fernrohr des zwischen die Hülfsfernröhre gebrachten Universalinstruments so auf das eine der ersteren, dafs die Fadenkreuze beider Fernröhre sich decken und dreht das Fernrohr mit seiner Rotationsachse um 180° (schlägt dasselbe durch), so mufs sein Fadenkreuz das des andernHülfsfernrohrs

decken. Zeigt sich hierbei eine Abweichung, die an dem Horizontalkreise abgelesen werden kann, so ist die Hälfte derselben an den Stellschräubchen der Ocularblendung zu verbefsern und diefs Verfahren noch so oft zu wiederholen, bis keine Abweichung mehr sich zeigt.

2. Ist man nur im Besitz eines Hülfsfernrohrs, so richte man dasselbe auf ein entferntes Object und stelle das Universalinstrument so vor das erstere, dafs die Collimationslinien beider Fernröhre eine Gerade bilden. Schlägt man dann das Fernrohr des Universalinstrumentes durch, so zeigt die etwaige Abweichung seines Fadenkreuzes vom Bilde des Objects in horizontaler Richtung wieder den doppelten Collimationsfehler an, den man wieder wie vorhin zu verbefsern hat. Diese Methode wurde zuerst von Bohnenberger angegeben.

Andere Methoden zur Bestimmung des Collimationsfehlers werden später angegeben werden, lafsen sich aber wegen der excentrischen Lage des Fernrohrs beim Universalinstrumente zweckmäfsig nicht anwenden.

3. Die richtige Stellung der Fadenkreuzplatte gegen das Ocular erfährt man durch das im §. 53 angegebene Verfahren. Ob zum Zwecke der Horizontalwinkelmefsung die Verticalfäden des Fadennetzes wirklich vertical sind, untersucht man, wenn man die Fäden, nachdem die Verticalachse des Instruments genau vertical gestellt ist, auf einen vertical stehenden Gegenstand, z. B. auf die scharfe Kante eines Gebäudes richtet und untersucht, ob die Fäden damit zusammenfallen, oder nicht. Im letzteren Falle geschieht die Verbefserung durch die kleinen Stellschrauben, die an dem Ende der Objectivröhre sich befinden und gegen den Stahlrücken treten.

Soll das Universalinstrument zu Sternbeobachtungen angewandt werden, so müfsen die beiden Horizontalfäden des Fadennetzes eine dem Himmelsäquator parallele Lage haben. Dazu benutzt man am zweckmäfsigsten einen Aequatorialstern, den man am Rande des Gesichtsfeldes des Fernrohrs zwischen die beiden Fäden bringt und der dann durch das ganze Gesichtsfeld sich parallel den Fäden fortbewegen mufs. Die Verstellung der Ocularröhre geschieht wie vorhin.

5. Berichtigung der Versicherungslibelle des Mikrofkopenträgers.

§. 112.

Ist die Verticalachse des Universalinstruments nach §. 110, 3. vertical gestellt und die Luftblase der Versicherungslibelle mittelst der zugehörigen Mikrometerschraube zum Einspielen gebracht, so mufs dieselbe bei einer Horizontalbewegung des Obertheils des Instruments ihren Stand unverändert beibehalten.

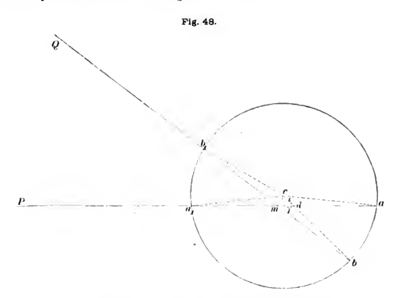
Bei dieser Prüfung bringe man den Verticalkreis in eine mit dem einen Arme des Dreifußes parallele Lage und die Luftblase der Libelle durch die erwähnte Mikrometerschraube zum Einspielen. Dreht man nun den Obertheil um 180° und verändert dabei die Luftblase ihren Stand, so wird die eine Hälfte der Abweichung an der genannten Mikrometerschraube, die andere Hälfte an der Correctionsschraube der Libelle verbeßert. Dasselbe Verfahren wird bei einer Lage des Obertheils des Instruments wiederholt, welche gegen die erstere normal ist.

6. Der Excentricitätsfehler bei den getheilten Kreisen.

§. 113.

Ein fast bei allen getheilten Kreisen vorkommender Fehler ist der Excentricitätsfehler, daß nämlich die mathematische Achse des Zapfens der Alhidade oder des Mikroßkopenträgers nicht durch den Mittelpunkt des Limbuskreises geht.

Fig. 48.



Wird zunächst vorausgesetzt, daß die Alhidade nur einen Vernier (oder ein Schraubenmikroßkop) enthält, deren Durchgangspunkt in Fig. 48 der Punkt m ist, während c den Mittelpunkt des Limbus bezeichnet, so stellt $cm = e$ die Excentricität des Kreises dar. Ist der Winkel zwischen den Objecten P und Q zu bestimmen, wobei Pm auch die Horizontale

bei einem Verticalkreise bezeichnen kann, so wird bei der Einstellung des Fernrohrs auf die Objecte P und Q, oder bei der Drehung der Alhidade nach P und Q, die Gröfse des Winkels $PmQ = amb = \gamma$ sein, durch die Ablesung des Verniers oder Schraubenmikrofkops bei a und b aber der Winkel $acb = c$ erhalten, welcher nur dann das Mafs des Winkels γ ist, wenn m in c liegt. Der durch die Excentricität veranlafste Fehler f ist daher $= \gamma - c$.

In den Dreiecken cda und mdb ist nun

$$\gamma + b = c + a,$$

folglich
$$f = \gamma - c = a - b.$$

Nun läfst sich zwar, wenn man $cm = e$, und aufserdem den Winkel $acm = \varphi$ als bekannt annimmt, ein Ausdruck für f ableiten, der dazu dienen könnte, um bei gewissen Voraussetzungen für φ und e einen Aufschlufs über die Gröfse von f zu erhalten, allein für die Winkelbestimmung selbst ist derselbe ohne Interesse.

Um die Kenntnifs der Excentricität e entbehren zu können, setzt man die Alhidade der Winkelmefser aus zwei gegenüberstehenden Armen oder aus einem ganzen Kreise zusammen und bringt an jedem Ende des Durchmefsers, der durch den Drehungspunkt der Alhidade geht, einen Vernier oder ein Schraubenmikrofkop zum Ablesen der eingestellten Richtungen an. Dann ist das arithmetische Mittel der aus der Ablesung beider Verniere oder Schraubenmikrofkope sich ergebenden Werthe dem von dem Excentricitätsfehler befreiten Winkelwerthe gleich. Denn es ist

$$PmQ = \gamma = \frac{1}{2}(acb + a_1cb_1) = \frac{1}{2}(\text{arc. } ab + \text{arc. } a_1b_1).$$

Bei den gröfseren Mefsapparaten bringt man fast immer zwei Paar Verniers oder Schraubenmikrofkope an, die nur um eine sehr kleine Gröfse gegen 90° von einander verschieden sein werden.

Es kann daher auch mit einem, nur einen Vernier enthaltenden Kreise ein Winkel zwischen zwei Objecten nur dann frei von der Excentricität gemefsen werden, wenn man nach der ersten Ablesung die mit dem Fernrohr verbundene Alhidade um 180° verstellt, das Fernrohr durchschlägt, den Winkel dann zum zweiten Male mifst und von beiden Resultaten das arithmetische Mittel nimmt.

§. 114.

Stellt man nun den Index des einen Verniers oder Schraubenmikrofkops genau auf einen Theilstrich des Limbus und liest auch den Stand des andern ab, so würde das arithmetische Mittel aus dem einen Paar, von dem Mittel der anderen für alle Einstellungen auf andere Theilstriche des Limbus um eine Constante verschieden sein müfsen,

wenn es aufser dem Excentricitätsfehler keine Ablesungs- und Theilungsfehler gäbe. Die letzteren werden nicht nur durch das Ablesen an mehreren Verniers oder Schraubenmikrofkopen, sondern auch dadurch verkleinert und selbst eliminiert, dafs man bei der Mefsung eines Winkels den Nullpunkt variiert oder von verschiedenen Punkten des Limbus aus bestimmt, was bei einer zweckmäfsigen Einrichtung des Winkelmefsers so viel, als man will, gesehehen kann.

B. Prüfung und Berichtigung der Fehler der Azimuthalinstrumente.

1. Berichtignng der Libelle der Horizontalrotationsachse.

§. 115.

Diese Berichtigung erfolgt nach dem im §. 109 angegebenen Verfahren.

Bei den kleineren, nur zur Aufnahme des Details benutzten Theodolithen wird die Röhrenlibelle wohl durch eine Dosenlibelle vertreten, die auf der Oberfläche der Alhidade zwischen den Stützen des Fernrohrs angebracht ist, in welchem Falle aber selbstverständlich von keiner genauen Berichtigung und eben so von keiner genauen Einstellung der Horizontalrotationsachse die Rede sein kann.

2. Berichtigung der ungleichen Höhe der Achsenlager der Horizontalrotationsachse und die Einstellung der Verticalachse.

§. 116.

1. Man bringe das im §. 110, 1. angegebene Verfahren in Anwendung. Das im §. 110, 2. angegebene Verfahren wird man nur dann anwenden können, wenn das in der Mitte der Rotationsachse befindliche Fernrohr bei beträchtlicher Höhe der Stützen eine bedeutende Elevation und Depression gestattet, wie diefs bei dem in Fig. 44 dargestellten Theodolith der Fall ist.

2. Unabhängig von der Aufsetzlibelle kann man bei der vorhin vorausgesetzten Construction auch folgendermafsen verfahren:

Man richte das Fadenkreuz des Fernrohrs auf ein möglichst hoch gelegenes Object O und bemerke sich etwa an einer senkrechten Wand den Punkt o, von welchem das Fadenkreuz beim Niederbewegen des Fernrohrs getroffen wird. Schlägt man nun das Fernrohr durch, dreht die Alhidade des Horizontalkreises um 180° und trifft dann das Fadenkreuz bei der Bewegung des Fernrohrs von O abwärts wieder den Punkt o, so ist die Horizontalrotationsachse normal zur Verticalachse. Wird aber ein anderer Punkt o_1 getroffen, so mefse man den Winkel zwischen

o und o_1 auf dem Horizontalkreise, stelle das Fadenkreuz auf $\frac{1}{2}(o+o_1)$ und verbefsere dann an dem beweglichen Achsenlager die Lage des zugehörigen Zapfens soweit, bis das Fadenkreuz auf o gerichtet ist. Durch eine Wiederholung dieses Verfahrens wird man den etwa noch vorhandenen kleinen Fehler meistens sogleich beseitigen.

Enthält der Theodolith kein bewegliches Achsenlager, wie diefs bei kleinen Theodolithen zuweilen der Fall ist, so mufs die Verbefserung an der Correctionsmutter der Stellschraube oder an dieser selbst, die an dem Fufse der Stütze des Fernrohrs aufser den Befestigungsschrauben angebracht ist, vorgenommen werden.

3. Zur Einstellung der Verticalachse dient das im §. 110, 3. angegebene Verfahren.

3. Bestimmung des Collimationsfehlers des Fernrohrs und Berichtigung der Stellung des Fadenkreuzes.

§. 117.

1. Man wendet am zweckmäfsigsten das Bessel'sche Verfahren, oder das Bohnenberger'sche nach §. 111, 1. und 2. an.

2. Oder man richte das in der Mitte der Rotationsachse angebrachte Fernrohr auf einen entfernten Gegenstand, nachdem man vorher die Alhidade des Horizontalkreises horizontal und darauf festgestellt hat, hebe den Obertheil des Apparats aus seinen Achsenlagern und lege denselben so wieder ein, dafs der früher rechts gelegene Zapfen in das linksliegende Lager kommt. Ist dann nach dem Umlegen das Fadenkreuz wieder auf das Object gerichtet, so ist unter der Voraussetzung, dafs die Zapfen der Rotationsachse einen gleichen Durchmefser haben, der Collimationsfehler = 0. Eine Abweichung wird dann wie im §. 111 verbefsert.

3. Läfst sich das Fernrohr bequem durchschlagen, so kann man auch folgendes Verfahren anwenden. Man bringt das Fadenkreuz desselben auf ein deutliches Object und liest den Stand der Verniers oder der Schraubenmikrofkope am Horizontalkreise ab. Nun schlägt man das Fernrohr durch, oder hebt es aus seinen Lagern und legt es, um 180° gedreht, um, ohne dabei, wie vorhin, die Enden der Achsen zu vertauschen, stellt das Fadenkreuz auf dasselbe Object ein und liest wieder den Stand der Verniers oder Schraubenmikrofkope ab. Sind dann beide Ablesungen genau um 180° von einander verschieden, so ist der Collimationsfehler = 0. Ist diefs aber nicht der Fall, so wird die Alhidade auf das arithmetische Mittel beider Ablesungen gestellt und dann das Fadennetz durch die zugehörigen Correctionsschrauben so weit ver-

schoben, bis der Durchschnittspunkt wieder das Object trifft. Auch diefs Verfahren ist mehrere Male zu wiederholen.

4. Ueber die Einstellung des Fadennetzes vgl. m. §. 111, 3.

Anmerkung. Ueber die Untersuchung und Berichtigung des Indexfehlers des Höhenkreises, der bei den kleineren Theodolithen in Betracht kommen kann, ist §. 242 zu vergleichen.

III. Beschreibung der winkelzeichnenden Werkzeuge.

A. Der Mefstisch.

§. 118.

Mit dem Mefstisch oder der Mensel (mensula) werden die Horizontalprojectionen der Naturwinkel auf einer horizontal zu stellenden Ebene unmittelbar durch Construction bestimmt. Er wurde am Ende des 16. Jahrhunderts von dem Professor Joh. Prätorius zu Altdorf in Baiern erfunden und eignet sich bei einer zweckmäfsigen Construction vorzugsweise zu topographischen Aufnahmen, wenn die Coordinaten trigonometrisch bestimmter Punkte in hinreichender Zahl gegeben sind, also zur Aufnahme des Details bei Landesvermefsungen, auch zu militärischen Zwecken bei dem Entwurf der Feld-Manöver-Karten, auch zu kleinen Forstaufnahmen und ähnlichen Mefsungen. Er gestattet seiner Natur nach die Bestimmung von Punkten nach Methoden, die bei den winkelmefsenden Instrumenten so einfach nicht angewandt werden können.

Demgemäfs sind die an eine gute Construction des Mefstisches zu stellenden Anforderungen folgende:

1. Bei möglichster Leichtigkeit mufs er doch fest und unbeweglich auf dem Felde aufgestellt werden können, um sicher zu sein, dafs er während des Zeichnens seine Lage nicht ändert.

2. Der Zeichentafel mufs mit der erforderlichen Schärfe nicht nur eine horizontale Lage gegeben, sondern auch eine Verschiebung um mehrere Zolle nach allen Horizontalrichtungen gegen den festen Stativkopf ertheilt werden können und selbstverständlich mufs sie aufser der groben, auch noch eine feine Horizontaldrehung gestatten.

3. Mufs der Geometer auch die nach entfernten Richtpunkten gehenden Visierlinien sowohl ihrer Lage, als ihrer Entfernung nach verzeichnen können, daher von der Anwendung eines Diopterlineals gar keine Rede sein kann, sondern dasselbe durch ein in einer Verticalebene auf und nieder zu bewegendes gutes Fernrohr, das zugleich als Distanzmefser dienen kann, ersetzt werden mufs. Nur in dem Falle, wenn die Beschaffenheit des Terrains die unmittelbare Mefsung der Länge der Visierrichtungen mittelst der Mefskette mit Sicherheit ge-

stattet, kann man die Forderung der Einrichtung des Fernrohres als Distanzmefser fallen lafsen.

§. 119.

Unter diesen Voraussetzungen sind die wesentlichen Theile des Mefstisches folgende:

1. Ein Scheibenstativ mit hölzernem Kopf, auf welchem ein Dreifufs mit einfachem Achsensystem und einem Mikrometerwerk zur feinen Einstellung mit gehöriger Sicherheit und Leichtigkeit befestigt werden kann. Von den verschiedenen Hemmungsvorrichtungen erscheint, da dieselbe bei verschiedenen Mefsungen oft längere Zeit in Anspruch genommen werden mufs, ihres sicheren Anschlufses wegen, die Construction des Klemmringes mit der Klemmschraube (§. 88) am geeignetsten.

2. Die Mefstischplatte. Sie besteht aus einem quadratischen Reifsbrett von etwa 18 bis höchstens 22 Zoll Seite und $^3/_4$ Zoll Dicke von astfreiem, gut ausgetrocknetem Lindenholz. Zur Vermeidung des Werfens setzt man die Platte so aus quadratischen Stücken zusammen, dafs die Holzfasern sich kreuzen und verbindet die Stücke von Aufsen durch Rahmen.

Die obere Ebene wird mit Papier überzogen. Um aber bei feuchtem Wetter die Bildung von Falten zu vermeiden, ist das Aufkleben mit Eiweifs nothwendig und auf folgende Weise auszuführen. Man schlägt das vom Dotter sorgfältig getrennte Eiweifs zu Schaum und läfst die Flüfsigkeit einige Stunden lang stehen, damit der Faserstoff sich setzen kann. Darauf giefst man die obere Flüfsigkeit behutsam ab und verdünnt sie etwas mit Wafser. Hiermit wird nun die untere Papierfläche bestrichen und auch die Platte benetzt, dann das umgewendete Papier auf die Platte gelegt und mit einem zusammengeballten Tuche von der Mitte aus nach den Rändern hin solange gestrichen, bis es ganz aufliegt. Schliefslich befestigt man, so rasch als möglich, die überstehenden Ränder des Papiers an den schmalen Seiten der Tischplatte mit Mundleim.

Nach mehrmaligem Bekleben mufs indessen die Tischplatte, vor dem Aufkleben eines neuen Papierbogens, sorgfältig mit Wafser abgewaschen werden, um den etwa angesetzten Faserstoff zu entfernen und das Festkleben des Bogens zu verhindern.

An der untern Fläche der Tischplatte finden sich eingelegte Schraubenmuttern, oder ein Ring mit solchen, um sie mittelst Knopfschrauben mit der Dreifufsvorrichtung zu verbinden.

3. Die Libelle zum Horizontalstellen der Mefstischplatte. Man wendet meistens die Dosenlibelle an, die man entweder auf die Tisch-

platte setzt, oder auf die Oberfläche des hölzernen Lineals der Kippregel schiebt, wie Fig. 52 zeigt. Bei der in den Figg. 50 und 51 dargestellten Kippregel kann aber zweckmäfsiger eine Röhrenlibelle benutzt werden.

4. Die Kippregel, worunter die Vorrichtung zur Bestimmung und Construction der Schenkel der zu mefsenden Winkel verstanden und meistens, aber unzweckmäfsig, als ein nicht zugehöriger Theil des Mefstisches angesehen wird. Sie besteht aus einem Lineale, auf welchem eine Metallsäule mit einem in einer Verticalebene zu bewegenden Fernrohr befestigt ist. Diefs hat entweder nur an der einen, oder an beiden Seiten eine konische Rotationsachse. Im ersteren Falle liegt es mit seinem Zapfen in einer mit der Säule verbundenen Büchse; im anderen liegen die Endzapfen, wie beim Theodolith, in y förmigen Lagern, die wieder mit der Säule in Verbindung stehen. Die Ebene, welche seine Collimationslinie beschreibt, geht zweckmäfsig durch die zum Ziehen der Linien dienende Kante des Lineals, daher die Säule mit ihrem Fufse eine geringe Drehung um ihre Achse durch angebrachte Correctionsschrauben gestatten mufs.

Zum Lineale dient am zweckmäfsigsten Holz (Mahagoni- oder Birnbaumholz), weil man dem hölzernen Lineale bei gleichem Gewichte eine gröfsere Breite geben kann, als dem messingenen, es auch weniger schmutzt, als letzteres. Seine Länge mufs ungefähr der der Diagonale der Tischplatte entsprechen, bei einer Breite von 2 bis 3 Zoll und etwa $\frac{1}{3}$ Zoll Dicke. Es liegt nicht mit seiner ganzen Breite auf, sondern nur mit etwa $\frac{1}{3}$ Zoll breiten Rändern an den Kanten und in der Mitte, während die übrige Fläche ausgestochen ist. Die mit der Visierebene zusammenfallende Kante ist schräg abgeschnitten; auf den schrägen Schnitt ist eine Messingplatte geschraubt, deren untere Kante normal zur Tischplatte steht.

Mit dem Fernrohr zugleich bewegt sich, zur Bestimmung der Elevations- und Depressionswinkel der gegen den Horizont geneigten Stationslinien, ein meistens nach Quadranten getheilter und bezifferter Höhenkreis oder Höhenbogen, dessen Vernier oder Index auf einer an der Säule befestigten Platte angebracht ist. Bei einem nicht distanzmefsenden Fernrohr reicht die grobe Achsendrehung aus; bei einem distanzmefsenden Fernrohre dagegen mufs eine Hemmung für die grobe und ein Mikrometerwerk für die mikrometrische Bewegung desselben angebracht sein.

5. Endlich gehören zu den wesentlichen Theilen des Mefstisches, aufser einem verjüngten Mafsstabe auf Holz, zwei Bleifedern von verschiedener Härte zum Ziehen der Richtlinien und zum weiteren Auszeichnen des aufgenommenen Terrains, aufserdem noch ein Handzirkel zum Abnehmen und Auftragen der Länge der gemefsenen Linien.

§. 120.

Der in Fig. 49 im Drittel der natürlichen Gröfse dargestellte Mefstisch, vom hiesigen Mechaniker Frerk jun. angefertigt, darf in Bezug auf Festigkeit und Bequemlichkeit mit Recht den vorzüglicheren Constructionen beigezählt werden.

A ist die Mefstischplatte von $21^1/_2$ Zoll Seite, die mittelst eines in ihre Unterfläche eingelafsenen Metallringes *a*, auf der Scheibe *b* der drehbaren Büchse *B* des Dreifufses *CC* durch drei Knopfschrauben befestigt ist. Die Drehung der Büchse geschieht um einen konischen hohlen Verticalzapfen, der mittelst einer Flansche mit dem Dreifufse in fester Verbindung steht. Die Spitzen der drei Stellschrauben des Dreifufses ruhen in keilförmigen Einschnitten der in den Teller *D* eingelafsenen Metallstücke *dd*. In den Teller ist Unten ein Metallcylinder zur Aufnahme des Hakens und der Spiralfeder der Befestigungsvorrichtung eingeschraubt; er ruht auf dem Kopfe *E* des hinreichend festen Scheibenstativs. Das unter dem Kopfe liegende und über den erwähnten Metallcylinder gesteckte dreiseitige Prisma *F* dient mit der Unterlegsscheibe *f* und der Mutter *G* zur Verschiebung des Tellers mit dem darauf stehenden Dreifufs auf dem Stativkopfe, während die Mutter *H* den Mefsapparat mit dem Teller gegen den Stativkopf feststellt.

Zur Hemmung der groben Achsendrehung dient der Klemmring *I* mit der Klemmschraube *K*, zur feinen Einstellung aber ein Federmikrometer mit der Mikrometerschraube *L*.

Anmerkung. Der Durchschnitt des Dreifufses ist in Fig. 59, der des Stativs mit der Befestigungsvorrichtung in Fig. 50 v. H. g. I. dargestellt.

§. 121.

Aufser den im §. 119 genannten wesentlichen Theilen des Mefstisches wendet man wohl noch folgende Vorrichtungen an, die aber als entbehrlich angesehen werden dürfen.

1. Die Einlothzange oder Gabel. Sie dient, einen auf der Mefstischplatte gegebenen Punkt senkrecht über den entsprechenden auf dem Felde zu bringen und besteht aus zwei ungleichen hölzernen Armen, die durch ein Querstück mit einander verbunden sind. Der obere Arm hat etwa $10^1/_2$ Zoll Länge und endigt in ein Messingplättchen, das in eine Spitze ausläuft, welche an den Punkt auf der Mefstischplatte gelegt wird. Das Querstück von etwa $2^1/_2$ Zoll Länge ist an dem einen Ende mit dem oberen Arme in rechtwinklichter Lage fest verbunden und enthält an dem anderen ein mit einem Stofs versehenes Gelenk, wodurch der längere etwa $16^1/_4$ Zoll lange, in eine Messingplatte endigende Arm in eine solche divergierende Lage gebracht werden kann, dafs das in der Oese der Platte hängende Senkel (Fig. 7) senkrecht unter der Spitze





Fig. 49.

des kürzeren Armes liegt, woraus dann das Einlothen sich ohne Weiteres ergicht.

Nur bei Aufnahmen, die nach einem grofsen verjüngten Mafsstabe ausgeführt werden sollen, kann die Einlothzange von Nutzen sein; in anderen Fällen reicht die Anwendung eines Senkels hin. Wesentlich erleichtert wird aber das Einstellen des Mefstisches über einen gegebenen Punkt auf dem Felde, wenn die Construction des Mefstisches eine Verschiebung der Platte auf dem Stativkopfe nach allen Richtungen um mehrere Zolle gestattet. Diefs wird aber durch den in Fig. 49 dargestellten Mefstisch ermöglicht. Nachdem nämlich das Stativ schon annähernd richtig aufgestellt und in dem Boden befestigt ist, wird die Mutter *G* gelöst; dadurch wird sich die Unterlegscheibe *J* und das Prisma *F* von der Unterfläche des Stativkopfes etwas entfernen und nun der Teller *D* mit dem Dreifufse und der damit verbundenen Tischplatte *A* um mehrere Zolle nach allen Richtungen sich verschieben lafsen, zu welchem Zwecke der Stativkopf die entsprechende Durchbohrung besitzt. Nach erfolgtem Einlothen ist dann die Mutter *G* wieder fest anzuziehen, welches aber offenbar ohne Verstellung der Mutter *H* geschehen kann.

2. Der Ring mit dem Kreuze, der ebenfalls das Einstellen des Mefstisches erleichtern soll und von Bugge*) in die Praxis eingeführt wurde. Er besteht in einem an der Mefstischplatte befestigten Metallkreuze und einem darunter gelegten, mit Druckschrauben versehenen Metallringe, gegen welchen die Mefstischplatte durch die erwähnten Schrauben festgestellt, durch deren Lösung aber die Platte mit dem Kreuze nach allen Richtungen um mehrere Zolle verschoben werden kann. Durch diese Einrichtung wird aber leicht eine Unfestigkeit an dem Werkzeuge herbeigeführt, daher es auch nur noch eine geringe Anwendung findet. Ueber die Möglichkeit der Verschiebung der Mefstischplatte bei dem Münchener Mefstische vgl. m. II. g. I. S. 366.

3. Die Anschlagnadeln. Diese sind feine mit einem Siegellackknopfe versehene Nähnadeln, welche Einige in die Punkte auf der Mefstischplatte stechen, um daran das Lineal der Kippregel legen und gegebene Richtungen bequemer einvisieren zu können. Sie sind indessen bei einiger Uebung ganz entbehrlich.

4. Dasselbe gilt von dem s. g. Versicherungsfernrohr, welches die unverrückte Lage der Mefstischplatte während der Construction der Winkel verbürgen soll, das aber jetzt bei dem soliden Bau des Dreifufses als überflüfsig erscheint und nur noch bei älteren Constructionen

*) Bugge's gründliche und vollständige theoretisch-praktische Anweisung zum Feldmefsen. Aus dem Dänischen von H. Tobiesen. Altona, 1798.

hin und wieder angetroffen wird. Man kann sich von der Unverrücktheit der Mefstischplatte dadurch am besten überzeugen, wenn eine auf ihr gezogene Orientierungslinie (§. 238) ihre ursprüngliche Richtung nicht verändert hat.

Anmerkung. Aeltere Constructionen des Mefstisches, wie die von Marinoni, Brander, Bugge, Lehmann, T. Mayer u. A. dürfen hier mit Recht übergangen werden.

Die Kippregel des Mefstisches.

§. 122.

Da die Winkelbestimmung mit dem Mefstische kein der Winkelmefsung mit dem Theodolith analoges Verfahren in der zweiten Lage des Fernrohrs gestattet, wodurch, wie in der Folge gezeigt wird, der etwa vorhandene Collimationsfehler, die etwaige ungleiche Höhe der Achsenlager des Fernrohrs und die etwaige excentrische Lage desselben eliminiert werden können: so ist an der Kippregel eine solche Einrichtung zu treffen, dafs die erwähnten Fehler, die bei der Winkelbestimmung einen nachtheiligen Einflufs äufsern, nicht nur mit Leichtigkeit erkannt, sondern auch soweit verbefsert werden können, dafs der noch gebliebene Ueberschufs als einflufslos angesehen werden darf. Zu diesen Fehlern gehören aber vor allen der Collimationsfehler des Fernrohrs und der, dafs bei dem Kippen desselben die Collimationslinie keine Verticalebene beschreibt.

Aus den §§. 111 u. 117 geht nun hervor, dafs zur Bestimmung des Collimationsfehlers, das Fernrohr entweder mufs durchgeschlagen, oder in seinen Lagern mufs umgelegt werden können. In dem ersten Falle würde man der auf dem Lineale stehenden Säule die zum Durchschlagen des Fernrohrs erforderliche Höhe geben können, wodurch aber der Gebrauch der Kippregel erschwert werden würde. Im zweiten Falle ist an beiden Seiten des Fernrohrs ein Konus nebst Zapfen anzubringen und die Einrichtung zu treffen, dafs das Fernrohr bequem in seinen Lagern umzulegen ist.

§. 123.

Die Figg. 50 u. 51 stellen eine von Meyerstein in Göttingen verfertigte, zugleich zur Distanzmefsung eingerichtete Kippregel in Vorder- und Seitenansicht in halber natürlicher Gröfse dar.

Den Fufs der Säule A bilden zwei über einander liegende cylindrische Platten a und b. Die obere a tritt mit ihrem Schraubengewinde a_1 in ein in dem hölzernen Lineale B liegendes Futter und ist durch die Mutter α befestigt. Die untere b hat zwei prismatische Fortsätze b_1 und b_2 mit den Schrauben β_1 und β_2, welche gegen den Arm a_2 der Platte a treten.

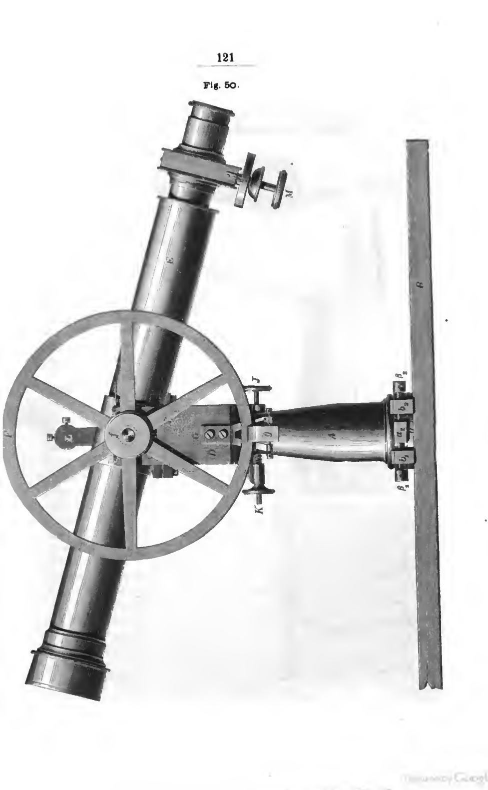
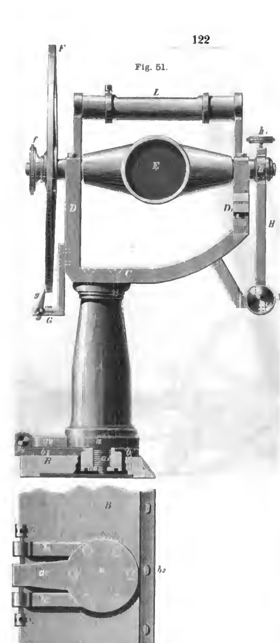


Fig. 50.

Fig. 51.



Hierdurch kann der Säule leicht eine geringe Drehung ertheilt werden, wenn die Visierebene, welche die Collimationslinie des Fernrohrs beschreibt, nicht durch die Kante b_3 des Lineals geht.

Auf der Säule ist die Platte C befestigt, deren Enden in die beiden Stützen $D\,D_1$ für die Achsenlager des Fernrohrs E ausgehen. Das eine Achsenlager ist verstellbar.

Auf die Verlängerung des einen Zapfens ist der $5^1/_2$-zöllige Verticalkreis F geschoben und durch die Mutter f befestigt, um den etwaigen Indexfehler der Theilung annähernd verbefsern zu können. Er ist bis auf Drittelgrade getheilt und enthält eine von 0^0 bis 360^0 fortgehende Bezifferung, wodurch die Bestimmung des Indexfehlers vereinfacht wird. Der

zwischen Schraubenspitzen liegende Vernier g, der einzelne Minuten angiebt, wird von dem an der Stütze D befestigten Arme G getragen. Zum Ablesen der Theilung dient eine Loupe.

Das verlängerte Ende des anderen Zapfens trägt zur Hemmung der groben Achsendrehung den geschlofsenen Ring h mit der Pressschraube h_1; der von ihm auslaufende Arm H dient zur feinen Einstellung, wozu die Mikrometerschraube J und der Federhalter K auf bekannte Weise angewandt wird. Hierdurch ist zugleich die bequeme und sichere Umlegung des Fernrohrs in seinen Achsenlagern ermöglicht.

Zum Horizontalstellen der Fernrohrachse und der Mefstischplatte dient die Röhrenlibelle L.

Das zum Distanzmefsen eingerichtete Fernrohr hat ein Ramsden'sches Mikrometerocular, indem durch die Mikrometerschraube M ein Fadenkreuz gegen die drei festen Horizontalfäden verschoben werden kann. Das Fernrohr hat 13 Zoll Brennweite, 18 Linien Oeffnung und eine 25malige Vergröfserung.

§. 124.

Die in Fig. 52 im Drittel wahrer Gröfse dargestellte Kippregel zeigt die gewöhnliche Einrichtung, indem das Fernrohr C mit nur einseitiger Drehungsachse in der mit der Säule S verbundenen Büchse sich bewegen läfst, zugleich aber zum Distanzmefsen ein Fadennetz mit drei festen Horizontalfäden enthält, die von einem Verticalfaden durchschnitten werden.

Der mit dem Fernrohr rotierende Verticalkreis V ist in Drittelgrade getheilt, während jeder der beiden an einer Rahmenplatte der Säule befestigten Verniers halbe Minuten angiebt. Der Fufs der Säule enthält die nöthigen Zug- und Stellschrauben für die Senkrechtstellung derselben; eine Drehung um ihre Achse ist nur dadurch aus freier Hand möglich, dafs die Fufsplatte für die Zugschrauben mit ovalen Löchern versehen ist.

Um das Fernrohr zur Bestimmung und Verbefserung des Collimationsfehlers durchschlagen zu können, enthält die vordere Hälfte des Objectivrohrs bei D sowohl nach Aufsen, als nach Innen einen Ring mit einer kleinen Pressschraube d. Das Rohr ist daselbst so durchschnitten, dafs mittelst des inneren Ringes der vordere Theil des Rohrs abgezogen, aber auch nach erfolgtem Durchschlagen durch Aufschieben leicht wieder mit dem anderen Theile verbunden werden kann. Zum Abziehen löst man die Pressschraube d. Damit die beiden getrennten Theile nach dem Durchschlagen wieder in ihre richtige Lage kommen, findet sich auf jedem ein feiner Strich δ eingerifsen. Schliefslich wird das Schräubchen d wieder angezogen.

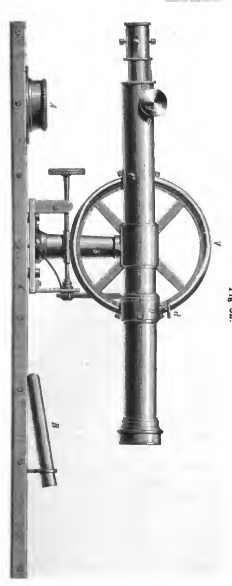


Fig 52.

Eine nach gröfserem Mafsstabe dargestellte Zeichnung der Kippregel findet man in H. g. I. Figg. 65 u. 66. S. 109 u. f.

Das distanzmefsende Fernrohr der Kippregel des Mefstisches.

§. 125.

Obgleich, streng genommen, das distanzmefsende Fernrohr, als Werkzeug für Linienmefsungen erst in dem 3. Abschnitte seine Stelle finden sollte, so erscheint es doch um so mehr gerechtfertigt, dasselbe schon hier einer genaueren Betrachtung zu unterwerfen, als es bei den Mefstischaufnahmen vorzugsweise seine Anwendung findet.

Die Theorie desselben beruht auf dem optischen Satze, dafs die Entfernungen desselben Gegenstandes sich umgekehrt verhalten, wie die Tangenten der zugehörigen halben Sehwinkel.

Es seien in Fig. 53 P und Q zwei Theilstriche einer eingetheilten, aufrecht gestellten Latte, O der Mittelpunkt des Objectivs eines Fernrohrs, das in einer solchen Entfernung von PQ sich befinden mag, dafs die Ebene des Bildes pq durch den Brennpunkt des Objectivs geht. Sind

nun auf dem Diaphragma des Oculars zwei Horizontalfäden aufgezogen, die durch p und q gehen und werden die Theilstriche P und Q zugleich durch die Fäden p und q gedeckt, so wird von denselben ein durch die Hauptstrahlen pP und qQ erzeugter unveränderlicher Sehwinkel $poq = POQ$ gebildet. Behält nun das Fernrohr seine ursprüngliche Lage, wird dagegen die Latte demselben nach C_1 genähert, so werden die Fäden p und q scheinbar ein Stück AB auf derselben abschneiden, welches das Mafs für die Entfernung OC_1 ist, wenn PQ das Mafs für den ursprünglichen Abstand OC war.

Da nun

$$OC_1 = \frac{AB}{PQ}\, OC$$

ist, so ergiebt sich die Entfernung OC_1 aus der abgelesenen Länge AB, wenn OC und PQ bekannt wären. Es kann daher ein Fernrohr, dessen Oculardiaphragma zwei von der Achse gleich weit abstehende Horizontalfäden enthält, in Verbindung mit einer eingetheilten Latte, auf welcher der Abstand PQ oder AB als Standlinie erscheint, zur Bestimmung von Entfernungen dienen. Ein so eingerichtetes Fernrohr wird ein **distanzmefsendes Fernrohr** oder ein **Distanzmefser** genannt.

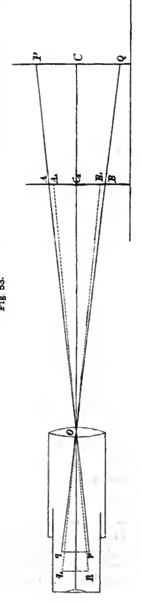


Fig. 53.

§. 126.

Wenn für alle Entfernungen von der Latte die Ebene des Bildes pq von dem Objective denselben Abstand behielte, so würde die Eintheilung der Latte eine gleichmäfsige sein. Alsdann würde, wenn die Zahl der Theile zwischen P und Q mit der Zahl der Einheiten irgend eines Längenmafses übereinstimmte, die Zahl der Theile zwischen A und B auch dasselbe Vielfache der nämlichen Einheit für die Entfernung OC_1 darstellen. Da diefs aber nach dem Ausdrucke

$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{b} - \frac{1}{d}$ (§. 39, Anm. 1) nicht der Fall, die Aenderung des δ auch der des d nicht proportional ist, so kann die Eintheilung der Latte auch nicht gleichmäfsig sein, oder, wenn sie es ist, bedarf sie bei kleineren Distanzen um so mehr einer Correction, je kleiner die Distanz ist. Man kann in dem ersteren Falle die Eintheilung entweder durch Rechnung, oder durch directe Beobachtungen bestimmen, schlägt aber meistens den letzteren Weg ein.

§. 127.

Das Fadennetz des Distanzmefsers besteht gewöhnlich aus einem Verticalfaden und aus drei gleich weit von einander entfernten Horizontalfäden. Von den letzteren dienen die beiden äufseren zum Distanzmefsen, der mittlere mit dem Verticalfaden aber zum Einvisieren. Die Entfernung der Horizontalfäden von einander richtet sich theils nach dem Maximum der Entfernung, theils nach der Güte des Fernrohrs.

Auch hat das Fernrohr entweder unbewegliche, feste, oder verschiebbare Fäden. In dem ersten Falle sitzen sämmtliche Fäden auf demselben flachen Ringe der Ocularblendung. In dem zweiten Falle aber befindet sich jeder der äufseren Horizontalfäden auf der Unterfläche eines Schiebers, der gegen das mittlere Fadenkreuz sich verstellen läfst. Ueber diese Einrichtung vgl. m. Fig. 94 (§. 207).

§. 128.

Die Distanzlatte verfertigt man aus gut ausgetrocknetem Fichten- oder Tannenholze von etwa 5 Zoll Breite und $^3/_4$ Zoll Dicke. Die Länge richtet sich nach dem Abstande der Horizontalfäden von einander und nach dem Maximum der zu bestimmenden Entfernung, welche wiederum von der Güte des Fernrohrs abhängig ist.

Unten ist sie mit einem eisernen Schuh und in etwa 4 Fufs Höhe mit zwei seitlich vortretenden Handgriffen versehen. An der Hinterfläche befindet sich ein Loth zum Verticalstellen derselben, oder Statt dessen an der einen Seitenebene ein Visier, welches auf das Objectiv des Fernrohrs gerichtet wird, um der Latte immer einerlei Neigung gegen die Sehlinie zu geben.

§. 129.

1. Um eine Distanzlatte für ein Fernrohr mit festen Fäden einzutheilen, bezeichnet man den etwa in 1 Fufs Entfernung vom Ende der Latte angenommenen Nullpunkt auf erkennbare Weise; mifst auf einer ebenen Fläche eine Länge von 5 Ruthen ab, stellt an dem Ende dieser Linie die Latte entweder lothrecht oder mit dem Visier nach dem Objectiv des Fernrohrs gerichtet auf, richtet den einen Horizontal-

faden auf den markierten Nullpunkt und läfst ein auf der Latte verschiebbares Zeichen dahin bringen, wohin der andere Faden zeigt, und bemerkt den Punkt auf der Latte nebst der Ziffer 5. Auf dieselbe Weise markiert man die Theilstriche für 6, 7 . . . . . 10 Ruthen Entfernung, von da an aber nur alle 5 oder 10 Ruthen-Abstände. Dann theilt man, nach Ausgleichung kleiner Unregelmäfsigkeiten, die Latte von Ruthe zu Ruthe ein und läfst dieselbe durch Anstrich mit Oelfarbe und abwechselnd weifsen und schwarzen Strichen und Bezeichnung der Distanzziffern ausführen. Zum Ablesen der Zehntelruthen dienen seitlich auf dem weifsen Felde der Latte angegebene Theilungen. M. vgl. II. g. I. S. 378.

2. Will man einen Distanzmefser mit verschiebbaren Fäden nach einer in 1 construierten, oder auch gleichmäfsig eingetheilten Latte, die z. B. für 80 Ruthen Maximalentfernung eingetheilt ist, justieren, so stelle man sich mit dem ersteren in dem einen Endpunkte der 80 Ruthen langen Linie, mit der Latte in dem anderen Endpunkte auf, richte den mittleren Horizontalfaden auf den Strich 40 ein und bringe mittelst der entsprechenden Stellschräubchen die beiden anderen Fäden auf 0 und 80. Darauf läfst man die Latte von 5 zu 5, oder von 10 zu 10 Ruthen der gemefsenen Linie aufstellen, liest jedesmal die Distanz an der Latte ab und trägt sie in eine Tabelle. Dann ist nach den Angaben in dieser Tabelle jede auf der Latte durch die äufseren Fäden abgeschnittene Länge zu verbefsern, um die wirkliche Distanz zu erhalten.

§. 130.

Die genaue Distanzmefsung mit den im Vorhergehenden beschriebenen Distanzmefsern nebst eingetheilten Latten hängt offenbar, bei vorausgesetzt entsprechender Güte des Fernrohrs, sowohl von der genauen Einstellung der Horizontalfäden auf die Latte, als von der richtigen Eintheilung der letzteren ab, welches beides aber nur annähernd erreicht werden kann. Könnte also in dem Ausdrucke des §. 125

$$OC_1 = \frac{AB}{PQ} \cdot CO$$

bei der immer mit möglichster Schärfe zu bestimmenden Maximalentfernung OC, der Quotient $\frac{AB}{PQ}$ ohne Eintheilung einer Latte durch eine mikrometrische Mefsung geschehen, so würde diese Bestimmung vor der erwähnten einen wesentlichen Vorzug verdienen. Diefs ist aber durch das Mikrometerocular der in den Figg. 50 und 51 dargestellten Kippregel möglich, welches im Allgemeinen dieselbe Einrichtung hat, wie der Fadenkreuzkasten des in den Figg. 24 und 25 dargestellten Schraubenmikrofkops. So wie bei diesen findet sich in dem das

Fadennetz tragenden Kasten ein Schieber mit dem zum Distanzmefsen dienenden Andreaskreuz, welches gegen die 3 Horizontalfäden mit dem sie schneidenden Verticalfaden, die sämmtlich auf der Bodenplatte des Kastens ausgespannt sind, sich verstellen läfst und so zum Mefsen des Zählers AB des obigen Quotienten dient, während der Nenner PQ dem Abstande zweier Striche auf einer Latte entspricht, die für eine Maximaldistanz, z. B. 80 Ruthen, vom aufgestellten Fernrohr von den Hauptstrahlen pP und qQ der beiden äufsersten Horizontalfäden projiciert werden. Bringt man also bei irgend einem kleineren Abstande der Latte, den einen der äufseren Horizontalfäden, also den Punkt B oder B_1 der Fig. 53 auf den Nullpunkt Q der Latte, so wird auf dem Bilde derselben ein Abstand PA oder PA_1 dargestellt, der dann durch Umdrehung der Mikrometerschraube nach Trommeltheilen gemefsen werden kann, woraus also AB oder $A_1 B_1$ sich ergiebt. Giebt man daher der Mikrometerschraube für den Abstand PQ eine solche Einrichtung, dafs eine bestimmte Anzahl voller Umdrehungen, oder nur ein bestimmtes Vielfaches eines einfachen aliquoten Theils der Trommel dem Abstande PQ zugehört, so berechnet sich einfach der Quotient $\frac{AB}{PQ}$, und durch seine Multiplication mit dem bekannten Maximalabstande OC die Distanz der Latte OC_1 vom Fernrohr.

Ueber die nähere Einrichtung des Mikrometeroculars vgl. m. H. g. I. S. 379.

B. Die Boussole*).

§. 131.

Die Boussole ist der Winkelmefser, mit welchem auf einem in einer Büchse angebrachten, eingetheilten Kreisringe der Winkel bestimmt wird, den eine auf dem Felde gegebene Richtung mit dem ihr zugehörigen magnetischen Meridiane bildet. Diefs wird dadurch erreicht, dafs auf einem in dem Mittelpunkte des Kreisringes angebrachten stählernen Stifte eine frei schwebende Magnetnadel ruht, mit deren einem Pole, gewöhnlich dem Nordpole, sobald sie zur Ruhe gekommen ist, der erwähnte Winkel abgelesen wird. Dieser Theil des Werkzeugs wird der Compass**) genannt.

Die Eintheilung des Kreises ist entweder die gewöhnliche in Grade und Gradtheile, oder, wie es bei den von den Markscheidern gebrauchten Boussolen meistens der Fall ist, in zwei Mal 12 Stunden, von denen jede wieder in 8 (Achtel) oder in 16 (halbe Achtel) gleiche Theile

*) Vom Mittellat. buxola, buxula, Büchschen. Im Italienischen bussola.

**) Vom Mittellat. compassus, cum passus, Mitschritt.

getheilt wird. Kleinere Theile werden durch Schätzung nach dem Augenmafse bestimmt. Bei der Gradeintheilung bedarf man der Bezeichnung der Weltgegenden nicht, die indessen bei der Stundeneintheilung nicht fehlen darf. Da aber der Nordpol der Magnetnadel als Index dient, gegen welchen der Theilkreis bewegt wird, so mufs die Bezeichnung der beiden Weltgegenden Ost und West auch entgegengesetzt gegen die wirkliche Lage genommen werden.

Wegen der mit dem Durchmefser des Theilkreises wachsenden Länge der Magnetnadel und der davon abhängigen gröfseren Schwierigkeit, die Magnetnadel zur Ruhe zu bringen, kann der Durchmefser nicht leicht 4 Zoll überschreiten. Weil aber auch wegen der steten Oscillationen der Magnetnadel von der Anwendung eines Verniers keine Rede sein kann, sondern die Subdivision der Kreistheilung nur auf Schätzung beruht: so ergiebt sich schon hieraus, dafs von allen bisher betrachteten Winkelmefsern die Boussole die geringste Genauigkeit gewähren und deshalb nur bei der Aufnahme des Details ihre Anwendung finden kann.

Um den meistens Statt findenden Excentricitätsfehler eliminieren zu können, mufs die Einrichtung der Boussole gestatten, mit demselben Compass, welcher zur Bestimmung der Abweichungswinkel auf dem Felde dient, auch die Verzeichnung derselben auf dem Papiere vorzunehmen. Deshalb ist aber dieser Mefsapparat den winkelzeichnenden Winkelmefsern zuzuzählen.

Alle Theile derselben, die Magnetnadel und den Stift ausgenommen, müfsen selbstverständlich, falls sie nicht von Holz sind, von eisen- und nickelfreiem Messing oder Kupfer verfertigt sein.

§. 132.

Die Figg. 54 und 54a stellen eine Boussole in halber natürlicher Gröfse in der Seitenansicht und vom oberen Theile die vordere Ansicht dar. Die Unterlage bildet ein massiver Dreifufs AA, der nach Oben in einen ebenfalls massiven Konus B ausläuft. Dieser trägt eine in einen Arm ausgehende cylindrische Platte C für das Lager c der Mikrometerschraube D. Zugleich geht davon ein konischer Zapfen aus, um welchen sich die Büchse E zur groben Horizontalrotation des Compasses mit dem Fernrohr legt. An dem oberen Ende trägt die Büchse eine Scheibe e, auf welcher die rahmenförmig ausgeschnittene und mit Nuthen versehene Platte FF, als Grundlage der Zulegeplatte g mit der Compassbüchse GG, mittelst Schrauben befestigt ist. Durch 2 Knopfschrauben ff und eine kleine Vorlegeplatte kann der Compass mit der Zulegeplatte in den Nuthen des Rahmens FF befestigt, durch Lösung der Schrauben aber auch davon getrennt werden, um ihn zum Verzeichnen oder Zulegen der gemefsenen Abweichungswinkel zu benutzen.

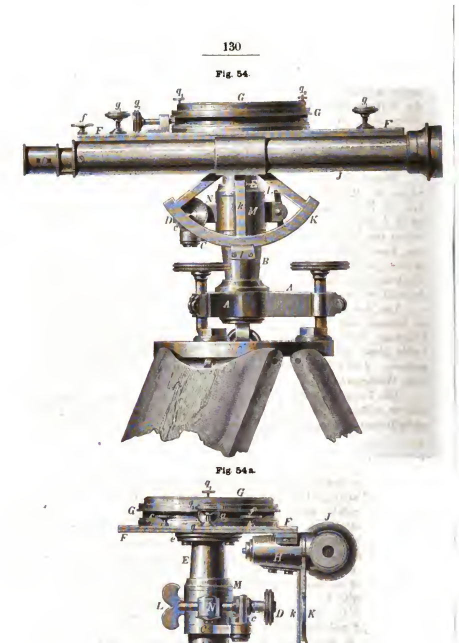


Fig. 54.

Fig. 54 a.

Unterhalb der Platte *FF* ist an einem abwärts gehenden Sattel *h* die Büchse *H* für das Fernrohr *I* befestigt, das daher in dieser seitlichen Lage bequem durchgeschlagen werden kann. Das Fernrohr trägt zur Bestimmuug der Elevations- und Depressionswinkel einen Höhenbogen *K*, dessen Eintheilung deshalb vom Nullpunkte aus nach beiden Seiten eine wachsende Bezifferung enthält. Au der Büchse *H* ist wieder ein Arm *k* befestigt, der die Vernierplatte *l* trägt.

Zur Hemmung der groben Horizontalbewegung dient die Klemmschraube *L* an dem Klemmringe *M* und zur feinen Einstellung des Fernrohrs eine Mikrometerschranbe mit Klemmen, von der den Figg. 33 und 34 entsprechenden Einrichtung.

Die Büchse *G G* ist mit der 8 Zoll langen und 4 Zoll breiten, rechteckigen Zulegeplatte durch versenkte Schrauben zu einem Ganzen verbunden. Von den abgekanteten Seiten der Platte sind die längeren, mit dem durch N. 12 und S. 12 gehenden Durchmefser (der zwölften Stundenlinie) parallel. Die Richtung desselben ist auf der Oberfläche der Zulegeplatte nnd auf dem Rande der Büchse durch eingerifsene Striche dargestellt. Zwei auf ihr befindliche Knopfschrauben $g_1\, g_1$ dienen beim Zulegen zum Anfafsen.

Die Magnetnadel von 3 Zoll Länge trägt über der durchbohrten Mitte ein konisches Hütchen von Messing, dessen Deckel aus Achat oder Carneol besteht und dessen innere Höhlung in eine konische Fläche ausläuft, wodurch die Nadel bei möglichst geringer Friction auf dem zugespitzten Stahlstifte schwebt. In der Ebene der Magnetnadel liegt an der inneren Wand der Büchse der versilberte Theilring mit der Stundeneintheilung. Zum Schutze der Nadel und der Theilung dient eine anf dem inneren Rande der Büchse liegende und durch einen aufgelegten Ring befestigte Glasplatte.

Der Compass kann zugleich als Hängecompass des Markscheiders benutzt werden, zu welchem Zwecke die Magnetnadel und die Theilung in einem s. g. Napfe sich befindet, der in der Büchse der Zulegeplatte durch eine Druckschranbe g_2 befestigt und auch davon getrennt werden kann.

Um den Stahlstift nicht unnöthiger Weise abzunutzen, findet sich am Rande des Napfes ein Schieber mit einem Schräubchen q_1, der mit einem den Stift umgebenden Hebel in Verbindung steht. Dadurch kann die Magnetnadel beim Transporte oder Nichtgebrauche des Werkzengs vom Stifte abgehoben und gegen den Glasdeckel gedrückt werden. Diese Vorrichtung nennt man die Arretierung der Nadel.

Zur Horizontalstellung der Boussole dient eine auf die Glasplatte gesetzte Dosenlibelle.

Die Unterlage des Apparats bildet ein Scheibenstativ mit messingenem Kopf, der zugleich die Ruhepunkte für die Stellschrauben des Drei-

fufses darbietet. Durch die bekannte Vorrichtung wird die Boussole mit demselben vereinigt.

Zum Verpacken und Transport des Instruments dient ein mit einem Tragriemen versehener Kasten.

IV. Prüfung und Berichtigung der winkelzeichnenden Werkzeuge.

A. Prüfung und Berichtigung des Mefstisches.

§. 133.

1. Berichtigung der Dosen- oder Röhrenlibelle zur Horizontalstellung der Mefstischplatte.

Die Prüfung und Berichtigung der Dosenlibelle geschieht nach §. 33; für die Röhrenlibelle, die bei der in Figg. 50 und 51 dargestellten Kippregel angewandt wird, ist das im §. 109 angegebene Verfahren anzuwenden.

2. Prüfung der Oberfläche der Mefstischplatte und ihrer normalen Lage gegen den Verticalzapfen des Dreifufses, und Horizontalstellung der Mefstischplatte.

1. Die Prüfung der Oberfläche der Mefstischplatte wird auf bekannte Weise mittelst eines richtigen Lineals vorgenommen; etwa vorkommende Unebenheiten können nur durch Abhobeln beseitigt werden.

2. Um die normale Lage der Oberfläche der Mefstischplatte gegen die Verticalachse des Dreifufses zu prüfen, lege man die Kippregel an eine etwa durch die Mitte der Mefstischplatte gezogene Gerade, die zugleich in die Richtung des einen Armes des Dreifufses fällt und richte das Fadenkreuz des Fernrohrs auf einen scharf markierten Gegenstand. Ohne nun die Lage des Fernrohrs gegen das Lineal zu ändern, lege man die Kippregel an die andere Seite der Geraden und drehe die Mefstischplatte um 180⁰ herum. Wird derselbe Punkt des Objects wieder vom Fadenkreuz getroffen, so steht die auf der Platte gezogene Gerade normal zur Verticalachse. Trifft das Fadenkreuz aber einen höher oder tiefer liegenden Punkt, so kann die Hälfte des Fehlers an der entsprechenden Stellschraube des Dreifufses verbefsert werden, während die andere Hälfte nur durch Abhobeln der Oberfläche der Platte zu beseitigen ist. Dasselbe Verfahren wird dann noch an einer Linie wiederholt, die auf der zuerst gezogenen normal steht und ist dann nur noch die in 1. angegebene Untersuchung zu wiederholen.

Anmerkung. Bei einigen Mefstischconstructionen finden sich wohl an der Scheibe der Dreifufsbüchse, an welcher die Platte durch Knopfschrauben befestigt ist, eigene Correctionsschrauben, auf deren abgerundeten Enden die Platte ruht und durch deren Verstellung die andere Hälfte des Fehlers berichtigt werden kann. So bequem diefs Verfahren auch ist, so kann doch leicht eine Verstellung wieder eintreten, wenn die Schrauben nicht durch Gegenmuttern befestigt werden können.

3. Die Horizontalstellung der Mefstischplatte ergiebt sich nach Beseitigung des vorigen Fehlers dann sehr leicht.

§. 134.

3. Prüfung der Visierkante des Lineals als gerade Linie und des Zusammenfallens derselben mit der Visierebene des Fernrohrs.

1. Die erstere Prüfung darf als bekannt vorausgesetzt werden. Ein dabei sich zeigender Fehler stellt das Lineal als unbrauchbar dar und mufs daher vom Mechaniker verbefsert werden.

2. Für die zweite Prüfung stecke man auf dem Felde eine Gerade AB ab, stelle sich mit dem Mefstische in einem Punkte C derselben, zwischen A und B auf, bestimme dann auf der Platte den Punkt c senkrecht über C und ziehe durch c eine Gerade acb in der Richtung ACB. Nun legt man an ab die Kippregel, richtet das Fadenkreuz des Fernrohrs durch Hülfe des Mikrometerwerks auf A und legt die Kippregel an die andere Seite der Linie ab. Trifft nun das Fadenkreuz auf B, so geht die Visierebene des Fernrohrs auch durch die Visierkante. Eine sich zeigende Abweichung wird durch die Correctionsschrauben, die an dem Fufse der Säule zu diesem Zwecke angebracht sind, verbefsert, wie an der in den Figg. 50 und 51 dargestellten Kippregel an den Schrauben β_1 und β_2.

Anmerkung. Würden bei der Methode des Vorwärtseinschneidens die Durchschnitte von Visierlinien auf der Mefstischplatte immer durch gleichschenklichte Dreiecke bestimmt werden können, so würde der in Rede stehende Fehler ohne Einflufs sein.

§. 135.

4. Berichtigung der Stellung des Fadenkreuzes und des Collimationsfehlers des Fernrohrs.

1. Die richtige Stellung des Fadenkreuzes ist nach §. 53 vorzunehmen.

2. Zur Berichtigung des Collimationsfehlers kann man wieder am zweckmäfsigsten nach §. 111, 1. und 2. entweder das Bessel'sche oder das Bohnenberger'sche, aber auch das im §. 117, 2. angegebene Verfahren anwenden, wenn das Fernrohr sich in seinen Lagern bequem umlegen läfst, wie diefs bei der in den Figg. 50 und 51 dargestellten Kippregel der Fall ist.

Wenn die völlige Berichtigung von 2. des vorigen Paragraphen vorausgesetzt werden kann, so lege man die Kippregel wieder an eine auf der Mefstischplatte gezogene gerade Linie und richte das Fadenkreuz des Fernrohrs auf ein entferntes Object. Dann schlage man das Fernrohr durch und lege die Kippregel, bei unveränderter Lage der Mefstischplatte, an die andere Seite der geraden Linie. Zeigt nun das Fadenkreuz nicht auf das nämliche Object, so ist die Abweichung gleich dem doppelten Collimationsfehler.

Die Verbeſserung des Fehlers wird wieder, wie im §. 111 angegeben ist, vorgenommen.

Anmerkung. Ist das Fernrohr der Kippregel aber weder zum Durchschlagen, noch zum Umlegen eingerichtet, so bleibt für den ersteren Fall nichts weiter übrig, als die Schraube zu lüften, durch welche die Fernrohrachse in ihrer Hülse gehalten wird, um nun das Fernrohr um 180° drehen zu können. Nach der Berichtigung ist dann die ursprüngliche Lage und Befestigung wieder herzustellen.

§. 136.

5. Berichtigung der nicht parallelen Lage der Umdrehungsachse des Fernrohrs mit der Meſstischplatte.

Man richte nach dem im §. 116, 2. angegebenen Verfahren das Fadenkreuz des Fernrohrs der auf die festgestellte Meſstischplatte gesetzten Kippregel auf ein möglichst hoch gelegenes Object A und bemerke auf einer gegenüberliegenden Wand oder auf einem andern Gegenstande den Punkt B, auf den das Fadenkreuz beim Niederbewegen der Kippregel zeigt. Dann schlage man das Fernrohr durch, bringe die Kippregel, durch Hülfe einer an der Visierkante gezogenen Geraden, in die entgegengesetzte Lage und richte das Fadenkreuz wieder auf A. Wird dann beim Niederbewegen der Kippregel wieder B vom Fadenkreuz getroffen, so ist die Rotationsachse des Fernrohrs der Meſstischplatte parallel. Kommt dasselbe aber auf den Punkt B_1, so zeigt BB_1 den doppelten vorhandenen Fehler an.

Auch kann man den Fehler mittelst der im §. 110, 2. angegebenen Verfahrungsarten entdecken.

Bei den Kippregeln mit nur einseitiger Drehungsachse, wie bei der in Fig. 52 dargestellten, wird die Hälfte des Fehlers an der an dem Fuſse der Säule angebrachten Correctionsschraube verbeſsert, indem man nach den verschiedenen Umständen die vorhandenen Zugschrauben entweder etwas lüftet und die Stellschraube anzieht, oder letztere löst und dafür die ersteren fester anzieht. Bei den Kippregeln mit zweiseitiger Umdrehungsachse wird die Verbeſserung an dem beweglichen Achsenlager wie beim Theodolith vorgenommen.

Anmerkung. Ueber die Verbeſserung des **Indexfehlers des Höhenkreises** ist §. 242 zu vergleichen.

B. Prüfung und Berichtigung der Boussole.

§. 137.

1. Prüfung, ob das Metall, aus welchem die Theile der Boussole verfertigt sind, eisen- oder nickelfrei ist.

Da von dieser Prüfung überall die Möglichkeit des Gebrauchs der Boussole abhängig gemacht wird, so muſs sie zuerst vorgenommen werden.

Man entferne den Compass von seiner Unterlage und stelle irgendwo eine hinreichend wirkende, freistehende Magnetnadel auf einer festen Unterlage auf. Nähert man nun der zur Ruhe gekommenen Nadel die Bonssole, und bringt durch Achsendrehung derselben auch verschiedene ihrer Theile in die Nähe der Nadel, so ist der Apparat nur dann brauchbar, wenn bei allen diesen Bewegungen, vorausgesetzt, dafs die Unterlage der Magnetnadel dadurch nicht erschüttert wird, letztere nicht die geringste Abweichung zeigt.

Um zu untersuchen, ob das Gehäuse der Magnetnadel eisen- oder nickelfrei ist, drehe man die Zulegeplatte, nachdem die Magnetnadel zur Ruhe gekommen ist, sanft herum, so mufs ebenfalls die Nadel unverändert ihre Lage behalten.

§. 138.

2. Berichtigung der Dosenlibelle.

Diese geschieht nach dem im §. 33 angegebenen Verfahren.

3. Horizontalstellung der Boussole und Prüfung der normalen Lage der Glasebene des Compasses gegen den Verticalzapfen.

Die erstere wird durch die auf die Glasplatte gesetzte Dosenlibelle mittelst der Stellschrauben des Dreifufses auf bekannte Weise vorgenommen, alsdann darf bei der Umdrehung der Boussole um den Verticalzapfen der Stand der Blase sich nicht ändern.

Löst man nun die Arretierung der Magnetnadel, so müfsen beide Enden derselben mit dem Theilringe in derselben Ebene liegen. Sollte diefs nicht der Fall sein, so mufs man die Glasplatte abnehmen und unter die Hälfte der Magnetnadel, deren Pol sich gegen den anderen erhebt, so viel Wachs kleben, bis derselbe mit dem Theilringe in einer Ebene liegt.

§. 139.

4. Prüfung der Magnetnadel.

Diese Prüfung beschränkt sich auf die Untersuchung der erforderlichen Empfindlichkeit, der genügenden magnetischen Kraft und der gleichförmig Statt findenden Oscillationen.

Nachdem die Boussole horizontal gestellt ist, visiere man mit dem Fernrohr auf ein entfernteres Object und bemerke die gefundene Abweichung. Dreht man dann die Boussolenplatte allmählich um einige Gradtheile vor- und rückwärts, stellt wieder auf das Object ein, wiederholt diefs Verfahren auch zu mehreren Malen und bleibt dann die Nadel bei den Drehungen gleichsam befestigt stehen und ergiebt sich auch dieselbe Abweichnng, so ist die Magnetnadel tadellos. Treffen die erwähnten Eigenschaften aber nicht zu, so wird meistens der Stift

stumpf geworden sein und bedarf derselbe dann einer Zuspitzung durch Abschleifen. Hat aber der Stift die erforderliche Schärfe, was an einer zweiten tadellosen Nadel erprobt werden kann, so mufs der Magnetnadel durch Streichen mit einem natürlichen oder künstlichen Magnet die nöthige magnetische Kraft ertheilt werden. Vgl. hierüber H. g. I. S. 395.

§. 140.

5. Berichtigung der Stellung des Fadenkreuzes und des Collimationsfehlers des Fernrohrs.

Ueber die erstere Berichtigung vgl. m. §. 53. Zur Bestimmung des Collimationsfehlers kann, da das Fernrohr bei seiner excentrischen Lage sich leicht durchschlagen läfst, nach §. 111 sowohl das Bessel'sche, als das Bohnenberger'sche Verfahren angewandt werden. Die Berichtigung desselben geschieht auf bekannte Weise an den Stellschräubchen der Ocularblendung.

§. 141.

6. Prüfung des Parallelismus der Visierebene des Fernrohrs mit dem durch den Anfangspunkt des Theilringes gehenden Durchmefser und mit den Längskanten der Zulegeplatte.

1. Man schraubt zu diesem Zwecke die auf dem Rande des Boussolennapfes vorhandenen Schräubchen q_1 und q_2 heraus, bringt an deren Stelle kleine senkrechte Stiftchen und deren Verticalebene durch Drehung der Boussole auf ein so entferntes Object, dafs ihre Richtung mit der Visierlinie des Fernrohrs als parallel angesehen werden kann. Ist dann letztere ebenfalls auf das Object gerichtet, so ist der zuerst erwähnte Parallelismus vorhanden. Ist diefs aber nicht der Fall, so stellt man das Fernrohr auf das Object ein, liest die Abweichung ab und bringt diese dann bei der Bestimmung der Abweichungswinkel jedesmal in Rechnung, da eine Verstellung des Compasses gegen die Visierlinie selten zuläfsig ist.

2. Die zweite Prüfung setzt die Kenntnifs der Declination der Magnetnadel an dem Beobachtungsorte voraus, welche aber in dem zu diesem Zwecke abgesteckten Meridian durch die aufgestellte Boussole sich leicht ergiebt. Dann stelle man vor das Objectiv des Fernrohrs der in der Richtung des Meridians aufgestellten Boussole in horizontaler Lage ein Reifsbrett oder eine eisenfreie Mefstischplatte in einer solchen Höhe auf, dafs das Fadenkreuz des Fernrohrs der auf sie gesetzten Kippregel mit dem des Fernrohrs der unverändert gelafsenen Boussole zur Coincidenz gebracht werden kann und ziehe an der Kante des Lineals eine Gerade auf dem Reifsbrett, so stellt diese die Mittagslinie vor. Bringt man nun an diese nach einander

beide Längskanten der Zulegeplatte in derselben Lage, die sie auf der Boussole einnahm, und zeigt dabei die Magnetnadel denselben Abweichungswinkel, so sind die Kanten mit der Zwölftenstundenlinie (§. 132), und daher auch unter sich parallel.

Eine etwaige Verbefserung würde aber nur durch das Abschleifen der Kanten, die selbstverständlich auch als gerade Linien zu prüfen sind, erreicht werden können.

Anmerkung. Ueber die Verbefserung des Indexfehlers des Höhenbogens ist §. 242 zu vergleichen.

Zweites Capitel.

Beschreibung, Prüfung und Berichtigung der Reflexionswerkzeuge.

§. 142.

Obgleich die Reflexions- oder Spiegelwerkzeuge ihrer Natur und Construction nach keiner festen Unterlage bedürfen, daher vorzugsweise von dem Nautiker zu der Bestimmung der Lage der Oerter auf dem Meere angewandt werden: so können sie doch auch dem Geodäten bei der Mefsung von Winkeln, welche terrestrische Objecte mit einander bilden, dann mit Vortheil dienen, wenn bei den im ersten Capitel beschriebenen Azimuthalinstrumenten wegen Mangels an Platz kein Stativ anzuwenden ist. Da aber in diesem Falle nicht unmittelbar der geforderte Horizontalwinkel, sondern nur der von den Schenkeln gebildete schiefliegende Naturwinkel gemefsen werden kann, so mufs zur Reduction desselben auf den Horizontalwinkel, von jedem seiner Schenkel noch der Elevations- oder Depressionswinkel bestimmt werden, was indessen nur durch Zuziehung eines künstlichen Horizonts möglich ist. In dieser Beziehung ist daher für den praktischen Geometer der Gebrauch der Spiegelinstrumente bei den terrestrischen Winkelmefsungen nur ein beschränkter zu nennen. Den ausgedehntesten Gebrauch gestattet durch die Anwendung eines leicht transportabelen Metallstativs jedenfalls der Steinheil'sche Prismenkreis, der dadurch insbesondere dem reisenden Geometer zur Zeit- und Ortsbestimmung bei grofser Genauigkeit viel Bequemlichkeit gewährt.

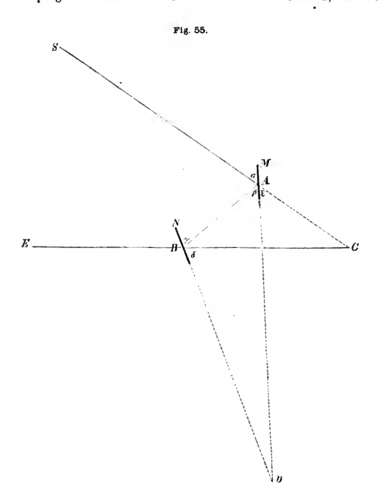
A. Reflexionsinstrumente mit Spiegeln.

§. 143.

Die Construction und der Gebrauch der Reflexionswerkzeuge, welche nur ebene Spiegel enthalten, beruht auf folgenden Sätzen der Katoptrik:

1. Wenn ein Lichtstrahl SA (Fig. 55) auf einen Spiegel M fällt und von diesem auf einen zweiten Spiegel N in einer zu den Spiegeln normalen Ebene AB reflectiert wird, so ist

Fig. 55.



der Winkel, welchen der in der erwähnten Ebene von dem zweiten Spiegel reflectierte Strahl BC mit dem Einfallsstrahle SA in C bildet, doppelt so grofs, als der Winkel BDA, in dessen Schenkeln die beiden Spiegel liegen.

Denn nach den Gesetzen der Spiegelnng ist

$$\alpha = \beta = \varepsilon \text{ und } \gamma = \delta;$$

da aber $\gamma = \beta + D$

also $D = \gamma - \beta = \delta - \varepsilon$

und ferner $D + \delta = C + \varepsilon$ ist,

so ist $C = 2\,D$.

Denkt man sich also in irgend einem Punkte der Linie BC das Auge, so sieht diefs das Object S in der Richtung EBC. Hat demnach der Spiegel N eine solche Stellung gegen das Auge, dafs diefs über dem Spiegel weg ein zweites Object E wahrnimmt, welches mit dem optischen Bilde von S coincidiert, so ist der Winkel, den die beiden Objecte mit dem Standorte C einschliefsen, doppelt so grofs, als der Winkel D der beiden Spiegel, der auf einem eingetheilten Kreise abgelesen werden könnte.

Fig. 56.

2. Wenn ein Spiegel MN (Fig. 56), auf welchen ein Lichtstrahl SA unter einem beliebigen Winkel fällt, um einen bestimmten Winkel $MAM_1 = \alpha$ so gedreht wird, dafs die Drehungsachse normal auf der Einfallsebene steht, so ist der Winkel, den die reflectierten Strahlen BA und B_1A vor und nach der Drehung mit einander bilden, $= 2\alpha$.

Denn
$$\begin{aligned} B_1AB &= B_1AN_1 - BAN_1, \\ &= B_1AN_1 - (BAN - \alpha), \\ &= B_1AN_1 - BAN + \alpha, \\ &= SAM_1 - SAM + \alpha = 2\alpha. \end{aligned}$$

Wenn daher umgekehrt, BA und B_1A zwei verschiedene auf einen Spiegel fallende Lichtstrahlen sind und beide nach einerlei Richtung AS reflectiert werden sollen, so mufs der Spiegel, um eine normal auf der Einfallsebene stehende Achse, um den halben Winkel gedreht werden, welchen die beiden Einfallsstrahlen mit einander einschliefsen.

§. 144.

Der Spiegelsextant.

Die eigentliche Erfindung der Spiegelwerkzeuge verdanken wir Newton, als es darauf ankam, zu den Längenbestimmungen der See-

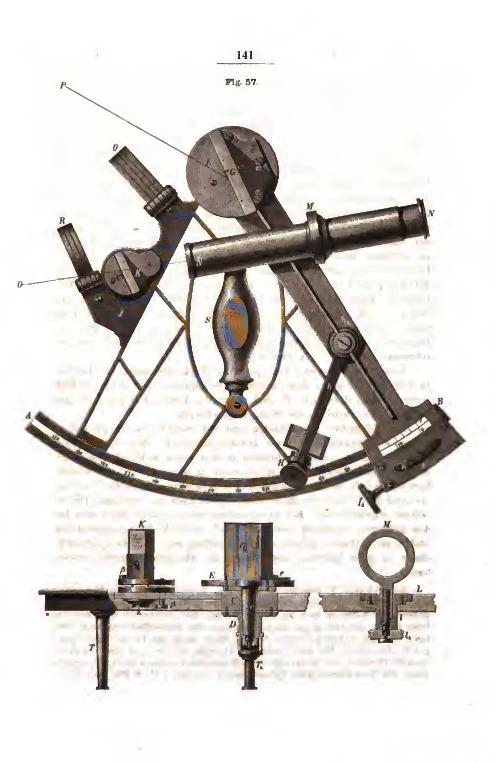
örter durch die Meſsung der Monddistanzen auf dem schwankenden Schiffe Winkelmeſser zu besitzen. Seine Erfindung theilte er 1700 Hadley mit, wodurch dieselbe aber zufällig unbekannt blieb; erst nach Hadley's Tode zeigten die hinterlaſsenen Schriften, daſs Newton die erste Idee dazu ausgesprochen habe. Indessen legte Hadley der Londoner Societät die erste Beschreibung der nach ihm benannten Sextanten 1731 zuerst vor, weshalb auch letzterer gewöhnlich als der erste Erfinder angesehen wird*).

Der in Fig. 57 in halber wahrer Gröſse theils in vorderer Ansicht, theils in Durchschnitten dargestellte Spiegelsextant ist nach Troughton'scher Einrichtung vom verstorbenen Hohnbaum in Hannover angefertigt. Der eine Haupttheil desselben ist ein eingetheilter Bogen AB von sechzig und einigen Graden Länge, dessen silberner Limbus in 120 halbe Grade getheilt ist, die aber nach dem vorigen Paragraphen für ganze gelten. Jeder der Grade ist weiter von 5 zu 5 Minuten getheilt.

Der Bogen ist mit der im Mittelpunkte befindlichen durchbohrten Scheibe C durch Speichen, schmale Stäbe und Querstäbe auf die möglichst leichteste, aber doch die gehörige Festigkeit gewährende Art verbunden. An der Scheibe ist unter der Sextantenebene eine Hülse D befestigt, welche, so wie die Scheibe C, den konischen Stahlzapfen e der Alhidade EF aufnimmt. In dem Mittelpunkte des Sextanten erweitert sich die Alhidade zu einer Scheibe E, in welche der erwähnte Zapfen gelöthet und auf der die Fuſsplatte e des groſsen oder Zeigerspiegels G durch drei Schrauben befestigt, letzterer also mit der Alhidade beweglich ist. An dem anderen Ende der Alhidade ist die Vernierplatte f, so wie die Vorrichtung zur Hemmung der groben und zur mikrometrischen Bewegung derselben angebracht. Zu der letzteren dient die Mikrometerschraube f_1, so wie die, in der Zeichnung nicht sichtbare, hinter der Platte F liegende Klemmschraube nebst Halterplatte. Durch die auf der Platte F liegende plattenförmige Druckfeder f_2 wird die schleifende Bewegung der Platte auf dem Bogen AB vermindert. Zum genauen Ablesen der Theilung dient die Loupe H, deren Halter h an einer auf der Alhidade befestigten Säule h_1 drehbar ist. An der Speichenplatte J des Sextanten ist die Fuſsplatte des kleinen oder Kimmspiegels K, dessen obere Hälfte nicht foliiert ist, mittelst Schrauben in ebenfalls normaler Lage angebracht. Ihm gegenüber findet sich auf der zweiten Speichenplatte L ein normal gegen dieselbe beweglicher Ring M, in welchen für nahe terrestrische Objecte ein Rohr, für entferntere oder Himmelskörper aber ein astronomisches Fernrohr NN eingeschraubt werden kann, so daſs das hinter demselben befindliche

*) Gehler's physikalisches Wörterbuch. Neue Ausg. VI. 26. und VIII. 781.

Fig. 57.



Auge in der Richtung NO durch den unbelegten Theil des kleinen Spiegels das links liegende Object O, in dem Spiegel aber das durch zweimalige Reflexion entstandene Bild des rechtsliegenden Objects P erblickt. Die zur Helligkeitsabänderung der von den Objecten entstandenen Bilder nöthige senkrechte Bewegung des Ringes geschieht durch die in dem parallelepipedischen Ansatze l angebrachte Stellschraube l_1. Zu Beobachtungen an der Sonne enthält das Ocular des Fernrohrs ein Sonnenglas und zu gleichem Zwecke finden sich auch an der Speichenplatte J farbige Gläser Q und R in Metallrahmen, von denen die ersteren durch Charniere vor den grofsen, die letzteren hinter den unbelegten Theil des kleinen Spiegels gebracht werden können. In der Mitte des Werkzeugs befindet sich ein etwas drehbarer Handgriff S, an welchem dasselbe in der einen Hand gehalten wird. Zur Verbefserung eines etwaigen Fehlers in der Stellung der Spiegel sind an den Fufsplatten derselben noch Correctionsschrauben und unter dem Fufse des kleinen Spiegels ist auch eine Schraube k angebracht, wodurch er dem grofsen Spiegel, bei einer bestimmten Stellung der Alhidade, erforderlichen Falls parallel gestellt werden kann. In der vorliegenden Construction dienen beim grofsen Spiegel die drei Befestigungsschrauben zugleich zur Correction.

Zum Verpacken und Transport des Werkzeugs dient ein Kasten, in welchen die unter dem Sextanten befindlichen drei Füfse gestellt werden. Zwei derselben, T, sind unter dem Bogen AB befestigt, der dritte T_1 aber wird an die Hülse D geschraubt.

Der Halbmefser der Sextanten geht von zwölf bis zu einigen Zollen; in dieser Kleinheit heifsen sie Dosensextanten. Man findet einen solchen abgebildet und beschrieben in dem schon mehrfach erwähnten Magazin mathematischer Werkzeuge u. s. w. von F. W. Breithaupt, Heft 3, so wie in Engelbreit's Instrumenten der Geodäsie und Hydrometrie; in welchem Werke auch ein englischer Dosensextant abgebildet ist. Bei terrestrischen Gegenständen pflegt man bei den gröfseren Sextanten sich wohl noch eines leicht transportabelen Stativs zu bedienen, welches eine Einrichtung hat, dafs die Sextantenebene in jede beliebige Lage gegen den Horizont gebracht werden kann.

Anmerkung. 1. Obgleich die Sextanten, da ihnen ein gröfserer Halbmefser als den Spiegelkreisen gegeben werden kann, eine gröfsere Genauigkeit im Ablesen gestatten, so haben sie doch den grofsen Mangel, dafs ein etwaiger Excentricitätsfehler (vgl. §. 150, Anm. 1) nur durch Anwendung eines Theodolithen erkannt werden kann. Sie sind deshalb in neuerer Zeit mit Recht durch den Pistor'schen Spiegel-Prismenkreis fast ganz verdrängt. Dasselbe gilt auch von einigen anderen Spiegelwerkzeugen, die vorzugsweise bei militairischen Aufnahmen angewandt werden, wohin das katadioptrische Spiegellineal (vgl. H. g. I. S. 496), der kata-

dioptrische Zirkel von Höschel, der Douglas'sche Reflector, das Schott-sche neue Spiegelinstrument (vgl. H. g. I. S. 503) u. n. a. gehören.

2. Mit demselben Rechte sind auch die zuerst von Tob. Mayer in Vorschlag gebrachten und später von Borda verbefserten Reflexionskreise, welche zwar die Anwendung der Methode der Repetition bei der Winkelbestimmung gestatten, durch den erwähnten Pistor'schen Spiegel-Prismenkreis verdrängt, daher hier die Beschreibung jener Werkzeuge unterlafsen werden kann. Ueber den Borda'schen Reflexionskreis vgl. m. H. g. I. S. 493.

Die Fehler des Spiegelsextanten und deren Berichtigung.

§. 145.

Wenn schon bei allen im 1. Capitel beschriebenen Winkelmefsern, vor dem Gebrauche derselben zu Winkelmefsungen, eine Auffindung ihrer Fehler und eine möglichste Berichtigung derselben ein wesentliches Geschäft des ausübenden Geometers bilden mufste, aber doch mehrere der Fehler durch die Art der Mefsung unschädlich gemacht werden können: so mufs bei den Reflexionsinstrumenten eine vor dem Gebrauche vorgenommene Untersuchung und Berichtigung ihrer Fehler um so mehr als nothwendig angesehen werden, da die meisten derselben nicht durch die Art der Beobachtung unschädlich zu machen sind.

Diese Prüfungen beziehen sich nun:

1) auf die Untersuchung, ob die Glasebenen der Spiegel parallel und wirklich eben sind;

2) ob beide Spiegel senkrecht auf der Instrumentenebene stehen;

3) ob die Visierlinie des Fernrohrs dieser Ebene parallel ist, und

4) ob die Blendgläser von parallelen Ebenen gebildet werden.

Aufserdem würden auch hier noch die Theilungsfehler zu untersuchen und der Indexfehler zu ermitteln sein, der bei dem direct beobachteten Gegenstande hinsichtlich der Stellung der Spiegel gegen den Stand des Index des Verniers und des Nullpunkts der Theilung vorhanden ist.

§. 146.

1. Prüfung des Parallelismus der Glasebenen der beiden Spiegel.

Man wendet zunächst den grofsen, dann den kleinen Spiegel gegen ein gut sichtbares, scharf begränztes irdisches Object, oder noch zweckmäfsiger gegen einen hellen Stern. Zeigt sich das Bild dabei nicht ganz fehlerfrei, also bei dem Sterne kein scharf begränzter kleiner Kreis, so sind entweder die Ebenen des angewandten Spiegels nicht parallel, oder die Vorderfläche desselben stellt keine Ebene dar; die Spiegel sind dann unbrauchbar.

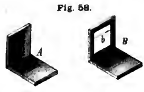
§. 147.

2. Prüfung der normalen Stellung der Spiegel gegen die Ebene des Spiegelwerkzeuges.

1. Beim grofsen Spiegel geschieht diese Untersuchung am einfachsten dadurch, dafs man seine Alhidade ungefähr auf 60° stellt, darauf das Spiegelinstrument horizontal hält, den Limbus von sich abgekehrt, und nun schräg so gegen den Spiegel sieht, dafs man einen Theil des Limbus und zugleich das im Spiegel reflectierte Bild desselben wahrnimmt. Zeigt dann der unmittelbar gesehene Theil des Limbus gegen das reflectierte Bild desselben nicht die geringste Abweichung, d. h. ist der eine die Verlängerung des anderen, so hat der grofse Spiegel die erforderliche normale Stellung. Erscheint aber der reflectierte Bogen höher, so ist die vordere Spiegelfläche gegen die Werkzeugsebene unter einem spitzen Winkel geneigt; erscheint derselbe niedriger, so ist der letztere Winkel stumpf.

Oder man wendet die in Fig. 58 dargestellten Dioptern *A* und *B* an, in welchen der ausgespannte Faden *b* des einen genau in gleicher Höhe mit dem Ocularloch *a* des anderen liegt. Man bringt das Spiegelinstrument auf eine horizontale Unterlage, stellt *A* etwa bei 120° und bewegt die Alhidade so weit auf dem Limbus fort, bis man im Spiegel das Bild des Loches *a* sieht. Dann stellt man zwischen *A* und den Spiegel das Diopter *B* vor den Spiegel, so mufs bei der normalen Stellung des Spiegels, beim Hindurchsehen durch *a* der Faden *b* mit seinem Bilde genau zusammenfallen.

Fig. 58.



2. Beim kleinen Spiegel geschieht die Prüfung dadurch, dafs man denselben in eine mit dem grofsen Spiegel parallele Lage bringt, indem man z. B. beim Sextanten den Index des Verniers ungefähr auf den Nullpunkt der Theilung stellt, dann durch das Sehrohr oder den Ring des Fernrohrs, oder auch durch diefs selbst nach einem scharf begränzten terrestrischen Objecte oder auf einen hellen Stern oder den Rand der Sonne sieht. Läfst sich dann durch etwaige geringe Drehung der Alhidade die Coincidenz des direct gesehenen Objects mit seinem katoptrischen Bilde genau herstellen, so sind beide Spiegel parallel und daher auch der kleine Spiegel normal zur Werkzeugsebene. Wenn aber die Coincidenz sich auf keinerlei Weise bewerkstelligen läfst, so ist in der Stellung des kleinen Spiegels ein Fehler vorhanden. (Ueber diese Einstellung vgl. m. §. 149.)

3. Am grofsen Spiegel wird die Verbefserung an den Schräubchen $\alpha\alpha\alpha$, mit welchen der Fufs desselben auf der Unterlage befestigt ist, vorgenommen und nöthigenfalls noch durch Unterlegen kleiner, gleich dicker Papierstückchen nachgeholfen. Am kleinen Spiegel dienen zur Verbefserung die Schrauben $\beta\beta$.

§. 148.

3. Prüfung der parallelen Lage der Visierlinie mit der Ebene des Spiegelwerkzeugs.

1. Man setze auf die Ebene des Spiegelinstruments neben das Fernrohr das im vorigen Paragraphen erwähnte Oculardiopter A, und neben den kleinen Spiegel das Objectivdiopter B, so dafs eine durch die Mitte der Dioptern gedachte Linie dem Fornrohr nach dem Augenmafse parallel ist. Man visiere nun nach einem so entfernten, deutlich markierten Objecte, dafs der Unterschied in der Höhe der Diopteru gegen die Höhe der Visierlinie nicht in Betracht kommt. Sieht man alsdann den Gegenstand auch mitten im Fernrohre, so ist die Visierlinie parallel der Werkzeugsebene.

2. Da das Fadennetz des Fernrohrs der Spiegelinstrumente aufser dem Verticalfaden noch zwei parallele, von dem Mittelpunkte gleichweit abstehende Fäden enthält, so kann die Untersuchung auch so vorgenommen werden. Man giebt den Horizontalfäden eine mit der Werkzeugsebene nahezu parallele Lage, wählt die Sonne und den Mond, oder diesen und einen hellen Stern und bringt ihre Bilder an dem der Werkzeugsebene zunächstliegenden Faden zur genauen Berührung. Durch eine entsprechende Verstellung des Apparats bringt man nun dieselben Objecte an den zweiten Horizontalfaden. Bleibt an ihm dann die Berührung der Bilder vollkommen die nämliche, so hat das Fernrohr die erforderliche Lage. Trennen sich aber an dem zweiten Faden die Ränder der Bilder, so liegt das Objectivende des Fernrohrs der Spiegelwerkzeugsebene näher, als das Ocularende; die umgekehrte Neigung findet Statt, wenn die Ränder der Bilder sich decken. Damit aber der Fehler leichter entdeckt werden kann, müfsen die Objecte wenigstens um 90^0 von einander abstehen.

Eine Verbefserung des Fehlers an dem oben beschriebenen Spiegelsextanten ist nicht möglich, da das Fernrohr unmittelbar in den Ring M, nicht aber in einen anderen, gegen jenen durch Schrauben zu verstellenden Ring (vgl. Fig. 62) geschraubt wird.

§. 149.

4. Bestimmung der Gröfse des Indexfehlers beim Spiegelsextanten.

Soll der Index des Verniers bei der Mefsung eines schiefliegenden oder Höhen-Winkels den richtigen Bogen angeben, so müfsen offenbar

für das Object, von welchem ab die Drehung des grofsen Spiegels geschieht, beide Spiegel eine parallele Lage haben, wenn der Index des Verniers auf dem Nullpunkte der Theilung steht, weil nur dann das dioptrische Bild des direct beobachteten Objects, zu dem man meistens bei Mefsungen schiefliegender Winkel das linksliegende nimmt, mit dem katoptrischen des anderen coincidieren kann. Nachdem man nun den Index auf den Nullpunkt gestellt hat, sieht man durch den unbelegten Theil des kleinen Spiegels auf das (linksliegende) Object und untersucht, ob das katoptrische Bild desselben Gegenstandes mit dem direct beobachteten Objecte coincidiert. Ist diefs nicht der Fall, so bewirkt man durch Anwendung der Mikrometerschraube die genaue Coincidenz; dann giebt der Vernier unmittelbar die Gröfse des Indexfehlers für das direct beobachtete Object an. Fällt nun der Index vor, d. h. links von 0, wenn man vom Mittelpunkte des Instruments aus die von Links nach Rechts beschriebene Eintheilung betrachtet, so mufs der abgelesene Winkel als additiv, dagegen als subtractiv dem auf dem Kreisbogen abgelesenen Mafs des schiefliegenden Winkels zugesetzt werden, wenn er hinter 0, also in der Gradeintheilung liegt.

Will man aber den Indexfehler zu Null machen, so mufs die mangelnde Coincidenz des direct beobachteten Gegenstandes mit dem katoptrischen Bilde desselben durch Verstellung des kleinen Spiegels ausgeführt werden, wozu in Fig. 57 die Schraube k dient. In diesem Falle pflegt man aber zweckmäfsiger den einen Rand der Sonne oder des Mondes zu wählen, indem dann für alle irdischen Objecte der sich ergebende Indexfehler additiv sein wird. Man bringt nämlich den rechtsliegenden Rand des directen Sonnenbildes mit dem linksliegenden des katoptrischen zur Berührung und liest die Angabe des Verniers ab, diese sei $= + a_1$. Durch eine Bewegung der Alhidade mittelst der Mikrometerschraube bringt man nun die anderen beiden Sonnenränder zur Berührung, ist dann die Angabe des Verniers $= - a_2$, so ist **der Indexfehler immer gleich der halben algebraischen Summe der nach ihren Vorzeichen genommenen beiden Ablesungen**, also in dem vorliegenden Falle $i = \pm \frac{1}{2}(a_1 - a_2)$, je nachdem $a_1 \gtrless a_2$ ist.

Bestimmt man nun noch die absolute Summe beider Ablesungen, so mufs deren Hälfte mit dem in den astronomischen Ephemeriden angegebenen Durchmefser der Sonne übereinstimmen.

§. 150.

5. Prüfung des Parallelismus der Blendgläser.

Es ist einleuchtend, dafs wenn die Blendgläser keine parallele Ebene haben, dann auch die auffallenden Lichtstrahlen nicht parallel den aus der

anderen Ebene austretenden sein können, in die Bestimmnng des Winkels demnach ein Fehler treten wird, dessen Gröfse erforscht werden mufs.

Bestimmt man beim Sextanten den Indexfehler z. B. für die Sonne, zuerst ohne vorgelegte Blendgläser, nur mittelst des vor dem Ocular befindlichen Sonnenglases, dann aber mit den vorgeschobenen Blendgläsern, so wird der Unterschied beider Bestimmungen dem Fehler der Blendungen gleich zu setzen sein. Bei Höhenbestimmungen an der Sonne wird man deshalb auch den Fehler dadurch unschädlich machen, dafs man den Indexfehler mit denselben Blendgläsern bestimmt, welche bei der Höhenmefsung benutzt werden. Selbstverständlich wird aber von dieser Eliminierung bei der Winkelbestimmung zwischen der Sonne und dem Monde oder einem terrestrischen Gegenstande nicht mehr die Rede sein können. Lafsen sich nun die Blendgläser in ihren Fafsungen umstecken, wie es bei einigen Spiegelkreisen der Fall ist, so wird offenbar durch die halbe Differenz der durch die Umsteckung der Gläser erhaltenen Resultate der Indexfehler ausgedrückt, also auch der Fehler der Blendgläser bestimmt werden können. Ist aber eine solche Umsteckung nicht gestattet, so läfst sich der Fehler auf folgende Art bestimmen. Man ermittelt zunächst beim Monde den Indexfehler ohne Blendgläser, dann durch Vorschiebung der weniger intensiv gefärbten, z. B. der mattgrünen und mattrothen, Gläser vor den kleinen und vor den grofsen Spiegel, so erhält man dadurch die Fehler für jedes einzelne Glas. Verbindet man darauf bei der Bestimmung des Indexfehlers an der Sonne die dunkelgefärbten Gläser mit einem der vorigen, so giebt die Vergleichung des Resultats mit dem beim Monde ohne Zuziehung der Gläser gefundenen, den Fehler der mit einander verbundenen Gläser und daher auch den für das dunkelgefärbte Glas, so dafs also nun bei Winkelbestimmungen der Fehler jedes einzeln angewandten Glases in Betracht gezogen werden kann.

Anmerkung 1. Die meisten Sextanten sind auch noch mit einem Excentricitätsfehler behaftet, indem nämlich die Achse des Zapfens der Alhidade nicht durch den Mittelpunkt der Theilung geht. Man erfährt die Gröfse seines Einflufses, wenn man mehrere genau bekannte, z. B. mit einem Theodolith gemefsene Winkel mit den mit dem Sextanten gemefsenen vergleicht und die Unterschiede der gemefsenen und wahren Werthe bestimmt. Da aber der Fehler bei einem vollen Kreise durch die Ablesung an zwei diametral gegenüberstehenden Verniers vollständig eliminiert werden kann (§. 113), so wendet man zu genaueren Beobachtungen in neuerer Zeit Statt der Sextanten nur noch die Reflexionskreise an, und von diesen insbesondere den Spiegelprismenkreis von Pistor und Martins und den Prismenkreis von Steinheil.

Anmerkung 2. Obgleich nicht in Abrede gestellt werden kann, dafs die Berichtigung der im Vorhergehenden angegebenen Fehler durch die bekannten mechanischen Hülfsmittel nicht immer mit der Genauigkeit auszuführen ist, die ein voll-

kommen fehlerfreies Instrument fordert, also insofern nach dem Einflufs gefragt werden könnte, den eine noch geringe Neigung der Fernrohrachse und der beiden Spiegel gegen die Spiegelwerkzeugsebene auf die Mefsung der Winkel ausübt: so ist doch auf der anderen Seite nicht zu leugnen, dafs die genaue Bestimmung der numerischen Werthe dafür in den wenigsten Fällen zulässig ist. Aus diesem Grunde glaube ich die dahin gehörigen Betrachtungen übergehen und den Leser, der davon Kenntnifs zu nehmen wünscht, auf folgende Werke verweisen zu können:

Bohnenberger's Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung u. s. w. Göttingen, 1795.

Ueber den Spiegelsextanten, von Encke im Berliner astronom. Jahrb. Bd. 30.

Sawitsch praktische Astronomie. II. Hamburg, 1851.

Brünnow's sphärische Astronomie. 2. Aufl. Berlin, 1862.

B. Reflexionsinstrumente mit Prismen.

§. 151.

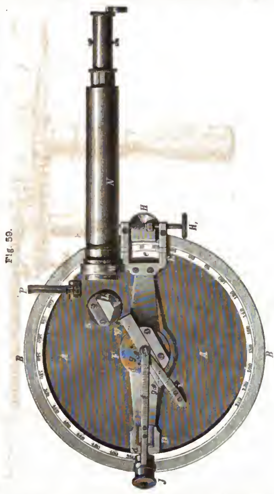
1. Der Spiegelprismenkreis von Pistor- und Martins *).

In den Figg. 59 u. 60 ist ein Pistor-Martins'scher Spiegelprismenkreis, von Meyerstein in Göttingen angefertigt, in der vorderen (oberen) und Seitenansicht in halber wahrer Gröfse dargestellt.

Der Hauptheil des Apparats, der Kreis, besteht hier aus einer vollen Scheibe AA mit einem 1 Linie hohen Rande BB, dessen innerer Raum den eingetheilten silbernen Limbus enthält. Bei den in gröfseren Dimensionen ausgeführten Apparaten ist der Kreisrand mit dem Mittelstück durch Speichen verbunden, der Limbus auch konisch abgedreht. An die Bodenfläche der Scheibe ist wie beim Sextanten mittelst einer Flansche die Büchse C zur Aufnahme eines Stahlzapfens festgeschraubt, mit welchem die an seiner Flansche befestigte Alhidade DE in der Büchse gedreht werden kann. Das kreisförmige Mittelstück F der Alhidade trägt den Rahmen G des Planspiegels, dessen nach F liegende Seite die reflectierende ist; durch drei kleine Schräubchen ggg,

*) Der ursprüngliche Name dieses Apparates ist: P. u. M. patentierter Reflexionskreis. Da Herr Martins in Berlin in einer schriftlichen Mittheilung auf einige Fehler des in den Figg. 59 u. 60 (Figg. 209 u. 210 d. g. I.) abgebildeten aufmerksam gemacht hat: so glaube ich die wesentlichen derselben hier dem Leser nicht vorenthalten zu dürfen. 1. Die Lichtaustrittsebene des Prisma mufs in ihrer Breite der Objectivöffnung entsprechen und, wegen des lichtschwächeren reflectierten Bildes, in ihrer Höhe etwas mehr als die halbe Objectivöffnung betragen. 2. Die Fafsung der Hypotenusenebene darf nicht über die obere Fläche des Prisma greifen, weil dadurch eine Trennung der beiden Bilder erfolgt, die sehr störend sein kann. 3. Die Correctureinrichtung des Prisma ist unzweckmäfsig und es beschränkt der breite Prismastuhl K den Bewegungsbogen der Alhidade. 4. Die Führungsleiste für den Ocularauszug, so wie die Correctionsschrauben des Fadenkreuzes erscheinen überflüfsig, dagegen würde für das ganze Fernrohr eine vorhandene Correctionsvorrichtung zweckmäfsig sein. 5. Der Spiegel ist nur reichlich so hoch, wie das Prisma zu nehmen.

welche durch die Fafsung gegen das Glas treten, kann die senkrechte Stellung des Spiegels gegen die Alhidade vermittelt werden. An den Enden der letzteren sind die Verniers *d*, *e* so befestigt, dafs sie mit dem Limbus in eine Ebene fallen. Zur Hemmung der groben Bewegung und feinen Einstellung der Alhidade dient ein Federmikrometer mit der Halterplatte und Klemmschraube *H* und der Mikrometerschraube H_1 (vgl. Fig. 36). Zur genauen und bequemen Ablesung der Theilung ist die Loupe *J* mit ihrem Arme *i*, um *α* an dem Arme einer auf dem Kreise befestigten Stütze i_1 drehbar; zugleich enthält der Arm *i* die Blende i_2.


Fig. 59.

Auf dem massiven Cylinder *K* ist die Fufsplatte des gleichschenklicht-rechtwinklichten Glasprisma's *L* so befestigt, dafs wenn der Index des Verniers 1 auf 0 steht, die Hypotenusenebene mit der Spiegelfläche des Planspiegels nahezu parallel ist. Um fremdes Licht abzuhalten, dient die Fafsung der Hypotenusenebene des Prisma's zugleich als Blende. Zur senkrechten Stellung des Prisma's ruht der Cylinder *K* auf drei Stellschrauben *l l l* (von denen in der Zeichnung nur

zwei sichtbar sind); die gröfsere Zugschraube l_1 dient nicht nur zur Verstellung des Cylinders, sondern auch zu seiner Befestigung gegen die Kreisebene. Auf dieser ist wieder, der Austrittskatheten-

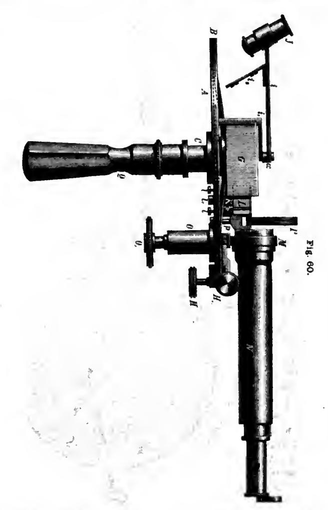


Fig. 60.

ebene des Prisma's gegenüber, der Träger *M* des mit einem Sonnenglase versehenen Fernrohrs *N* angebracht, der, wie beim Sextanten, theils zur Helligkeitsabänderung, theils um über dem Prisma weg das eine Object direct beobachten zu können, in verticaler Richtung

durch eine in einer Büchse O befindliche Schraube O_1 verstellbar ist. Aus letzterem Grunde ist auch die Oeffnung des Fernrohrobjectivs gröfser, als die Höhe des Prisma's. Zugleich hat die Visierlinie des Fernrohrs gegen das Prisma und den Spiegel eine solche Lage, dafs ein ihr parallel auf den letzteren fallender Lichtstrahl auch parallel mit seiner ursprünglichen Richtung gebrochen wird. Da diese Richtung nun, wenn die Indexlinie des Verniers durch 0 geht, unter einem Winkel von 20° auf den Spiegel fällt, so mufs unter diesem Winkel die Spiegelfläche des Planspiegels gegen die Indexlinie geneigt sein. Die kreisförmigen Fafsungen F der beiden, dunkelroth und grün gefärbten, kreissegmentartig geformten Blendgläser sind auf einer zwischen dem Fernrohr und dem Prisma auf dem Kreise drehbaren Säule p angebracht und auch für sich um eine Achse drehbar. In Fig. 59 sind sie als nieder-, in Fig. 60 als aufgeschlagen dargestellt. Durch die erwähnten Drehungen der Säule und der Gläser kann man jedes derselben und zugleich beide in beliebige Lagen vor das Prisma oder vor das Fernrohr bringen.

Die Verniers geben zwar unmittelbar nur 20 Sekunden vom gemefsenen Winkel an, gestatten aber doch noch mit ziemlicher Sicherheit eine Schätzung von 10 Sekunden.

Die bis auf Sechstelgrade ausgeführte Eintheilung des Limbus, die also 20 Minuten des zu mefsenden Winkels darstellt, ist, wegen der durch den Stand des Prisma's beschränkten Drehung der Alhidade, nur bis auf die entsprechenden Bogen von 0 bis 240° und von 400° bis 600° ausgeführt und bezeichnet.

An die äufseren Schraubengänge der Büchse wird zum bequemen Halten des Instruments der Handgriff Q geschraubt.

Anmerkung. Die erste, obgleich kurze Beschreibung und Gebrauchsanweisung dieses zuerst patentierten Reflexionsinstruments findet sich im Berliner Gewerbe-, Industrie- und Handelsblatt von Neukrantz. 14. Band S. 17 u. f.

Die Fehler des Pistor-Martins'schen Reflexionsinstruments und ihre Berichtigung.

§. 152.

Im Wesentlichen stimmen die hier vorzunehmenden Untersuchungen über die Fehler und deren Berichtigung mit denen überein, welche in den §§. 146 u. f. angegeben sind.

1. Ob der Spiegel der Alhidade von ebenen und parallelen Flächen begränzt ist und ob die Seitenflächen des Prima's eben sind, wird nach §. 146 untersucht.

2. Die normale Stellung des Spiegels gegen die Kreisebene ist nach §. 147, 1. zu untersuchen und zu berichtigen.

3. Ob das Prisma eine normale Lage gegen die Kreisebene hat und seine Seitenebenen der Achse desselben parallel sind, wird auf folgende Weise geprüft. Man richtet entweder das Fernrohr oder auch nur den Ring desselben auf ein entferntes, deutlich wahrnehmbares Object, z. B. auf die verticale Kante eines Schornsteins oder Hauses, auf die verticale Stange eines Thurms u. dgl. und sucht durch Drehung der Alhidade das direct beobachtete Object mit seinem katoptrischen Bilde in eine solche Lage zu bringen, dafs das eine in die Verlängerung des andern fällt. Kann diese Coincidenz vollständig erreicht werden, so hat das Prisma nicht nur die erforderliche, genau prismatische Gestalt, sondern es steht dasselbe auch normal gegen die Kreisebene. Zeigt sich aber bei beiden Bildern auf der einen oder andern Seite keine Gerade, sondern ein spitzer oder stumpfer Winkel, so verbefsert man den Fehler durch Anwendung der Correctionsschraube des Prisma. Ist aber auch hierdurch der Fehler auf keine Weise wegzuschaffen, so hat das Prisma eine pyramidalische Form und würde dann unbrauchbar sein.

4. Die Prüfung der parallelen Lage der Visierlinie mit der Kreisebene wird nach §. 148 vorgenommen, der etwaige Fehler aber nicht an dem Ringe des Fernrohrs, sondern an den vortretenden Stellschräubchen der Ocularblendung verbefsert.

5. Die Bestimmung der Gröfse des Indexfehlers und die etwaige Verbefserung desselben geschieht nach §. 149. Für die letztere wird die Zugschraube l_1 (Fig. 60) etwas gelüftet, wodurch der Cylinder K mit dem Prisma auf den Spitzen der Stellschräubchen lll soweit als erforderlich gedreht werden kann. Dann ist die Zugschraube l_1 wieder fest anzuziehen. Es ist aber nach dieser Berichtigung rathsam, nun nochmals die unter 3. angegebene Prüfung zu wiederholen.

6. Die Prüfung der Blendgläser wird hier durch die Möglichkeit der Drehung derselben unter sich und die Drehung ihrer Säule gegen das im §. 150 angegebene Verfahren erleichtert. Hat man nach 5. den Indexfehler mit Vorlegung des einen Blendglases etwa in der Lage, dafs das Glassegment nach Unten gerichtet ist, bestimmt, so bringe man dasselbe durch Drehung um seine Achse und durch Drehung der Säule in die entgegengesetzte Lage und bestimme auch in dieser den Indexfehler. Weicht derselbe von dem zuerst bestimmten nicht ab, so ist das Glas ein Planglas mit parallelen Ebenen. Eine Abweichung des zweiten Resultats von dem ersten beweist aber den Nichtparallelismus der Glasebenen und es drückt dann die halbe Differenz der Resultate in beiden Lagen des Glases den von der mangelhaften Eigenschaft

desselben herrührenden Fehler aus. Nimmt man noch weiter die Untersuchung auch für das andere Glas allein, dann aber auch in seiner Verbindung mit dem ersten vor, und zeigen sich die Abweichungen so grofs, dafs sie nicht vernachläfsigt werden können, so mufs der Fehler bei jeder einzelnen Mefsung in Rechnung gebracht werden, oder die Gläser sind durch neue zu ersetzen.

§. 153.

2. Der Prismenkreis von Steinheil.

Die erste Angabe über die Einrichtung und den Gebrauch dieses Reflexionsinstruments, das in Verbindung mit einem Chronometer, ohne Zweifel einen der zweckmäfsigsten, transportabeln astronomischen Mefsapparate für geographische Ortsbestimmungen bildet, findet sich, vom Erfinder selbst mitgetheilt, in Schumacher's astronomischen Nachrichten, XI. Nr. 243 u. 247, woselbst auch ein Zusatz von Schumacher über die Anwendung desselben zu Polhöhenbestimmungen aus Circummeridianhöhen sich findet. Eine vollständige Theorie des Apparats von Bessel enthalten die Nr. 254 u. 255 desselben Bandes, auf welche ich den Leser verweisen mufs.

Der Umstand, dafs bei der Anwendung der Glasspiegel mit der Gröfse des zu mefsenden Winkels die Undeutlichkeit des doppelt reflectierten Bildes zunimmt und die Sextanten nicht auf alle Winkel anzuwenden sind, brachte den Erfinder des genannten Werkzeugs schon vor mehreren Decennien auf die Idee, bei einem Vollkreise Statt der Glasspiegel, Glasprismen von gleichschenklicht-rechtwinklichtem Durchschnitt anzuwenden. Damit aber die von Winkelobjecten herkommenden Lichtstrahlen nach dem Princip der totalen Reflexion reflectiert werden können, mufs das Prisma dergestalt um seine Achse zu drehen sein, dafs die austretenden Strahlen parallel mit der Visierlinie des Fernrohrs in das beobachtende Auge gelangen. Diese Drehung des Prisma mufs nach §. 143, 2. um einen halb so grofsen Winkel geschehen, als der Winkel der Objecte beträgt. Wird also ein Prisma mit dem eingetheilten Kreise, ein zweites mit der Alhidade desselben verbunden, so kann man durch Drehung beider Prismen wieder die Coincidenz der Bilder der Objecte bewirken. Da nun jedes dieser Prismen um etwa 48° gedreht werden kann, die Drehung beider demnach einen Winkel von über 90° umfafst, so folgt die Möglichkeit der Mefsung von Winkeln von über 180° Gröfse.

Sollen aber die gemefsenen Naturwinkel frei von constanten Beobachtungsfehlern sein, so müfsen die beiden Prismen nicht nur eine vollkommene Gleichheit ihrer Winkel besitzen, sondern auch in ihren

Seitenflächen vollkommene Ebenen darstellen; endlich müfsen die Prismen auch vollkommen mathematische Prismen sein; die erste Bedingung wird dadurch am sichersten erreicht, dafs ein Prisma von doppelter Höhe in zwei Hälften zerschnitten wird; durch die Nichterfüllung der letzteren bilden sich zwar kleine Fehler, aber von so geringer und constanter Gröfse, dafs sie meistens zu vernachläfsigen sind oder unschädlich gemacht werden können.

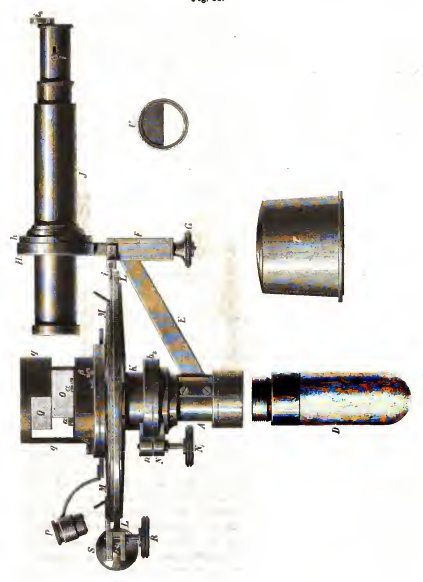
§. 154.

Die Figg. 61 und 62 stellen in halber wahrer Gröfse einen von Meyerstein in Göttingen angefertigten Steinheil'schen Prismenkreis in der vorderen Ansicht und die Haupttheile desselben im Verticaldurchschnitt dar. A ist die Büchse für die Hauptachse, welche aus zwei auf beiden Seiten einer Flansche b liegenden Konus B und C von verschiedenen Dimensionen besteht. Für Beobachtungen aus freier Hand wird in die Büchse der Handgriff D geschraubt; auch kann man mittelst des eingeschnittenen Gewindes den Apparat auf das in Fig. 63 dargestellte Metallstativ schrauben, wenn die Beobachtungslocalitäten die Anwendung eines solchen gestatten; endlich kann der Apparat bei seiner Berichtigung auch mit einem stählernen Dreifufs verbunden werden. (Fig. 64.)

An der Büchse ist durch ein Mittelstück der Arm E mit der Hülse F befestigt, in welcher mittelst der Schraube G der in einen Doppelring H auslaufende Träger des Fernrohrs, zur Helligkeitsabänderung, in verticaler Richtung sich bewegen läfst. Der innere Ring h, in welchen das Fernrohr J geschraubt wird, kann mittelst zweier Correctionsschrauben $\gamma_1 \gamma_1$ gegen den äufseren verstellt werden, um die Visierlinie des Fernrohrs parallel zur Kreisebene zu stellen; durch die Stellschräubchen i der Ocularblendung ist die Visierlinie durch die Drehungsachse zu führen.

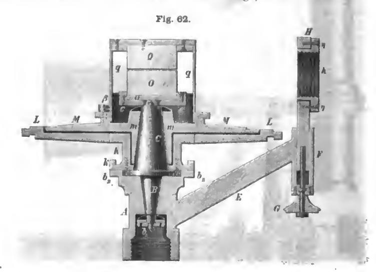
Der untere, kleine Konus B passt in die Büchse A, so dafs dadurch der bewegliche Hauptheil des Apparats gegen das feste Fernrohr gedreht werden kann. In der Büchse ruht er auf einer kugel-calotteförmigen Feder und wird durch eine Unterlegscheibe und Gegenmutter b_1 gegen dieselbe gehalten. Nach Oben erweitert sich die Büchse zu einer Scheibe $b_2 b_2$, auf welcher die auf der Flansche b festgeschraubte Büchse K mit dem Kreise LL sich drehen läfst. Innerhalb dieser Büchse, und zugleich den oberen, gröfseren Konus C umschliefsend, liegt die Büchse mm für die Alhidade MM. Zur Hemmung der groben Bewegung des Kreises nebst der Alhidade, dient die Klemme N mit der Klemmschraube N_1, indem in der ausgedrehten Nuth der an der Büchse K befindlichen Flansche k der Ansatz der Klemmplatte n seine Führung

Fig. 61.



erhält. Auf dem oberen Ende des Konus C ist eine massive Platte cc durch Schrauben befestigt, welche die mit Correctionsschrauben aa versehene Fufsplatte o des Kreisprisma's O trägt. Durch die auf den konischen Ansatz der Alhidadenbüchse mm gelegte kugel-calotteförmige Feder wird die Büchse so an ihren Konus gedrückt, dafs auch in umgekehrter Lage des Instruments die Beobachtung sicher ausgeführt werden kann. Auf einen Ansatz der Alhidade ist der Loupenträger mit zwei Loupen P, von denen nur die eine dargestellt ist, zum genauen Ablesen der Theilung gesteckt und auf diesem Ansatze endlich, mit den nöthigen Correctionsschräubchen $\beta\beta$ versehen, die Büchse qq für das Alhidadenprisma Q durch Schrauben so befestigt, dafs nur ein sehr

Fig. 62.



schmaler Zwischenraum zwischen beiden Prismen bleibt. In Fig. 61 bilden die Hypotenusenebenen eine normale Lage zu einander, in Fig. 62 fallen sie in eine Ebene. Auch ist die Büchse qq so ausgeschnitten, dafs durch die Ausschnitte zwar in allen Lagen das nöthige Licht auf die Prismen gelangen kann, dagegen aber die farbigen und falschen Bilder abgehalten werden. Durch die Klemmschraube R eines Mikrometerwerks kann die grobe Bewegung der Alhidade gehemmt, durch die Mikrometerschraube S aber die feine Achsendrehung erreicht werden. Es kann demnach durch Lösung der Klemmschraube N_1 und durch Anziehung der Klemmschraube R, sowohl der Kreis und die Alhidade mit den Prismen zusammen, als auch nach Anziehung von N_1 und Lüftung von R, die Alhidade mit ihrem Prisma allein gegen das Fern-

rohr verstellt werden. Um die erstere Drehung zu messen, enthält der silberne Limbus des Kreises zwei Eintheilungen, nämlich die von 10 zu 10 Minuten ausgeführte Haupteintheilung, von welcher die beiden Verniers der Alhidade noch 10 Sekunden unmittelbar angeben, aber 5 Sekunden noch sicher schätzen lassen und eine zweite am äußeren Rande von Grad zu Grad ausgeführte Theilung, zu welcher der Index auf einer kleinen zwischen Schraubenspitzen drehbaren und an der Hülse *F* befestigten Platte i_1 sich befindet.

Zum Schutz der Prismen dient die konische, mit Sammt ausgefütterte Stülpe *T* und zum Abhalten der Sonnenstrahlen außer dem am Ocular des Fernrohrs drehbaren Sonnenglase i_2 noch verschiedenfarbige Blendgläser, deren Fassungen vor das Objectiv des Fernrohrs gesteckt werden können, zur Hälfte aber ausgeschnitten sind, wie durch *U* dargestellt wird.

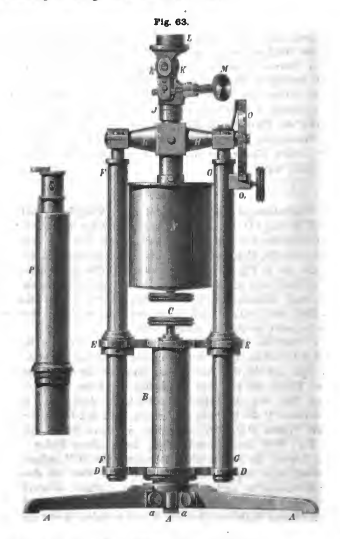
§. 155.

Zu Beobachtungen aus freier Hand wird, wie schon erwähnt, der Handgriff *D* (Fig. 61) mit der Büchse *A* verbunden und auch das daselbst dargestellte Fernrohr *J* angewandt. Kann aber dem Instrumente unter obwaltenden Umständen eine feste Unterlage gegeben werden, so dient dazu das in Fig. 63 im Drittel wahrer Größe dargestellte Metallstativ, welches nicht allein nur einen kleinen Aufstellungsraum fordert, sondern auch zusammengeschlagen keinen großen Kasten zum Transport fordert und deshalb auch leicht von dem reisenden Geographen oder Astronomen mitgeführt werden kann.

Den Fuß des Stativs bilden drei um Charniere *a a* bewegliche Arme *A A A*, welche in der Zeichnung als auseinander geschlagen dargestellt sind, und die dem beweglichen Obertheil zur Grundlage dienen. Um zwei Konus der von dem Mittelstück der Arme ausgehenden Verticalachse läßt sich die cylindrische Büchse *B* drehen und durch die Klemmschraube *C* die Drehung moderieren. Mit den Enden der Büchse sind zwei Platten *D D*, *E E* verbunden, an deren Enden cylindrische Säulen *F F*, *G G* festgeschraubt sind, deren obere Enden in cylindrischen Lagern die Zapfen einer Rotationsachse *H H* aufnehmen und durch übergelegte Kappen festgehalten werden. Der von dem Würfel der Umdrehungsachse nach Oben ausgehende Cylinder *J* erweitert sich zu einer schief gegen die Projectionsfläche stehenden starken Platte *K*, an deren oberem Ende ein Charnier *k* sich befindet, dessen eine Backe den mit einem Schraubengewinde versehenen Hals *L* trägt, auf welchen die Büchse *A* (Fig. 62) des Prismenkreises geschraubt werden kann. Eine seitlich angebrachte Differenzialschraube *M* mit Klemmen dient zur mikrometrischen Bewegung. Der an der entgegengesetzten Seite

des Würfels angebrachte, mit Blei ausgegofsene Cylinder N dient zur Balancierung des aufgeschraubten Instruments.

Fig. 63.



Durch den in Grade eingetheilten Trommelkreis O, für dessen Eintheilung die zugehörige Kappe die zwischen Schraubenspitzen dreh- und verstellbare Indexplatte enthält, kann die Lage des Prismenkreises

gegen den Horizont erkannt werden. Die mit der Klemmschraube verbundene Klemme O_1 dient zur Feststellung des Apparats in einer bestimmten Lage.

In der Verbindung des Apparats mit dem Stativ wird das in Fig. 61 angegebene Fernrohr *N* mit dem in Fig. 63 dargestellten gröfseren *P* vertauscht.

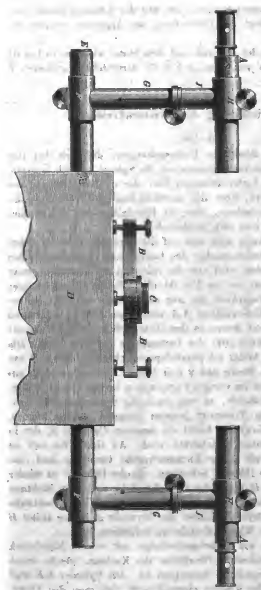
Die Berichtigung des Prismenkreises.

§. 156.

Selbstverständlich fallen die Untersuchungen, die sich bei den vorhergehenden Reflexionsinstrumenten auf die Spiegel an sich bezogen, hier weg, wogegen die Untersuchungen über die richtige Theilung des Limbus und des Verniers, über die parallele Lage der Visierlinie des Fernrohrs gegen die Kreisebene, über die Blendgläser und die Bestimmung des Indexfehlers hier sich wiederholen.

Die Hauptuntersuchung wird sich auf die parallele Lage der Achse der Prismen mit der Drehungsachse des Instruments erstrecken, wobei auch zugleich sich ergeben wird, ob die Seitenflächen derselben genau eben sind. Hierzu dient der in Fig. 64 ebenfalls im Drittel wahrer Gröfse dargestellte Hülfsapparat, der aus zwei identischen, mit Fadenkreuzen versehenen Hülfsfernröhren *A A* und einem kleinen stählernen Dreifufs *B B* besteht, auf dessen in der Mitte sich befindenden Ansatz *C* die Büchse *A* (Fig. 61 u. 62) des Instruments befestigt wird. Die Unterlage des letzteren bildet ein parallelepipedischer Holzkasten *D* von fast 10 Zoll Länge und Breite und 9 Zoll Höhe, in welchem auch zugleich, mit Ausnahme des im vorigen Paragraphen beschriebenen Stativs, der Prismenkreis mit Zubehör, so wie auch die erwähnten Hülfsfernröhre und Dreifufs zum Transport bequem verpackt werden können. Die Stütze jedes Hülfsfernrohrs bildet ein massiver Cylinder *E*, der in die Seitenwand des Kastens geschraubt wird. An ihm läfst sich an geeigneter Stelle eine mit einer Klemmschraube versehene und eine zweite Hülse *G* tragende Hülse *F* befestigen. In der Hülse *G* ist wieder ein, eine dritte Hülse *H* tragender Cylinder *J* in verticaler Richtung verschiebbar und durch den umliegenden, mit einer Klemmschraube versehenen Ring festzustellen, während das Fernrohr *A* in der Hülse *H* mittelst der zugehörigen Klemmschraube zu befestigen ist.

Der Dreifufs steht auf Unterlegscheibchen mit seinem Mittelstück in der Mitte der quadratischen Oberfläche des Kastens, welche durch eine kreisförmige Messingscheibe bezeichnet ist. Die Cylinder *E E* sind so in die Seitenwände des Kastens eingeschraubt, dafs man den Visierlinien der Fernröhre eine durch die Umdrehungsachse des auf dem



Dreifufse befestigten Prismenkreises gehende Richtung geben kann. Durch Verschiebung der Cylinder JJ in ihren Büchsen $G\,G$ kann daher auch den Fernröhren in verschiedenen Abständen vom Kasten eine Lage gegeben werden, dafs ihre Collimationslinien eine Gerade bilden.

§. 157.

Nachdem nun die Oculare der Hülfsfernröhre für parallele Lichtstrahlen eingestellt sind, bringt man ihre Fadenkreuze zur Coincidenz und den auf dem Dreifufse $B\,B$ befestigten Prismenkreis über der kreisförmigen Scheibe des Kastens in eine solche Stellung, dafs sein Fernrohr eine normale Lage zu den Visierlinien der Hülfsfernröhre hat. Um nun zunächst die richtige Stellung des Kreisprisma's zu untersuchen, bringt man, nachdem beide Fernröhre vorher in einer dem Kreisprisma entsprechenden Höhe eingestellt waren, das Bild

des Fadenkreuzes des einen Hülfsfernrohrs, welches auf einer der brechenden Ebenen des Prisma's unvollständig reflectiert erscheint, an das Fadenkreuz des Hauptfernrohrs und dreht nun den Kreis, bis auch das von der anderen brechenden Ebene erzeugte Bild des Fadenkreuzes desselben Hülfsfernrohrs in das Hauptfernrohr gelangt. Zeigt sich dasselbe nun ebenfalls am Fadenkreuze des letzteren, so haben beide brechende Ebenen gleiche Neigung gegen die Drehungsachse des Prismenkreises. Bei einer Abweichung dagegen wird die fehlerhafte Stellung durch die entsprechenden Correctionsschräubchen β β (Fig. 61) verbefsert. Nun bringt man auch das von der spiegelnden Hypotenusenebene total reflectierte Bild des Fadenkreuzes des Hülfsfernrohrs, durch fortgesetzte Drehung des Kreises, in das Hauptfernrohr und bewirkt die Coincidenz desselben mit seinem Fadenkreuze durch die zu jener Ebene gehörige Correctionsschraube β. Durch diese zweifache Drehung des Kreises, indem man zuerst das unvollständig und dann das total reflectierte Bild an das Fadenkreuz des Hauptfernrohrs bringt, erlangt man den Vortheil, einen Fehler im Parallelismus der Hypotenusenebene mit der Drehungsachse in doppelter Gröfse zu erkennen und dadurch schärfer wegzuschaffen. Das Verfahren wird noch vereinfacht durch Anwendung der Fadenkreuze beider Hülfsfernröhre, wenn man denselben vorher die oben angegebene Lage gegeben hatte.

Dieselbe Untersuchung und etwaige Berichtigung nimmt man dann noch am Alhidadenprisma vor.

Durch die Anwendung der beiden Hülfsfernröhre kann man auch die etwaige nicht parallele Lage der Visierlinie des Fernrohrs gegen die Kreisebene leichter erkennen, als es durch das im §. 148, 2. angegebene Verfahren möglich ist.

Die Reflexions- oder künstlichen Horizonte.

§. 158.

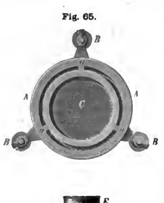
Die Anwendung der Reflexionsinstrumente bei der Mefsung schiefliegender Winkel bedarf keiner weiteren Hülfsapparate, da die Instrumentebene immer in die Ebene der Winkelschenkel zu bringen ist. Bei der Mefsung der Höhenwinkel dagegen sind fast immer nur zwei in dem einen Winkelschenkel liegende Punkte gegeben, während ein zweiter Punkt des anderen (horizontalen) Winkelschenkels immer erst so zu bestimmen sein wird, dafs er in der durch den schiefliegenden Schenkel gedachten Verticalebene liegt. Während nun dazu der Nautiker sich der Oberfläche des offenen Meeres bedient, wird man bei Höhenmefsungen auf dem Festlande künstliche Horizonte anwenden müfsen, wovon es verschiedene Arten giebt.

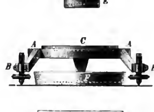
1. Ein leicht herstellbarer und in den meisten Fällen auch recht brauchbarer Horizont ist der Oelhorizont.

Zum Gefäfs dient eine Büchse von Blech von 3 bis 5 Zoll Durchmefser und einigen Linien Höhe, mit einem genau schliefsenden Deckel versehen. Man füllt sie fast bis zum Rande mit einer dickflüfsigen Masse aus gutem, alten Olivenöl, dem man bei tüchtigem Umrühren allmählich einige Theelöffel voll Kienrufs zusetzt und dann die Mischung durch mäfsig dicht gewebte Leinwand filtriert. Man erhält dadurch eine vortrefflich reflectierende Oberfläche, welche wegen ihrer Klebrigkeit auch leichten Luftbewegungen recht gut widersteht. Um bei diesem Horizonte sich vor Beschmutzung zu sichern, wird die erwähnte Büchse wohl noch von einer zweiten, ebenfalls sorgfältig schliefsenden umgeben.

2. Zu den Quecksilberhorizonten mufs nicht allein ein chemisch reines, sondern auch ein von dem grauen Quecksilberoxyd befreites Quecksilber genommen werden. Letzteres erhält man dadurch, dafs man das Quecksilber durch einen sehr engen Trichter von starkem Papier giefst. Zum Gefäfs nimmt man Eisen, Porzellan, Serpentin oder Biscuit. Um das selbst schon bei mäfsigem Luftzuge eintretende Zittern der Oberfläche zu verhindern, versieht man die Gefäfse wohl mit einem aus dünnen Glasscheiben zusammengesetzten Dache. Oder man legt auf die Quecksilberoberfläche eine Glasscheibe oder ein Glimmerblatt. Das Quecksilber bietet eine ruhige Oberfläche dar, wenn man zur Unterlage eine flache Kugelcalotte von Kupfer nimmt, die vorher mit salpetersaurem Quecksilber angequickt wird. Eine reine Oberfläche erhält man, wenn man unmittelbar vor dem Gebrauche den Horizont mit etwas aufgegofsenem Quecksilber abspült.

Fig. 65.







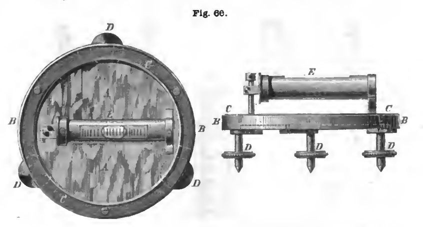
Weit weniger ist aber ein Quecksilberhorizont den Erschütterungen in der Oberfläche ausgesetzt, wenn man Statt des reinen Quecksilbers ein Amalgam aus Quecksilber und Zinn, und dabei dann den in Fig. 65 dargestellten Apparat anwendet.

A A bezeichnet einen cylindrischen Ring, mit welchem drei Arme nebst ihren Stellschrauben *B B B* ein Ganzes bilden. Auf drei kleine Ansätze *a a a* des Ringes kann man den Rand einer etwas concav ausgedrehten Kupferschale *C* legen, auf welche das zur Reflexion des Lichts dienende Quecksilberamalgam gegofsen wird. Letzteres wird in einer Holzbüchse *D* aufbewahrt und kann aus einem mit einer kleinen Oeffnung versehenen Konus und durch einen kleinen Papiertrichter mit sehr feiner Oeffnung auf die Kupferschale gegofsen werden; durch die Dosenlibelle *E* ist letztere horizontal zu stellen. Das unter dieselbe gestellte Holzgefäfs *F* nimmt das mit dem Elfenbeinlineal *G* glatt abgestrichene Amalgam auf. Vor dem Auftröpfeln quickt man die Kupferschale mit einer Auflösung von salpetersaurem Quecksilber an. Nach dem Gebrauche des Horizonts wird das Amalgam wieder in das Gefäfs gebracht, zu welchem Zwecke man die Bodenplatte d_1 aus- und dann die Deckplatte *d* wieder aufschraubt.

3. Der Glashorizont besteht aus einer runden, dicken, auf der unteren Fläche matt geschliffenen, oder mit einer dunklen harzartigen Masse überzogenen, auf der oberen Fläche aber fein polierten Glasplatte, so dafs von dieser das geforderte Bild eines Objects reflectiert wird. Diese Glasplatte wird mit einer mit drei Stellschrauben versehenen Unterlage von Holz, Metall, Serpentin u. s. w. versehen, um sie mittelst einer feinen Röhrenlibelle horizontal stellen zu können.

Bei dem in Fig. 66 in halber wahrer Gröfse im Grund- und Aufrifs dargestellten Glashorizonte bezeichnet *A* das in dem Ringe *B B*

Fig. 66.



liegende und mit der Ringplatte *C C* bedeckte Glas, welches auf seiner Unterfläche einen dicken, undurchsichtigen, harzartigen Ueberzug hat.

Mittelst der drei Stellschrauben DDD und der aufgesetzten als berichtigt angenommenen Röhrenlibelle E kann die Oberfläche des Glases genau horizontal gestellt werden.

Andere Horizonte von Weingeist oder Wafser in dazu geeigneten Gefäfsen sind im Freien nur bei vollkommener Windstille anzuwenden und daher im Allgemeinen wenig in Gebrauch.

Drittes Capitel.

Instrumente zur Absteckung der rechten Winkel.

§. 159.

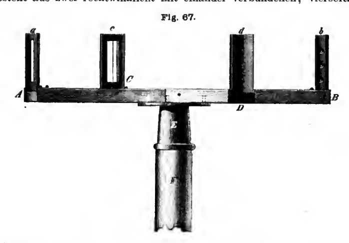
Obgleich die im ersten Capitel beschriebenen Azimuthalinstrumente, so wie auch der Mefstisch und die Boussole in den Stand setzen, auf dem Felde rechte Winkel abzustecken: so gewähren doch bei den mit der Mefskette ausgeführten Aufnahmen kleinerer Fluren eigens dazu construierte Instrumente mehr Bequemlichkeit, von welchen die nachfolgenden die am meisten angewandten sind.

§. 160.

1. Das Winkelkreuz.

Das in Fig. 67 im Drittel wahrer Gröfse dargestellte Winkelkreuz besteht aus zwei rechtwinklicht mit einander verbundenen, vierseitigen

Fig. 67.



Prismen AB und CD, an deren Enden Dioptern (§. 37) a, b, c, d festgeschraubt sind, von denen die Oculardioptern b, d aus einer mit Visier-

löchern versehenen Messiugplatte, die Objectivdioptern *a*, *c* aus einem Rahmen mit einem darin ausgespannten Verticalfaden bestehen. Unter dem Kreuze ist durch eine Scheibe eine Hülse *E* befestigt, mit welcher das Werkzeug auf den Zapfen eines mit einem eisernen Schuh versehenen Stockstativs *F* gestellt wird.

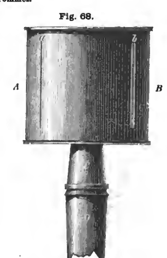
Bei einigen Winkelkreuzen sind die hölzernen Prismen durch Messingplatten vertreten, auch die Dioptern zum Umlegen wohl mit Charnieren versehen.

§. 161.

2. Die Winkeltrommel.

Dieser in Fig. 68 ebenfalls im Drittel wahrer Gröſse dargestellte Apparat besteht aus eiuem hohlen, inwendig geschwärzten Cylinder *A B*, auf dessen Mantel in Abständen von 90 Grad vier, die Dioptern vertretende Verticalspalten sich finden, von denen die eine *a* jedes zusammengehörigen Paares, als Oculardiopter, sehr schmal, die andere breitere gegenüberstehende *b* einen ausgespannten Verticalfaden enthält. Durch eine Deck- und Bodenplatte ist der Cylinder ganz geschloſsen. Die Bodenplatte enthält eine konische Hülse *C* zum Aufstellen auf den konischen Zapfen eines Stockstativs *D*.

Fig. 68.



Die Prüfung des Winkelkreuzes und der Winkeltrommel und deren Gebrauch.

§. 162.

Nachdem man sich nach dem im §. 38 angegebenen Verfahren von der Richtigkeit der Dioptern und dadurch von der Brauchbarkeit derselben überzeugt hat, stecke man mittelst eines Theodoliths auf dem Felde über einer abgesteckten Geraden *A B C* zwei neben einander liegende rechte Winkel *A B D* und *D B C* mit Genauigkeit ab und bezeichne sie durch Baken. Stellt man nun den zu prüfenden Apparat in *B* auf und richtet die eine Visierlinie nach *A*, so muſs die andere nach *D* zeigen, welches Verfahren man an dem Nebenwinkel *D B C* des

ersteren wiederholen kann. Sollte dabei ein Fehler sich zeigen, so mufs derselbe durch seitliche Verschiebung des Verticalfadens berichtigt werden.

In Ermangelung eines Theodoliths kann man auch die eine Visierlinie des in *B* aufgestellten Apparats auf *A* richten, in der Richtung der anderen aber *D* bestimmen. Bringt man dann durch Drehung des Instrumentes die erste Visierlinie wieder auf *D*, so mufs die zweite in der Verlängerung von *AB* auf *C* gerichtet sein.

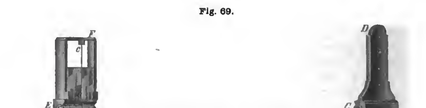
Der Gebrauch der Apparate zum Abstecken rechter Winkel auf dem Felde dürfte sich ohne Weiteres ergeben.

§. 163.

4. Das Fallon'sche Spiegellineal.

Dieser vor etwa 60 Jahren von dem Oesterreichischen Oberstlieutenant Fallon erfundene und in Fig. 69 in halber wahrer Gröfse dar-

Fig. 69.

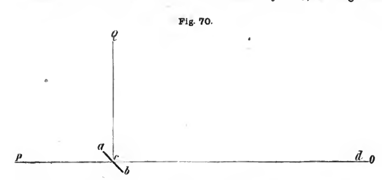


gestellte Apparat besteht aus einem hölzernen Lineal *AB* von etwa 10 Zoll Länge und $1^1/_2$ Zoll Breite, das an seinem einen Ende *B* ein Oculardiopter *CD* trägt, welches um ein bei *C* befindliches Charnier auf- und niedergelegt werden kann. An dem anderen Ende trägt es einen, auf einer cylindrischen Fufsplatte *ab* stehenden Metallrahmen *EF* mit einem Planspiegel, dessen obere Hälfte aber nicht foliiert ist und eine in der Mitte eingerifsene Linie *cd* in senkrechter Lage enthält, welche als Objectivdiopter dient. Auf einer, auf dem Lineale festgeschraubten Metallplatte *ef* läfst sich der Spiegelrahmen mit einem konischen Zapfen in einer Büchse des Lineals drehen und namentlich so stellen, dafs die Spiegelfläche mit der Kante des Lineals, nach der einen oder anderen Seite hin, einen Winkel von 45° bildet, wozu die Platten *ab* und *ef* die nöthigen Indices enthalten.

§. 164.

Bezeichnet also in Fig. 70 $a b$ den gegen die Visierlinie $c d$ unter 45° gestellten Spiegel und sieht das hinter d befindliche Auge O in der Richtung $O P$ durch den nicht belegten Theil des Glases, längs der durch c gehenden senkrechten Linie, das Object P, in dem Spiegel an der erwähnten Linie aber durch Reflexion das Object Q, so folgt aus

Fig. 70.



bekannten Eigenschaften der Reflexion des Lichts von einem unter 45° geneigten Spiegel, daſs $Q c P = 90°$ ist, d. h. die Objecte P und Q mit dem Standorte einen rechten Winkel bilden. Hieraus ergiebt sich nicht allein die Prüfung des Apparats, welche nach dem im §. 162 angegebenen Verfahren vorgenommen wird, sondern auch der Gebrauch desselben beim Abstecken rechter Winkel.

§. 165.

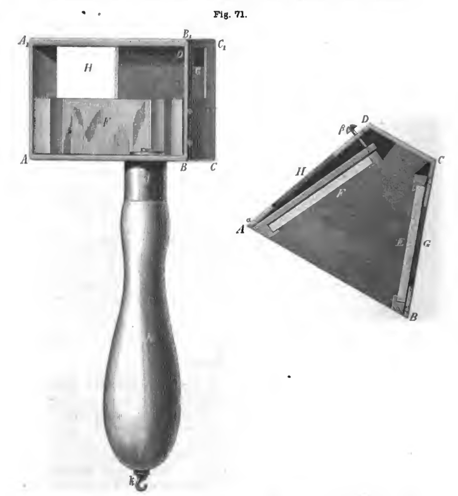
4. Der Winkelspiegel.

Dieser von dem Engländer Adams schon in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts erfundene Apparat ist in Fig. 71 in natürlicher Gröſse in vorderer Ansicht und im Grundriſs mit weggenommener Deckplatte dargestellt. Er stützt sich in seiner Construction und in seinem Gebrauch auf den im §. 143, 1. angegebenen Satz, nach welchem, wenn seine beiden Spiegel einen Winkel von 45° mit einander einschlieſsen, der in Fig. 55 von einem Objecte S herkommende und zwei Mal reflectierte Strahl $B C$ mit dem in dieser Richtung über dem anderen Spiegel weg wahrgenommenen Objecte E einen rechten Winkel in dem Standorte bildet.

An jeder der beiden, etwa unter 45° gegen einander geneigten Seitenebenen eines vierseitigen prismatischen Messinggehäuses $A A_1$ $B B_1$ $C C_1$ D,

dessen eine Seitenebene aber nicht geschlofsen ist, ist in halber Höhe ein auf der Grundebene normal stehender Spiegel E, F in starker Fafsung, und oberhalb desselben eine fensterartige Oeffnung G, H zum Durchsehen auf den einen Spiegel und auf einen direct gesehenen

Fig. 71.



Gegenstand angebracht. Die Fafsungen des Spiegels E sind an der Seitenwand $B B_1 C C_1$ durch vier Schrauben befestigt, während die hintere Fafsungswand des anderen Spiegels F ebenfalls durch 3 Zug-

schrauben $\alpha\alpha$ befestigt, durch eine Druckschraube β aber so gegen den feststehenden Spiegel verstellt werden kann, dafs die spiegelnden Ebenen genau unter 45° geneigt sind.

Eine in der Grundebene des Gehäuses befestigte Hülse J nimmt einen Handgriff K auf, an dessen unterem Ende ein Häkchen k zum Einhängen eines Lothes angebracht ist.

Berichtigung und Gebrauch des Winkelspiegels.

§. 166.

Um den Winkelspiegel zu prüfen, stecke man mit dem Theodolith auf dem Felde einen rechten Winkel ab, stelle sich mit dem ersteren in dem Scheitelpunkte auf und bringe die beiden Fenster in die Richtung des einen Schenkels. Zeigt sich dann das doppelt reflectierte Bild des anderen Schenkels genau senkrecht unter dem direct gesehenen ersten Schenkel, so bilden die beiden Spiegel 45° mit einander. Weichen aber beide Linien von einander ab, so wird man sogleich erkennen, ob der durch den Winkelspiegel dargestellte Winkel stumpf oder spitz ist, wodurch dann die nöthige Correction an den erwähnten Correctionsschräubchen $\alpha\alpha\beta$ vorgeschrieben wird. Der Gebrauch zum Abstecken eines rechten Winkels ergiebt sich hiernach von selbst.

§. 167.

5. Das Prismenkreuz.

Dieser vom Professor **Bauernfeind** in München erfundene Apparat*) dient nicht allein zum Abstecken der rechten Winkel, wozu jedes seiner Prismen angewandt werden kann, sondern auch in deren vereinter Wirkung zur Auffindung eines beliebigen Zwischenpunktes in einem gegebenen Alignement, mithin auch zur Bestimmung des Durchschnittspunktes zweier sich schneidender Alignements. Er verdient daher mit Recht den Vorzug vor den im Vorhergehenden unter 1. bis 4. beschriebenen Apparaten.

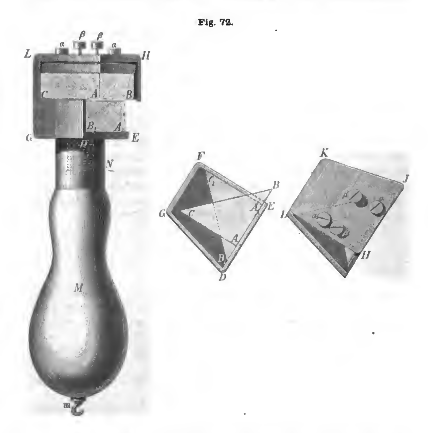
In Fig. 72 ist derselbe in wahrer Gröfse, theils in vorderer Ansicht, theils im Grundrifs dargestellt. Im letzteren bezeichnet $DEFG$ die Bodenplatte des Gehäuses mit den beiden über einander liegenden Prismen ABC und $A_1 B_1 C_1$, $HJKL$ aber die Deckplatte des Gehäuses mit den erforderlichen Zug- und Druckschrauben.

---

*) Theorie und Gebrauch des Prismenkreuzes von C. M. **Bauernfeind**. München 1851.

Das Prismenkreuz besteht aus zwei dicht über einander liegenden Glasprismen ABC und $A_1 B_1 C_1$ von gleichschenklicht-rechtwinklichtem Querschnitt in einer solchen Lage, dafs zwei ihrer Kathetenebenen über AB und $A_1 B_1$ in eine Ebene fallen, die Hypotenusenebenen über BC und $B_1 C_1$ aber rechtwinklicht zu einander stehen. Jedes der Prismen ist auf einer Fufsplatte befestigt und beide werden von einem inwendig

Fig. 72.



und auswärts geschwärzten und seitlich ausgeschnittenen prismatischen Gehäuse $DEFGHJKL$ dergestalt umgeben, dafs von dem unteren Prisma die Kathetenebene $A_1 C_1$, von dem oberen die Kathetenebene AC als Lichteintrittsebene dient, während vor die in eine Ebene fallenden anderen Kathetenebenen AB und $A_1 B_1$ das Auge des Beobachters gebracht wird, die Hypotenusenebenen aber geblendet werden.

Die Fufsplatte des unteren Prisma's bildet zugleich die Grundplatte des Gehäuses, während die Fufsplatte des oberen mittelst zweier Zugschrauben $\alpha\alpha$ mit der Deckplatte des Gehäuses verbunden ist, die aber mit den Stellschrauben $\beta\beta$ zugleich zur Correction der Lage des Prisma dienen. Die Grundplatte enthält an ihrer Unterfläche eine Schraube, an welcher die Mutter der mit dem Handgriff M verbundenen Messingbüchse N befestigt wird. Das an dem Handgriff angebrachte Häkchen m dient zum Einlothen.

Berichtigung und Gebrauch des Prismenkreuzes.

§. 168.

Die Construction und der Gebrauch des Prismenkreuzes zum Abstecken der rechten Winkel beruht auf den im §. 63, 2. angegebenen Satze, dafs wenn auf die eine Kathetenebene eines Glasprisma's von gleichschenklicht-rechtwinklichtem Durchschnitt so Lichtstrahlen fallen, dafs sie nach einer zweimaligen Reflexion an der anderen Katheten- und Hypotenusenebene und einer einmaligen Brechung an der letzteren Kathetenebene wieder austreten, die Gröfse des Ablenkungswinkels $= 90^0$ ist. Da diese Eigenschaft nach dem erwähnten Paragraphen aber nur solche Lichtstrahlen haben können, welche auf den unteren Rand der Kathetenebene einfallen und in der Nähe des schiefen Winkels des Prisma's wieder austreten, so wird auch hier nur das Auge den Austrittsstrahl zu suchen haben (vgl. Fig. 23). Es ist das Bild auch, wie a. a. O. erwähnt wurde, nicht allein an seiner schwachen Beleuchtung, sondern auch daran zu erkennen, dafs es der obigen Eigenschaft wegen, beim Drehen des Apparats um seine Achse, seinen Ort nicht ändert, sobald das Auge die nämliche Richtung behält.

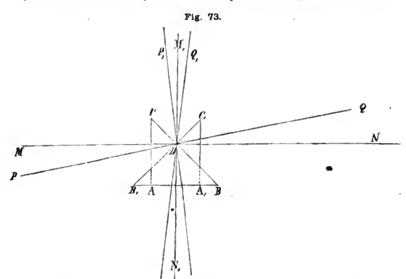
Um daher jedes Prisma für sich insofern zu prüfen, ob es richtig geschliffen ist, wird man wieder einen rechten Winkel mit Genauigkeit abzustecken und zu untersuchen haben, ob das von dem einen Schenkel durch Reflexion und Brechung entstandene Bild genau mit dem über dem Prisma weg gesehenen anderen Schenkel coincidiert, oder nicht. Im letzteren Falle ist das Prisma fehlerhaft und durch den Optiker zu verbefsern.

Der Gebrauch des Prismenkreuzes zur Bestimmung eines Zwischenpunktes in einem gegebenen Alignement stützt sich auf die im §. 62, 1. u. 3. bei der totalen Reflexion in einem Glasprisma Statt findende Eigenschaft, dafs die Gröfse des Ablenkungswinkels eines unter einem beliebigen Winkel α auf die eine Kathetenebene auffallenden Lichtstrahls nach erfolgter totaler Reflexion von der Hypotenusenebene und zweiter Brechung an der anderen Kathetenebene entweder $= 90^0 + 2\alpha$ oder

$= 90^0 - 2\alpha$ ist, je nachdem der Einfallsstrahl zwischen $-6^0 54'$ und $+90^0$ oder von $6^0 54'$ an auf der negativen Seite des Einfallslothes liegt.

Haben daher die beiden Prismen die in Fig. 73 angegebene Lage, indem ihre Achsen nicht allein parallel sind, sondern auch die über AB und $A_1 B_1$ liegenden Kathetenebenen in einer Ebene liegen und zugleich die Hypotenusenebenen auf einander normal stehen, also die über AC und $A_1 C_1$ liegenden Kathetenebenen parallel sind: so werden die von M und N senkrecht auf AC und $A_1 C_1$ fallenden Strahlen nach N_1 reflectiert, beide Objecte also in M_1 erscheinen, wenn die Achse

Fig. 73.



der Prismen in der Geraden MN liegt. Dieselbe Erscheinung wird aber, bei letzterer Voraussetzung, auch für jede andere schief gegen AC und $A_1 C_1$ liegende Gerade PQ Statt finden, da der Einfallswinkel der Strahlen derselbe ist und nur der eine auf der positiven, der andere auf der negativen Seite des Einfallslothes liegt, daher $90^0 + 2\alpha + 90^0 - 2\alpha = 180^0$ ist.

§. 169.

Ob die Achsen der beiden Prismen parallel sind, erkennt man sehr leicht, wenn zwei senkrecht stehende Objecte, z. B. zwei Hauskanten u. dgl., von welchen Lichtstrahlen auf die Kathetenebenen AC und $A_1 C_1$ fallen, als parallele senkrechte Linien erscheinen, oder einen

Winkel mit einander bilden. Im letzteren Falle mufs die Fufsplatte des oberen Prisma's durch die Stellschrauben ββ so weit gegen das untere Prisma gedreht werden, bis die Objecte in paralleler, senkrechter Lage erscheinen. Zu diesem Zwecke müfsen selbstverständlich die beiden Zugschrauben αα zuerst etwas gelüftet, nach erfolgter Drehung des Prisma's aber wieder fest angezogen werden.

Die parallele Stellung der über $A\,C$ und $A_1\,C_1$ stehenden Ebenen, also die senkrechte Lage der Hypotenusenebenen gegen einander läfst sich prüfen, wenn man durch drei Baken eine Gerade PRQ absteckt, in dem mittleren Punkte R sich mit dem Prismenkreuz aufstellt und untersucht, ob die Bilder der beiden Stäbe P und Q in der Richtung $N_1\,M_1$ (Fig. 73) genau in einer Verticallinie liegen oder etwa in P_1 und Q_1 erscheinen. Bezeichnet dann P_1 das Bild von P, Q_1 das von Q, so ist der Winkel $CD\,C_1$ ein stumpfer; ist aber P_1 das Bild von Q, Q_1 das von P, so ist CDC_1 ein spitzer Winkel und daher das obere Prisma durch Lösung der Zugschrauben so weit um seine Achse zu drehen, bis die Bilder von P und Q in M_1 liegen. Darauf sind die Schrauben αα und nöthigenfalls auch die Stellschrauben ββ wieder anzuziehen.

Wie man nnn mit dem berichtigten Prismenkreuze in einem gegebenen Punkte einer gegebenen Geraden eine Normale zu errichten, oder auf sie von einem gegebenen Punkte aufserhalb derselben eine Normale zu fällen, oder den Zwischenpunkt in einem gegebenen Alignement zu bestimmen hat, wird aus dem Vorhergehenden sich ohne Weiteres ergeben.

Anmerkung. Die nur zu flüchtigen militairischen Aufnahmen und in freier Hand angewandte Schmalkalder'sche Patent-Boussole findet sich dargestellt und beschrieben in H. g. I. S. 554.

Viertes Capitel.

Beschreibung, Prüfung und Berichtigung der Nivellierwerkzeuge.

§. 170.

Es ist zwar schon in §§. 95 und 96 auf den Unterschied aufmerksam gemacht, der im Allgemeinen zwischen den Höhenwinkelmefsern und den Nivellier-Instrumenten Statt findet, indessen mufs zum genaueren Verständnifs dieses Unterschiedes doch noch das Nachfolgende bemerkt werden.

Bezeichnen in Fig. 74 A und B zwei von dem Mittelpunkte C der Erde verschieden entfernte Punkte auf ihrer Oberfläche, so wird jeder Punkt der Kugelfläche AD, welche man mit dem kleineren Abstande CA aus C beschreibt, eine gleiche Höhe mit A haben, und daher dieselbe auch der wahre Horizont des Punktes A genannt.

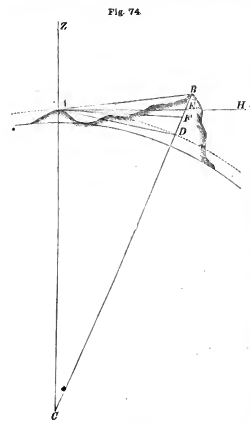


Fig. 74.

In der durch A, B und C gelegten Verticalebene drückt also DB den Höhenunterschied der Punkte A und B, oder die (absolute) Höhe des Punktes B über A, d. h. über seinem wahren Horizonte aus.

Ist nun der Horizontalabstand beider Punkte bekannt und wird die wahre Zenithdistanz ZAB aus der beobachteten scheinbaren Zenithdistanz und der irdischen Refraction (§. 248) bestimmt, so ergiebt sich die Möglichkeit der Berechnung von BD, da aus dem bekannten Erdhalbmefser und dem gegebenen Abstande AB der Winkel C sich berechnen läfst und daher in dem ebenen Dreiecke ADB eine Seite und 2 Winkel bekannt sind. Eine solche Mefsung, selbstverständlich nur auf terrestrische Objecte bezogen, heifst eine trigonometrische Höhenmefsung und kann mit den früher beschriebenen Höhen- oder Höhen- und Azimuthalinstrumenten ausgeführt werden.

Folgen aber den hier in Rede stehenden zwei Punkten A und B noch viele andere in einem fortlaufenden Linienzuge in nur kleinen Entfernungen und zum Theil nur in sehr geringen Höhenunterschieden,

wie solches bei der Bestimmung des Terrains zur Anlage von Strafsen, Eisenbahnen, Kanälen u. s. w. vorkommt: so ist einleuchtend, dafs mit Vortheil von dem eben erwähnten Verfahren kein Gebrauch gemacht werden kann.

Man wendet dann eigens zu diesem Zwecke construierte Mefsapparate an, welche die Darstellung der Lage einer durch den Punkt A (oder B) gelegten tangierenden, also auf dem Erdhalbmefser CA normal stehenden Ebene AH, die man deshalb den scheinbaren Horizont des Punktes nennt, und zugleich, bei zwei Classen dieser Apparate wenigstens, die Fixierung des scheinbaren Horizontes auf einem in dem anderen Endpunkte vertical errichteten und mit der landesüblichen Fufseintheilung versehenen Mafsstabe gestatten, so dafs zur Bestimmung des Höhenunterschiedes beider Punkte, ihre Abstände von einer Horizontallinie gemefsen werden können, die mit den Abständen in derselben Verticalebene liegt. Man nennt diese Mefsapparate Nivellierinstrumente und das Verfahren, mittelst derselben die Höhenunterschiede gegebener Punkte zu bestimmen, Nivellieren, Wafserwägen, Abwägen, so wie die vollzogene Mefsung ein Nivellement.

Die hier in Rede stehenden Nivellierwerkzeuge unterscheiden sich aber dadurch wesentlich von den oben erwähnten Höheninstrumenten, dafs mit ihnen zwischen den gegebenen Punkten niemals Zenithdistanzen, sondern entweder Elevations- (Höhen-) oder Depressions- (Tiefen-) winkel bestimmt werden, die als Gegenwinkel der auf dem eingetheilten Mafsstabe bestimmten Längen erscheinen und dafs sie auch diese Mafsstäbe, Nivellierlatten, als nothwendige Hülfsapparate erfordern.

Während aber bei den trigonometrischen Höhenmefsungen die beobachteten scheinbaren Zenithdistanzen nur der Correction wegen der irdischen Strahlenbrechung bedurften, kommt beim Nivellieren mit den eigentlichen Niveaux aufser der erwähnten Correction auch noch die wegen der Krümmung der Erde oder wegen der Erhöhung des scheinbaren Horizonts über dem wahren in Betracht, da selbstverständlich die nach der Nivellierlatte gehende horizontale Visierlinie nicht mit der Richtung AE, sondern mit AD zusammenfallen sollte. Von der Gröfse der anzubringenden Correctionswerthe wird später (§§. 248, 381) die Rede sein.

§. 171.

Nach dem im vorigen Paragraph gegebenen Begriffe vom Nivellieren müfsen die Nivellierwerkzeuge für jeden Punkt der Erdoberfläche die Lage des scheinbaren Horizonts mit möglichster Schärfe anzugeben vermögen, um in ihm selbst, oder ihm parallel, auf einer aufgestellten Nivellierlatte eine horizontale Visierlinie bestimmen und die Verticalabstände der zu nivellierenden Punkte mefsen zu können.

1. Weil nun, wie im §. 31 erwähnt, die an dem höchsten Punkte der Luftblase einer Röhrenlibelle gedachte Berührungslinie immer horizontal ist, so bietet die Röhrenlibelle, in Verbindung mit einem ihr parallelen und mit einem Fadenkreuz versehenen Fernrohr, die Möglichkeit der Erfüllung der vorhin gestellten Forderung dar. Und da nicht nur die Empfindlichkeit der Libelle, sondern auch ihr entsprechend die Güte des Fernrohrs beliebig gesteigert werden kann, so bilden offenbar die eine Röhrenlibelle und ein Fernrohr enthaltenden Nivellierinstrumente die vollkommenste Art derselben. Sie werden Libellenniveaux genannt, oft auch nur durch das Wort Niveau*) bezeichnet. Theils nach ihrer verschiedenen Einrichtung und theils nach dem dadurch bedingten verschiedenen Gebrauche zerfallen sie wieder in mehrere Arten.

2. Weil ferner aus physikalischen Gründen eine tropfbare Flüfsigkeit in den Schenkeln einer communicierenden Röhre gleich hoch steht, also die oberen freien Flächen derselben in einer Horizontalebene liegen, so wird durch sie eine zweite Art von Nivellierwerkzeugen ermittelt, zu welcher die Kanalwage und die Keith'sche Quecksilberwage gehören. Zu beiden Classen der Nivellierinstrumente gehört noch eine Nivellierlatte.

3. Da auch durch ein frei herabhängendes, mit der Richtung der Schwerkraft zusammenfallendes Senkblei oder Loth die Richtung des scheinbaren Horizonts bestimmt wird, so können auch alle mit einem solchen Lothe versehenen Instrumente zum Nivellieren benutzt werden, obgleich durch einige derselben der Höhenunterschied zweier Punkte nicht direct abgeleitet, sondern aus dem gemefsenen geradlinigten Abstande derselben und dem ebenfalls gemefsenen Neigungswinkel des Abstandes gegen den Horizont berechnet wird.

4. Endlich kann auch bei bedeutenden Höhenunterschieden, z. B. bei der Bestimmung der Höhe der Kuppen eines Gebirges, das Barometer durch die gleichzeitige Beobachtung des Barometerstandes gebraucht werden.

A. Die Libellenniveaux.

§. 172.

Obgleich bei den Libellenniveaux die mannigfaltigsten Constructionen angetroffen werden, so lafsen sich doch einzelne Theile derselben namhaft machen, die bei allen, wenn auch in modificierter Art, sich vorfinden. Zu diesen gehört ein hinreichend fester plattenförmiger Körper, an welchem die Träger des Fernrohrs angebracht sind und der mittelst Zapfens und Büchse im Horizont rund herum sich bewegen läfst.

*) Ursprünglich liveau von dem Lateinischen libella.

Ferner das mit den Trägern unabänderlich verbundene, oder in seinen Lagern umlegbare Fernrohr. Es darf noch bemerkt werden, dafs Dioptern bei Nivellierwerkzeugen im Allgemeinen noch weniger zuläfsig sind, als bei Horizontal-Winkelmefsern. Endlich eine hinreichend empfindliche Röhrenlibelle, die entweder mit dem Fernrohr oder mit den Trägern desselben in Verbindung gebracht werden kann.

Hinsichtlich des Gebrauchs der Libellenniveaux bleibt entweder 1) das Fernrohr in paralleler Lage mit der Libelle und es wird der scheinbare Horizont auf der Nivellierlatte mittelst der durch die Libelle eingestellten Visierlinie des Fernrohrs unmittelbar angegeben; oder 2) es werden die Winkel bestimmt, welche die durch die Libelle eingestellte horizontale Visierlinie des Fernrohrs entweder mit zwei geneigten Visierlinien bildet, die nach zwei in immer gleichem Abstande bleibenden Punkten der Latte gerichtet sind, oder der Winkel, den sie mit einer geneigten Visierlinie einschliefst, welche nach einem in gleicher Höhe mit der ersten horizontalen Lage des Fernrohrs auf der Latte angegebenen Punkte gerichtet ist. Hierbei werden zugleich die erwähnten Winkel nicht im Gradmafs, sondern entweder durch die Trommeltheile einer Mikrometerschraube bestimmt, oder auf einer Scale abgelesen, deren Eintheilung das Verhältnifs der Länge des drehbaren Fernrohrs zu einer bestimmten Stationslänge darstellt.

Endlich gestatten die Nivellierwerkzeuge der ersten Art entweder die Nivellierung von Horizontal-Ebenen, indem ohne neue Einstellung der Libelle, diese mit dem Fernrohr im Horizonte herumgeführt wird, oder nur die Abwägung von Horizontal-Linien, während die Nivellierung jeder anderen Richtung eine neue Einstellung der Libelle erfordert. In dem ersten Falle liegt das Fernrohr mit der Libelle in den y-förmigen Lagern zweier Träger, die in einem der Länge des Fernrohrs entsprechenden Abstande von der Trägerplatte ausgehen. Die Horizontalbewegung geschieht mittelst eines mit der Trägerplatte verbundenen Verticalzapfens in einer Büchse, oder umgekehrt. Zur Einstellung der Libelle dienen bei den gröfseren Apparaten die Stellschrauben eines Dreifufses, während bei den kleineren, der letztere durch eine Nufs mit Stellschrauben vertreten wird. Aufserdem müfsen die in Rede stehenden Apparate die Möglichkeit der Verbefserung der etwa nicht vorhandenen normalen Lage der Visierlinie des Fernrohrs gegen die Verticalachse gestatten. Die Verbindung des Dreifufses mit der Trägerplatte führte zuerst Reichenbach ein, daher die so eingerichteten Apparate recht passend Reichenbach'sche Niveaux genannt werden können. In dem zweiten Falle sind die Constructionen viel mannigfaltiger. Bei einigen liegt das Fernrohr mit der Libelle zwar ebenfalls in den y-förmigen Lagern zweier von der Trägerplatte ausgehenden Träger; die Platte

kann von einer damit verbundenen Schraube, **Elevationsschraube**, die entweder eine Schraube mit feinem Gewinde, oder eine Mikrometerschraube, oder eine Schraube ohne Ende ist, zwischen Schraubenspitzen oder mittelst eines Charniers in verticaler Richtung bewegt werden, wodurch die Libelle zugleich mit dem Fernrohre eingestellt wird, während die Unterlage der Trägerplatte ein kleiner Dreifufs, oder eine Nufs mit Stellschraube, oder eine Nufs mit der Centralschraube bildet, welche Stellschrauben dann aber nur zur vorläufigen Horizontalstellung dienen. Oder es wird bei derselben Beschaffenheit der Fernrohrlager der eine Träger sammt Fernrohr und Libelle durch die Elevationsschraube in verticaler Richtung bewegt, zu welchem Zwecke der andere Träger gegen die Trägerplatte eine Drehung zwischen Schraubenspitzen gestatten mufs. Oder es kann das Fernrohr mit der Libelle durch die Elevationsschraube zwischen den gabelförmigen Erweiterungen des einen Trägers in verticaler Richtung bewegt werden, wobei abermals die Einrichtungen mehr oder weniger von einander abweichen können.

A. Die Libellenniveaux zum Nivellieren der Ebenen.

§. 173.

1. Das grofse Libellenniveau.

1. Die Grundlage des in Fig. 75 im Drittel wahrer Gröfse dargestellten, vom Mechanikus **Frerk** verfertigten Libellenniveau's bildet ebenfalls ein Dreifufs, in dessen Büchse A ein konischer Verticalzapfen, Oben mit einer Scheibe B und einer Büchse B_1 verbunden, sich drehen läfst. Auf dieser Scheibe ist die prismatische Trägerplatte CC durch ihr cylindrisches Mittelstück C_1 mittelst Schrauben befestigt. Die Enden der Trägerplatte laufen in Cylinder D und D_1 aus, mit welchen wieder die Träger E und E_1 mit ihren y-förmigen Fernrohrlagern verbunden sind. Der eine derselben, E, ist durch eine Fufsplatte mit dem massiven Cylinder D unabänderlich verbunden, während der andere, dreiseitig prismatisch geformte E_1 in dem Cylinder D_1 durch die unter ihm angebrachte Stellschraube d in verticaler Richtung etwas verstellt, durch die Pressschraube d_1 aber festgestellt werden kann. Zugleich dient letztere, so wie die an dem anderen Ende angebrachte Schraube $\mathfrak{c}$ zum Anfafsen, wenn der obere bewegliche Theil des Niveau's im Horizonte gedreht werden soll. Auch bei diesem Apparat sind die Lager so ausgefeilt, dafs das eingelegte Fernrohr F mit seinen genau abgeschliffenen Ringen ff_1 von Glockenmetall nur in vier Punkten aufliegt. Soll das Fernrohr festliegen, so werden darüber die an den Lagern um Gelenke beweglichen Bügel $f_2 f_3$ gelegt und durch eingesteckte Stifte befestigt. Zur Vermeidung des Drucks liegen innerhalb der Bügel kleine Kugelsegmente k von Kork.

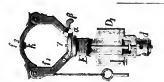


Fig. 75.

Um dem Fernrohr immer dieselbe Lage geben zu können, findet sich am Fuſs des einen Lagers ein durch ein Druckschräubchen α festzustellender Hebel β mit einem kleinen parallelepipedischen Zapfen γ, auf welchen die an den Ringen des Fernrohrs befindlichen Einschnitte passen. Beim Centrieren des Fernrohrs wird das Schräubchen α ausgeschraubt und der Hebel β niedergelaſsen. Die Einstellung des Huyghensschen Oculars des Fernrohrs auf die Nivellierlatte geschieht durch den Getriebkopf G, dessen Getriebe in eine Zahnstange greift. Die Röhrenlibelle H ist durch zwei Sättel auf dem Objectivrohr des Fernrohrs befestigt; an dem einen Ende befindet sich die Correctionsvorrichtung für die seitliche, an dem anderen die für die verticale Bewegung der Faſsungsröhre, deren Constructionsart aus Fig. 4 erkannt werden kann.

Die Einrichtung zu der Verstellbarkeit des Trägers E_1 zeigt die nebenstehende Zeichnung im Durchschnitt.

Die grobe Horizontalbewegung des oberen Theils des Niveau's ergiebt sich aus dem Vorhergehenden von selbst, wobei nur noch Fig. 33 verglichen werden kann. Zu der Hemmung der groben Bewegung und zur feinen Einstellung des Fernrohrs auf die Nivellierlatte, welche aber im Allgemeinen überflüſsig ist, dient ein Klemmring mit der Klemm- und Mikrometerschraube, welche in Figg. 33 u. 34 dargestellt sind.

Das achromatische Fernrohr hat 18 Zoll Brennweite, 18 Linien Oeffnung und eine etwa 25malige Vergröſserung.

Der Nivellierapparat wird auf ein Scheibenstativ mit Metallkopf, der zugleich die Vertiefungen für die Spitzen der Stellschrauben des Dreifuſses enthält, gestellt und durch eine Befestigungsvorrichtung mit dem Stativ verbunden, so daſs der vorsichtige Transport von einem Standpunkte zum anderen, ohne eine Beschädigung des Apparats befürchten zu müſsen, vorgenommen werden kann. Bei weiteren Transporten wird die Befestigungsvorrichtung vom Dreifuſs gelöst, das Fernrohr aus seinen Lagern genommen und sowohl dieſs, als der untere Theil des Apparats in den mit einem Tragriemen versehenen Kasten gesetzt.

Anmerkung. Ueber einige andere Constructionen eines groſsen Libellen-Niveau's vgl. m. H. g. I. S. 407 (Figg. 160 u. 161) und S. 413, Fig. 163.

§. 174.

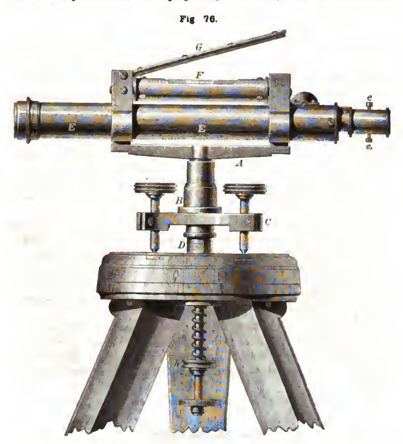
2. Das kleine Libellenniveau.

Das in Fig. 76 im Drittel wahrer Gröſse dargestellte kleine Libellenniveau wurde zuerst von Breithaupt*) in Cassel besonders für

*) Magazin mathem. Instrumente, Heft 3 und Sammlung von Zeichnungen etc. von F. W. Breithaupt.

Eisenbahnbau-Ingenieure eingeführt, der hier in Rede stehende Apparat aber ist aus der Officin von Frerk und Sohn hervorgegangen. Er unterscheidet sich von der Breithaupt'schen Construction nur dadurch, dafs über der Röhrenlibelle ein unter nöthiger Friction zwischen Schraubenspitzen drehbarer Spiegel angebracht ist, weshalb aber selbst-

Fig. 76.



verständlich die ursprünglich auf der Trägerplatte, also unterhalb des Fernrohrs befestigte Libelle über dem Fernrohr angebracht werden mufste. Durch den aufgeschlagenen Spiegel soll dem Beobachter bei einem Standorte auf moorigem oder bruchigem Boden die Gelegenheit gegeben werden, sogleich vom Standorte vor dem Ocular aus die Libelle zum Einspielen zu bringen, um durch eine sonst nöthige seitliche

Stellung und das Zurückkehren in die vorhin eingenommene eine Verschiebung des ganzen Apparats zu vermeiden.

Mit der Trägerplatte A ist ein konischer Verticalzapfen verbunden, der in die Büchse B, mit welcher zugleich der Dreifufs C mit seinen 3 Stellschrauben in Verbindung steht, eingeschliffen ist und von einer untergeschraubten Mutter gehalten wird, die von der Hülse D umschlofsen ist. Durch Anziehen oder Lösen der Mutter kann der Gang der Achsendrehung beliebig moderiert werden.

Das achromatische Fernrohr E von 15 Linien Oeffnung, 15 Zoll Brennweite und 20maliger Vergröfserung trägt zwischen den gabelförmigen Fortsätzen der mit ihm verbundenen Träger die Röhrenlibelle F, deren eines Ende zwischen Schraubenspitzen drehbar ist, während das andere Ende die erforderlichen Zug- und Druckschrauben zur Correction enthält. G stellt den Spiegel vor, der bei dem Transport niedergeklappt wird. Zur Berichtigung der nicht normalen Lage der Visierlinie des Fernrohrs zur Umdrehungsachse, hat das Oeularrohr zwei Stellschräubchen $e\,e_1$, wodurch der Durchschnitt des Fadenkreuzes in verticaler Richtung verstellt werden kann. Die Einstellung des Fernrohrs auf die Nivellierlatte wird wieder durch eine Zahnstange mit einem Getriebe vermittelt.

Die Befestigung des Niveau's auf dem Scheibenstative geschieht mittelst eines in eine Kugel endenden Stengels, ferner durch eine gegen eine Einlegscheibe sich legende Spiralfeder und eine Mutter h zum Anziehen. Die Kugel hat auf dem Boden des in eine Ausbohrung des Stativkopfes passenden hohlen Cylinders D, an die Büchse des Dreifufses geschraubt, eine feste Lage, wodurch die beabsichtigte Verbindung des Apparats mit dem Stativ erzielt wird.

Beim weiteren Transport des Instruments wird die Befestigungsvorrichtung gelöst und dann das abgenommene Niveau in einen mit einem Tragriemen versehenen Kasten gesetzt; bei kleineren Entfernungen kann das gehörig befestigte Instrument mit dem Stativ zugleich getragen werden.

Anmerkung. Ueber eine andere Construction des kleinen Niveau's vgl. m. H. g. I. S. 414.

Die Nivellierlatten.

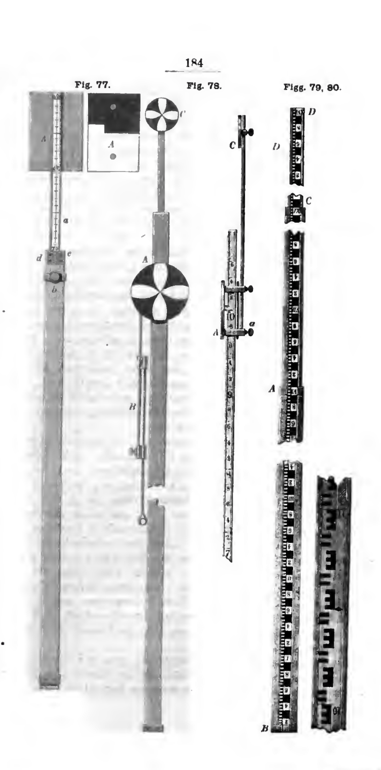
§. 175.

Wie schon im §. 170 erwähnt ist, dienen die **Nivellierlatten** oder **Nivelliertableaux** zur Bestimmung der Höhe der Visierlinie von gegebenen Punkten auf der Erdoberfläche. In Hinsicht auf ihre Construction und ihren Gebrauch kann man zwei Arten von einander unterscheiden. Bei der ersten läfst sich längs eines nach dem landes-

üblichen Mafse eingetheilten parallelepipedischen Stabes von recht ausgetrocknetem Fichten-, Pappel-, Mahagoniholze eine kreisrunde oder rechteckige Zielscheibe von Holz oder Blech verschieben, deren Mitte in die Visierlinie gebracht wird. Die Stäbe, die auch wohl noch mit einem Firnifs überzogen sind, haben eine Länge von 10 bis 15 Fufs und sind etwa $1^1/_2$ bis 2 Zoll im Quadrat stark. Zur Bestimmung der Mitte der Scheibe hat die Vorderfläche Felder oder Kreissectoren von Schwarz oder Roth und Weifs. An der Hinterfläche ist meistens eine Metallhülse befestigt, die an den Seitenebenen des Stabes mittelst einer an die hintere Ebene sich anlegenden plattenförmigen Druckfeder mit der nöthigen Friction sich verschieben läfst. Durch eine Prefsschraube kann die Zielscheibe festgestellt werden. Zu der Bewegung der Scheibe dienen auch wohl zwei an den Enden der Latte angebrachte Rollen und eine gehörig straffe Schnur ohne Ende. Der Index zur Ablesung ist gewöhnlich so an der Scheibe angebracht, dafs derselbe die richtige Höhe der nach der Mitte der Scheibe gehörigen Visierlinie angiebt. Die Eintheilung der Latte ist gewöhnlich nach dem landesüblichen Fufse, also nach dem sogenannten Duodecimalfufse ausgeführt, seine weitere Theilung aber meistens zehntheilig, so dafs der Fufs die Einheit bildet. Da das untere Ende der Latte auf den ebenen quadratisch geformten Kopf eines in den Erdboden geschlagenen Pfahls gestellt wird, so ist dasselbe, um den Nullpunkt der Eintheilung unverändert zu erhalten, mit einer 1 bis 2 Zoll hohen starken Metallfafsung versehen, deren untere Fläche also den Nullpunkt bezeichnet.

Zeigt das zu nivellierende Terrain nur unbedeutende Höhenverschiedenheiten, so bietet die in Fig. 77 dargestellte Nivellierlatte hinsichtlich ihres leichteren Transports Bequemlichkeit dar. An ihrer Vorderseite befindet sich eine Nuth, in welcher sich durch eine Innen anliegende Feder mit der erforderlichen Friction ein an dem oberen Ende die Zielscheibe *A* tragender Stab *a* auf und nieder schieben und nach erfolgtem Einstellen durch die Prefsschraube *b* feststellen läfst. Zur Verschiebung der Scheibe dient ein an der Vorderfläche des Stabes angebrachter Knopf. Die Hinterfläche desselben wird von einer mit der Eintheilung versehenen Mefsingplatte gebildet, deren Index die obere Kante der Fafsung *cd* darstellt. Zur Einvisierung niedriger Zielhöhen kann der erwähnte Stab aus der Nuth herausgezogen und in umgekehrter Lage wieder eingeschoben werden. Deshalb enthält die Messingplatte auch eine doppelte Bezeichnung der abzulesenden Zielhöhen in entgegengesetzter Lage.

Für bedeutende Terrainverschiedenheiten eignet sich zweckmäfsiger die in Fig. 78 dargestellte Nivellierlatte. Bei ihr befindet sich die Eintheilung auf der einen etwas ausgestochenen Seitenebene; den Index


Fig. 77.
Fig. 78.
Figg. 79, 80.
A
A
a
d
e
b
C
A
B
C
A
a
D
D
C
A
B

bildet die untere Kante einer kleinen an der Hinterfläche der Scheibe *A* befestigten Messingplatte. Um bei hohen Zielhöhen die Einstellung der Scheibe zu erleichtern, ist mit ihrer Hülse eine mit einem Griffe versehene und zum Verlängern eingerichtete Eisenstange *B* verbunden. Für bedeutende Höhen ist in der Faſsung *A* noch eine Stange mit einer kleineren Scheibe *C* befestigt, deren Mitte von der Mitte der Scheibe *A* einen constanten Abstand, hier einen Abstand von 5 Fuſs hat, so daſs demnach die für die Scheibe *A* gemachte Ablesung noch um 5 Fuſs vermehrt werden muſs.

§. 176.

Die im vorigen Paragraph beschriebenen Nivellierlatten, deren Einrichtung die Verschiebung der Zielscheibe beim Bestimmen der horizontalen Visierlinie fordert, wird man nicht nur bei den mit schwächeren Fernröhren versehenen Nivellierwerkzeugen anzuwenden haben, sondern auch bei solchen, wo das Fernrohr durch Dioptern vertreten wird oder die ihrer Natur nach gar kein Fernrohr oder keine Dioptern enthalten, bei welchen aber doch die Darstellung des scheinbaren Horizonts unmittelbar möglich ist. Es bedarf kaum der Bemerkung, daſs bei der Anwendung solcher Latten der Geometer immer von der Geschicklichkeit des an der Latte stehenden Gehülfen abhängt und zugleich eine Controle über die Richtigkeit der Ablesung nöthig wird, selbst wenn die Zeit, die zum Einstellen der Scheibe erforderlich ist, unberücksichtigt bleibt. Dieser Umstand wird aber um so mehr zu erwägen sein, da der Geometer oft auf die Benutzung verschiedener Gehülfen angewiesen ist. Bei gröſseren, und selbst auch bei kleineren Libellenniveaux, die mit guten, d. h. sehr deutliche Bilder liefernden Fernröhren ausgestattet sind, werden deshalb meistens Nivellierlatten ohne Zielscheiben angewandt, welche mit einer durch Schwarz oder Roth und Weiſs deutlich dargestellten Eintheilung, die mindestens bis auf 2 Linien oder Zweihundertstel Fuſs ausgeführt ist, versehen sind und wobei der Hundertstelfuſs noch sicher geschätzt werden kann. Sie wurden zuerst von Reichenbach mit seinen bei einem Dreifuſs versehenen Libellenniveaux eingeführt.

Die in Figg. 79 und 80 dargestellten Latten haben die eben erwähnte Eintheilung, bei beiden nur auf verschiedene Weise dargestellt. Die Latte der Fig. 79 stellt ein Parallelepipedum *AB* von 6 Fuſs Höhe und von quadratischem Durchschnitt von 3 Zoll Seite vor. Die Vorderfläche desselben enthält auf einer ausgestochenen Ebene die Eintheilung bis zu 6 Fuſs Höhe. Aus einer Aushöhlung desselben kann durch Nachlaſsen einer im Innern angebrachten Druckfeder, ein zweiter parallelepipedischer Stab *AC* bis zu 11 Fuſs und aus diesem wieder

auf dieselbe Weise ein dritter CD bis zu 16 Fuſs Höhe ausgeschoben werden, so daſs also Höhenunterschiede bis zu letzterer Höhe bestimmt werden können. Auf der Eintheilung, die eine gleiche Breite bei den drei Stäben besitzt, sind die Zehntelfuſse durch Schwarz, die Fuſse aber durch Roth bezeichnet; in der vorliegenden Zeichnung aber ist diese Verschiedenheit nur durch arabische und römische Ziffern dargestellt.

Die in Fig. 80 dargestellte Latte kann aber bei einer Veränderung in der Bezeichnung der Eintheilung auf dieselbe Weise eingerichtet sein; es ist dabei nur zu beſserer Kenntlichmachung der Linien eine geringere Verjüngung zum Grunde gelegt.

Da es nicht die Absicht sein kann, hier alle verschiedenen Bezeichnungen der Eintheilung darzustellen, so wird in Bezug auf letztere der Leser auf die 2. Aufl. von Bauernfeind's Vermeſsungskunde und auf das schon mehrfach erwähnte Breithaupt'sche Magazin mathematischer Instrumente etc. verwiesen.

Wenngleich nun nicht in Abrede zu stellen ist, daſs die Reichenbach'schen Nivellierlatten dem ausübenden Geometer beim Nivellieren entschieden Vortheile vor den Latten mit Zielscheiben darbieten: so darf doch nicht übersehen werden, daſs bei der Bestimmung der Genauigkeit oder des mittleren Fehlers für gewisse Distanzen eines zum Nivellieren anzuwendenden Libellenniveau's, ein Geschäft, dem sich eigentlich jeder Praktiker vor dem Gebrauche zu Nivellementsbestimmungen unterziehen muſs, die Nivellierlatten mit Zielscheiben deshalb vor den Reichenbach'schen einen Vortheil gewähren, als bei den ersteren die wiederholte Ablesung schon durch Verschiebung und nochmalige Einstellung der Scheibe erreicht werden kann, die durch die Einstellung der Libelle bestimmte Visierlinie des Fernrohrs aber unverändert bleibt, die unvermeidlichen Fehler also unter übrigens gleichen Umständen schon durch die wiederholte Einstellung der Scheibe sich ergeben. Bei den Reichenbach'schen Latten dagegen werden die folgenden Bestimmungen der Gefällhöhe nur durch Verstellen der Visierlinie und abermaliges Einstellen derselben durch die Libelle erreicht werden können, ein Verfahren, das unter Umständen wenigstens zeitraubender werden kann.

Die Prüfung und Berichtigung der Libellenniveaux zum Nivellieren der Ebenen.

§. 177.

Die Verschiedenheit in der Construction der in §§. 171 und 172 angedeuteten Nivellierwerkzeuge erfordert offenbar auch eine Verschieden-

heit in der Aufsuchung ihrer Fehler und ihrer Berichtigung. Deshalb ist es zweckmäfsig, diese Untersuchungen auch für jede Classe besonders darzustellen.

§. 178.

1. Bestimmung des Ausschlages der Röhrenlibelle.

Da nicht nur die richtige Lage der Visierlinie des Fernrohrs, sondern auch die Auffindung einzelner Fehler beim Niveau durch die Genauigkeit der Röhrenlibelle bedingt wird: so mufs diese Bestimmung allen folgenden Untersuchungen vorangehen, wozu aber §. 27 die erforderliche Anweisung giebt. Ob nun auch die Empfindlichkeit der Röhrenlibelle mit der optischen Kraft des Fernrohrs im Einklange steht, erfährt man am einfachsten, wenn man das Fernrohr in die Richtung der einen Stellschraube des Dreifufses oder der Nufs bringt, mit jener die Luftblase einstellt und das Fadenkreuz auf einen deutlich markierten entfernten Punkt, z. B. der aufgestellten Nivellierlatte richtet. Verstellt man nun die Stellschraube etwas und bringt die Luftblase wieder zum Einspielen, so mufs der vorige Visierpunkt abermals vom Fadenkreuz getroffen werden. Nachdem diefs Verfahren mehrere Male mit demselben Erfolge wiederholt ist, kann man der Libelle die erforderliche Empfindlichkeit beilegen. Bei einem beständigen Hin- und Herschwanken der Luftblase nach jedem Einstellen ist die Empfindlichkeit zu grofs; diese nützt nicht, sondern wirkt nur störend auf das Fördern des Nivellierens ein.

§. 179.

2. Horizontalstellung des Horizontalfadens im Fadenkreuz.

Während es bei den Horizontalwinkelmefsern hauptsächlich nur auf die Coincidenz des Durchschnittspunktes des Fadenkreuzes mit dem Bilde des einvisierten Objects ankommt, die Nichthorizontalität des einen Fadens also weiter keinen nachtheiligen Einflufs auf die Winkelbestimmung ausübt, wirkt bei Nivellierwerkzeugen, besonders wenn man auf die Scheibe der Latte einstellt, die Nichthorizontalität mindestens störend, oft aber auch sogar nachtheilig. Daher ist dieser Fehler zu verbefsern.

Man stelle das Niveau horizontal, bringe das Bild eines scharf markierten Punktes nach §. 53 in die Ebene des Fadenkreuzes und führe den Obertheil desselben im Horizonte sanft hin und her, so mufs das Bild des Punktes fortwährend mit dem Faden zusammenfallen. Zur Berichtigung einer etwa gefundenen Abweichung wird bei den Apparaten der Figg. 75 und 76 der vordere Theil der Ocularröhre an dem eingeschnittenen Schraubengewinde gedreht. Treten, wie es zweck-

mäfsiger ist, gegen den Stahlrücken zwei Stellschrauben, so erfolgt durch diese die Berichtigung.

§. 180.

3. Die Centrierung des Fernrohrs.

Wenn der Durchschnittspunkt der Kreuzfäden nicht in der geometrischen Achse der Ringe des Fernrohrs liegt, so wird von einem nachtheiligen Einflufs dieses Fehlers nur insofern die Rede sein können, als beim Einstellen des Fernrohrs auf die Nivellierlatte, das Fernrohr entweder keine unabänderliche Lage in den Lagern der Träger haben sollte, oder, wenn es umgelegt ist, die Durchmefser der Ringe nicht vollkommen gleich sind.

1. Man richte den Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes auf die Scheibe einer etwa 30 bis 40 Ruthen entfernten Nivellierlatte und stelle die Scheibe nach der Visierlinie genau ein. Darauf drehe man das Fernrohr in seinen Lagern, ohne diese aber zu verwechseln, um 180° und untersuche, ob der Kreuzungspunkt wieder genau die Mitte der Scheibe trifft. Ist diefs der Fall, so liegt der Kreuzungspunkt in der geometrischen Achse der Ringe. Zeigt sich eine Verschiedenheit bei beiden Einstellungen, so stelle man die Scheibe auf das arithmetische Mittel beider Höhen und richte auf diese das Fernrohr, durch Verstellung seines Fadenkreuzes, ein. Zur Versicherung des Erfolges wird das Verfahren wiederholt.

Auf dieselbe Art wird die Untersuchung in einer Lage des Fernrohrs vorgenommen, die von der zuerst erwähnten um 90° abweicht, wobei also der zuerst senkrecht stehende Faden eine horizontale Lage bekommt. Die Verbefserung geschieht dann offenbar an den beiden andern, jetzt in senkrechter Lage sich befindenden Stellschräubchen des Fadenkreuzes.

Es reicht zwar zum Erkennen des Fehlers schon hin, wenn man das Fernrohr in seinen Lagern beliebig dreht; allein zur Bestimmung der Gröfse desselben mufs die Umdrehung 180° betragen.

2. Bei dem in Fig. 75 dargestellten Apparate wird man daher vor der Untersuchung durch Lösung des Schräubchens α den Hebel β nieder zu lafsen haben, um das Fernrohr in seinen Lagern drehen zu können. Die Verbefserung wird bei der ersten Untersuchung an den Schräubchen δ, δ_1, bei der zweiten aber in δ_2, δ_3, von denen in der Zeichnung nur δ_2 sichtbar ist, vorgenommen. Schliefslich wird der Hebel β wieder in seine ursprüngliche Lage gebracht, wodurch das Fernrohr dann beim Beobachten eine unabänderliche Lage behält.

Bei dem Apparat der Fig. 76 kann die Untersuchung nicht vorgenommen werden, da das Fernrohr in seinen Lagern nicht gedreht werden kann.

§. 181.

4. Untersuchung der rechtwinklichten Lage der Verticalachse gegen die Visierlinie des Fernrohrs.

Wenn mit den oben beschriebenen Libellenniveaux die Nivellierung der Ebenen vollkommen richtig ausfallen soll, so ist auf die vorliegende Bestimmung ganz besonders Sorgfalt zu verwenden.

1. Man wendet dazu am zweckmäfsigsten zwei mit Fadenkreuzen versehene Hülfsröhre an und stellt dieselben, nachdem man jedes einzelne vorläufig auf ein unendlich entferntes Object deutlich eingerichtet hat, so mit ihren Objectiven einander gegenüber, dafs ihre Visierlinien eine Gerade bilden. Bringt man dann das Niveau zwischen beide, richtet sein Fadenkreuz zuerst auf das des einen Hülfsfernrohrs, so mufs bei einer Umdrehung des Niveaufernrohrs um 180⁰ sein Fadenkreuz auch das des zweiten Hülfsfernrohrs decken, wenn die Visierlinie des Fernrohrs des Niveau's zum Verticalzapfen rechtwinklicht stehen soll. Zeigt sich aber eine Abweichung, so wird ihre eine Hälfte durch die Stellschrauben des Dreifufses oder der Nufs, die andere aber entweder durch Verstellung des einen Achsenlagers oder der Visierlinie des Fernrohrs verbefsert.

Bei dem Apparate der Fig. 75 löst man erst die Druckschraube $\mathfrak{d}_1$ und bewegt dann die Stellschraube d durch Lösung oder Anziehung, je nachdem der Träger E_1 gehoben oder gesenkt werden soll und zieht darauf $\mathfrak{d}_1$ wieder fest an.

Bei dem kleinen Niveau der Fig. 76 ist die erwähnte Hälfte nur an den beiden Stellschräubchen $e e_1$ der Ocularblendung zu verbefsern.

Um die erste Hälfte des Fehlers bequem verbefsern zu können, ist es zweckmäfsig, das Niveau vor der Untersuchung so zwischen die beiden Hülfsfernröhre zu stellen, dafs sein Fernrohr über dem einen Arme des Dreifufses oder der einen Stellschraube der Nufs liegt.

Die Berichtigung des Fehlers wird sehr vereinfacht, wenn das zweite der Hülfsfernröhre mit einem Mikrometerocular versehen ist, wodurch man in den Stand gesetzt wird, die ganze Abweichung genau zu mefsen und das Fadenkreuz auf die Hälfte derselben zurück zu stellen.

Selbstverständlich ist die Untersuchung so lange zu wiederholen, bis nicht die geringste Abweichung mehr sich zeigt.

2. Statt zweier Hülfsfernröhre kann man auch nur eins, Statt des zweiten aber ein scharfmarkiertes Object anwenden, auf welches dann nicht nur das Hülfsfernrohr, sondern auch das Fernrohr des Niveau's vor seiner Umdrehung um 180⁰ gerichtet wird.

§. 182.

Unter der Voraussetzung einer Gleichheit der Durchmefser der glockenmetallenen Ringe des Fernrohrs kann man die in Rede stehende Untersuchung auch auf folgende Weise ausführen. Man richte das Fadenkreuz des Fernrohrs auf ein entferntes, deutlich markiertes Object, bringe z. B. die Zielscheibe der Nivellierlatte in die Richtung der Visierlinie, drehe darauf den beweglichen Theil des Niveau's um 180⁰ und lege das Fernrohr in seinen Lagern um. Wird nun ein anderer Punkt der Zielscheibe von dem Fadenkreuz getroffen, so drückt sein Verticalabstand vom ersten wieder den doppelten Fehler aus, dessen Hälfte daher wieder, wie im vorigen Paragraphen angegeben wurde, verbefsert wird.

Da die vorausgesetzte Gleichheit der Durchmefser der Ringe erst durch das im folgenden Paragraphen anzugebende Verfahren erkannt werden kann, so kann das obige Verfahren eigentlich nur zur Probe des im vorigen Paragraphen angegebenen benutzt werden.

§. 183.

5. Untersuchungen über die Gleichheit der Durchmefser der Ringe des Fernrohrs.

1. Nachdem nach §. 181 der etwa vorhandene Fehler in der Lage der Verticalachse gegen die Visierlinie des Fernrohrs vollständig berichtigt ist, erfährt man die Gleichheit oder Ungleichheit der Ringdurchmefser des Fernrohrs einfach durch Umlegung desselben in seinen Lagern. Wird dann der Durchschnitt des Fadenkreuzes des Niveaufernrohrs genau den Durchschnitt desselben im Hülfsfernrohr treffen, so ist eine Gleichheit der Ringdurchmefser vorhanden. Zeigt sich aber hierbei eine Abweichung, so kann zwar die hierdurch begründete Ungleichheit der Ringdurchmefser beim Nivellieren dadurch einflufslos gemacht werden, dafs man in beiden Lagen des Fernrohrs das Gefälle bestimmt und von den erhaltenen Resultaten das arithmetische Mittel nimmt; allein man wird meistentheils lieber diejenige Lage des Fernrohrs, die es nach der Berichtigung des im §. 181 bemerkten Fehlers hatte, beim Nivellieren stets beibehalten, indem dieselbe ja aus der Lage des Oculars gegen den verstellbaren Träger immer leicht zu fixieren ist.

2. Hat das Libellenniveau eine Aufsetzlibelle, so würde die aus der Ungleichheit der Ringdurchmefser sich ergebende verschiedene Neigung der Fernrohrachse gegen den Horizont nach §. 31 bestimmt und dann beim Nivellieren auf ähnliche Weise in Rechnung gebracht werden können, wie sie bei Horizontal- und Verticalwinkelmefsungen in Rechnung gebracht werden kann. Allein auch von diesem Verfahren wird man gern beim Nivellieren abstrahieren. Will man also vom Centrieren

des Fernrohrs ganz absehen, so dürfte eine unabänderliche Verbindung des Fernrohrs mit seinen Trägern nicht mangelhaft genannt werden können.

§. 183 a.

6. Untersuchung der parallelen Lage der Libellenachse mit der Visierlinie des Fernrohrs.

1. Nachdem wieder der in 4. angegebene Fehler nach §. 181 vollständig beseitigt ist, stelle man das Niveau so auf, dafs die durch die Träger gedachte Verticalebene durch die eine Stellschraube der Horizontalstellungsvorrichtung geht und bringe mit derselben die Luftblase zum Einspielen. Dreht man darauf den Obertheil des Niveau's um 180^0 und spielt die Luftblase wieder ein, so ist der Apparat berichtigt. Zeigt sich aber eine Abweichung, so ist bei den Niveaux, bei welchen die Libelle mit dem Fernrohr verbunden ist, die Hälfte derselben an der Stellschraube der Horizontalstellungsvorrichtung, die andere an der Correctionsschraube zu verbefsern und das Verfahren so lange zu wiederholen, bis die Luftblase in beiden Lagen des Fernrohrs ihren Stand nicht ändert.

Eine nunmehrige Umlegung des Fernrohrs in seinen Lagern würde die Gleichheit oder Ungleichheit der Ringdurchmefser nachweisen.

Aufserdem ist dann noch bei den Niveaux, die entweder eine Aufsetzlibelle haben, oder deren Fernrohr mit der Libelle in den Lagern beweglich ist, die im §. 32 3. angegebene Prüfung anzuwenden und ein sich zeigender Fehler nach den daselbst gemachten Angaben zu verbefsern.

§. 184.

7. Verticale Einstellung des Verticalzapfens.

Man stellt das Niveau, wie im vorigen Paragraphen angegeben wurde, auf, bringt die Luftblase sowohl in dieser, als auch in einer anderen Lage, die gegen die erste um 90^0 abweicht, zum Einspielen und wiederholt diese Einstellungen so lange, bis keine Verstellung der Luftblase mehr wahrzunehmen ist. Wird nun der Obertheil ganz im Horizont herumgeführt, so mufs die Luftblase ihren Stand unverändert beibehalten und es beschreibt die Visierlinie des Fernrohrs den scheinbaren Horizont.

Es ist beim Aufstellen des Niveau's zum Nivellieren zweckmäfsig, gleich anfangs dem Stativ die Stellung zu geben, dafs die eine Stellschraube der Horizontalstellungsvorrichtung in die Richtung nach der Nivellierlatte fällt, um beim Visieren des Fernrohrs auf die Latte, das genaue Einstellen der Luftblase durch die erwähnte Stellschraube leichter ausführen zu können.

B. Die Libellenniveaux zum Nivellieren der Linien.

§. 185.

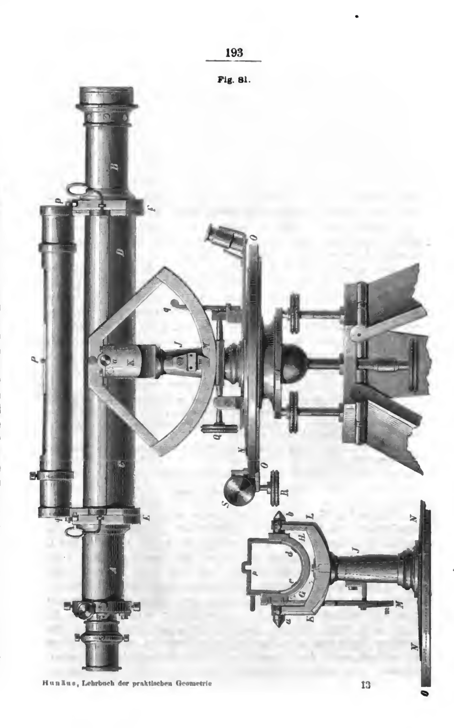
1. Das Ertel'sche grofse Niveau mit Horizontalkreis und Distanzmefser.

Diefs in Fig. 81 im Drittel wahrer Gröfse dargestellte Niveau unterscheidet sich vorzüglich dadurch von den sonst üblichen Constructionen, dafs die y-förmigen Lager des Fernrohrs AB hier durch einen hohlen Halbcylinder CD vertreten werden, der wieder an seinen Enden mit zwei ebenfalls halbcylindrischen starken Ringen EF verbunden ist, um eine Biegung des Fernrohrträgers CD zu verhindern. Dieser ist wieder mit einem starken Halbringe GH (s. die nebenstehende Figur) zusammengelöthet, in dessen parallelepipedischen Fortsätzen zwei cylindrische Stahlzapfen ab eingeschraubt sind, welche von den oberen senkrechten Theilen der von der Säule J sich ausbreitenden Gabel KL getragen und durch übergelegte Kappen gehalten werden. An der Flansche des einen parallelepipedischen Fortsatzes ist der Höhenbogen M befestigt, dessen Vernier m an der Säule seine Befestigung hat. Die Säule J bildet mit der Alhidade NN ein Ganzes und läfst sich um den mit dem Limbuskreise OO verbundenen Verticalzapfen im Horizonte drehen.

An jedem Ende des Fernrohrträgers CD sind zwei convex abgedrehte Stahlplatten cd befestigt, auf welche die Metallringe des Fernrohrs zu liegen kommen. Auf letztere wird die Aufsetzlibelle P gesetzt, welche durch 2 Bügel pp, die an den Fortsätzen der Ringe EF befestigt sind, und durch vorgesteckte Stifte vor dem Herabfallen gesichert wird.

Das Fernrohr ist als Distanzmefser mit verstellbaren Fäden eingerichtet. Da aber durch die unwandelbare Lage der zugehörigen Stellschrauben die etwa erforderliche Verstellung des mittleren Durchschnittspunktes des Fadenkreuzes gegen die optische Achse des Fernrohrs nicht auf dieselbe Weise ausgeführt werden kann, wie sie das Huyghens'sche Ocular gestattet, so enthält zur Erreichung dieser Verstellung das vordere Ende des Objectivrohrs einen dicken Ring, der, den nöthigen Spielraum lafsend, von einem ausgeschnittenen Deckel fast ganz umschlofsen wird. Durch vier Zugschrauben kann letzterer mit dem erwähnten Ringe fest verbunden, durch vier Stellschrauben hingegen verstellt werden, nachdem die Zugschrauben, die in der Hinterplatte des Deckels den nöthigen Spielraum zur Verschiebung haben, zuvor etwas gelöst worden. Hierdurch wird dann die Verstellung der Collimationslinie des Fernrohrs ermöglicht. M. vgl. II. g. I. Figg. 29 bis 31, §. 50.

Fig. 81.



Unter dem Höhenbogen findet sich auf einem Gestell die Schraube ohne Ende Q, welche durch Hebung des mit einem Excentrik versehenen Hebels q in die in den Rand des Bogens eingeschnittenen Muttergänge eingreifen kann und dann als Elevationsschraube (§. 172) zum Einstellen der Libelle und der horizontalen Visirlinie dient. Durch Niederdrücken des Hebels q treten die Gewinde der Schraube aus ihren Muttergängen heraus und kann dann das Fernrohr in einer Verticalebene grob bewegt werden. Zur Hemmung der groben Horizontalbewegung der Alhidade, sowie zur feinen Einstellung dient die Klemmschraube R mit der Halterplatte und die Mikrometerschraube S. Zur Ablesung der Theilung des Limbus, der unmittelbar in Sechstelgrade getheilt ist, und dessen zwei Verniere 10 Sekunden angeben, dienen 2 Loupen in einem beweglichen Halter.

Der Apparat wird mit dem Teller T, der mit dem Horizontalkreise aus einem Stück besteht, auf die Köpfe der drei Stellschrauben gestellt und mit der Centralschraube befestigt. Die Stellschrauben dienen zum Horizontalstellen des Kreises und die Centralschraube zum Befestigen des Niveau's auf dem Scheibenstativ. (M. vgl. §. 80 und Fig. 27.)

Ein mit einem Tragriemen versehener Kasten nimmt einzeln die Libelle, das Fernrohr und die übrigen Theile des Instrumentes auf, während die Stellschrauben und die Centralschraube mit dem Stativkopf durch eine Lederstülpe vor Staub gesichert werden können.

Anmerkung. Mit dieser Construction stimmt im Wesentlichen das auf Taf. 19 in der Breithaupt'schen Sammlung von Zeichnungen u. s. w. dargestellte Niveau überein, nur ist daselbst zweckmäfsiger die Horizontalstellungsvorrichtung durch einen Dreifufs mit Stellschrauben vertreten.

Man vergl. auch Tafel XVIII in Engelbreit's Instrumenten der Geodäsie, Nürnberg, 1852.

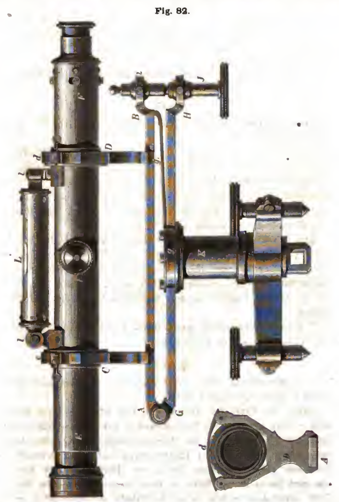
§. 186.

2. Das Sisson'sche Niveau.

Das in Fig. 82 in halber wahrer Gröfse dargestellte Niveau, dessen Construction von dem englischen Mechaniker Sisson angegeben ist, enthält die Trägerplatte AB, von welcher die beiden Träger C und D mit ihren y-förmigen Lagern für das mit Metallringen versehene Fernrohr EF ausgehen und die mit der Platte GH durch ein bei AG liegendes Charnier verbunden ist. Die anderen Enden beider Platten erweitern sich gabelförmig und nehmen die beiden Gabeltheile der Mikrometerschraube J, die bei i ihre Mutter hat, auf. Auf der Platte GH, deren Mitte zu einer Scheibe g sich erweitert, ist eine stählerne Druckfeder g_1 mittelst Schrauben befestigt, welche mit ihrem freien Ende unter die Trägerplatte tritt und dadurch der Mikrometerschraube den nöthigen Stützpunkt darbietet. Unter derselben ist

eine Hülse *K* befestigt, mit welcher das Niveau auf den Zapfen einer mit Stellschrauben versehenen Horizontalstellungsvorrichtung gestellt wird. Die Röhrenlibelle *L* ist mittelst zweier Sättel, deren einer ein

Fig. 82.



Charnier *l* und deren anderer die Correctionsvorrichtung l_1 trägt, mit dem Fernrohr verbunden. Letzteres wird durch zwei übergreifende Bügel *cd* und durch eingesteckte Stiftchen in den Trägern gehalten. Da das Fernrohr mit einem Ramsden'schen Ocular zum Distanzmefsen versehen

ist und die Ocularröhre für verschieden entfernte Objecte nicht ausgezogen werden kann: so ist der vordere Theil des Objectivrohrs mittelst des Getriebkopfes *f* und einer im Innern des Rohrs liegenden Zahnstange zum bequemen Ausziehen eingerichtet.

Anmerkung. Ueber das Chézy'sche Niveau, welches F. W. Netto auch zu dem Sisson'schen rechnet vgl. m. H. g. I. Fig. 172. §. 353. Daselbst findet sich auch das Breithaupt'sche Compensations-Niveau dargestellt.

Die Berichtigung der Libellenniveaux zum Nivellieren der Linien.

§. 187.

1. Die Bestimmung des Ausschlags der Libelle ist nach §. 178 auszuführen.

2. Für die Horizontalstellung des Horizontalfadens im Fadenkreuz gelten auch die im §. 179 gegebenen Vorschriften. Bei dem Niveau der Fig. 81 werden wieder die an dem Deckel der Objectivröhre befindlichen Stellschrauben benutzt; bei dem Sisson'schen Niveau wird die Ocularröhre in dem Objectivrohr verschoben und durch die seitlichen Zugschrauben wieder befestigt.

3. Die Centrierung des Fernrohrs wird nach den im §. 180 gegebenen Vorschriften ausgeführt. Bei dem Niveau der Fig. 81 ist dann die Verbefserung nur durch Verstellung des Objectivrohrs gegen das Ocularrohr möglich, worüber §. 185 zu vergleichen ist; bei dem Apparat der Fig. 82 dagegen an den Stellschräubchen des Fadenkreuzes auszuführen..

4. Untersuchung der parallelen Lage der Libellenachse mit der Visierlinie des Fernrohrs.

§. 188.

Diese Untersuchung wird verschieden sein müfsen nach der verschiedenen Construction des Niveau's.

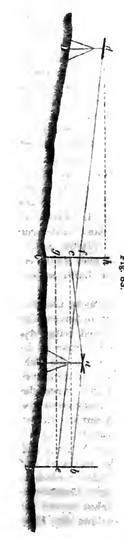
1. Wird das Ertelsche Niveau der Fig. 81 zuvörderst durch die drei dem Stative angehörigen Stellschrauben nahezu horizontal und die Luftblase der Libelle durch die Elevationsschraube *Q* eingestellt, so wird man durch Umsetzen der Libelle deren Richtigkeit erfahren; wird also die etwa gefundene Abweichung zur Hälfte an der Elevationsschraube und zur anderen Hälfte an der Correctionsschraube der Libelle verbefsert, aufserdem auch noch an der Libelle die im §. 32, 3 erwähnte Untersuchung und Berichtigung vorgenommen, so folgt, wie auch im §. 32, 2 erwähnt wurde, dafs die Achse der Libelle ihrer Unterlage, d. h. der durch die Metallringe gelegten horizontalen Berührungsebene parallel ist. Ist also das Fernrohr nach dem vorigen Paragraphen

vollständig centriert, so wird auch die Libellenachse der Visierlinie des Fernrohrs parallel sein. Legt man daher jetzt das Fernrohr mit der darauf stehenden Libelle um, so wird eine in dem Stande der Luftblase sich zeigende Abweichung eine Verschiedenheit der Ringdurchmeſser nachweisen. Da aber, wie schon im §. 183, 1 erwähnt wurde, beim Nivellieren selbst diese Verschiedenheit gewöhnlich nicht eliminiert wird, so ist wieder anzurathen, dem Fernrohr beim Nivellieren stets dieselbe Lage zu geben, die es bei der Untersuchnng des Centrierens hatte.

2. Ist die Libelle auf dem Fernrohr mittelst zweier Sättel befestigt, letzteres aber in seinen Lagern umlegbar, wie bei dem in Fig. 82 dargestellten Niveau, so ist wieder zunächst das Fernrohr sorgfältig zu centrieren. Bringt man darauf die Luftblase der Libelle mittelst der Elevationsschraube J zum Einspielen, hebt das Fernrohr aus seinen Lagern und legt es umgekehrt wieder ein, so muſs wieder die Luftblase einspielen, wenn die Libellenachse mit der Visierlinie des Fernrohrs parallel sein soll. Eine sich zeigende Abweichung ist dann wieder zur Hälfte an der genannten Elevationsschraube, zur anderen Hälfte an der Correctionsvorrichtung l_1 der Libelle zu verbeſsern und auch dieſs Verfahren so lange zu wiederholen, bis die Stellung der Luftblase ungeändert bleibt.

3. Läſst sich aber das Fernrohr in seinen Lagern nicht umlegen, so stelle man wieder, wie nach §. 181, zwei Hülfsfernröhre in horizontaler Lage so auf, daſs ihre Visierlinien eine Gerade bilden und bringe das zu untersuchende Niveau so zwischen beide, daſs das Fernrohr in die Richtung der Elevationsschraube des Niveau's und zugleich in die Richtung der Hülfsfernröhre kommt. Dann stelle man mittelst der erwähnten Elevationsschraube die zugehörige verticale Drehungsachse gegen die Gerade der Hülfsfernröhre normal, indem man das Fadenkreuz des Niveaufernrohrs auf das Fadenkreuz des einen Hülfsfernrohrs richtet, dann das erstere um 180° dreht und den bei der Nichtcoincidenz des Fadenkreuzes des anderen Hülfsfernrohrs mit dem des Niveau's sich zeigenden Fehler, zur Hälfte an der Elevationsschraube verbeſsert und dieſs Verfahren bis zu einer genauen Coincidenz der Fäden wiederholt. Bringt man darauf die Luftblase der Libelle mittelst ihrer Correctionsvorrichtung zum Einspielen, so wird auch die Libellenachse normal zur verticalen Drehungsachse, also parallel mit der Visierlinie des Fernrohrs sein.

4. Ohne Anwendung zweier Hülfsfernröhre, oder auch eines Hülfsfernrohrs und eines scharf markierten Objects, Statt des zweiten, meſse man in einer Ebene eine Linie von etwa 30 bis 40 Ruthen Länge ab, nehme dieselbe aber zugleich so an, daſs sie über ihren einen Endpunkt hinaus um eben so viel verlängert werden kann.



Man stelle sich nun in der Mitte A (Fig. 83) der Linie BC mit dem Nivellierinstrumente auf, von welchem angenommen werden mag, dafs die Libellenachse nicht parallel der Visierlinie des Fernrohrs ist und bestimme die Höhe der Visierlinie auf den in B und C errichteten Latten, nämlich Bb und Cc, nachdem man vor jedem Einstellen die Luftblase der Libelle zum Einspielen gebracht hat. Da nun $AB = AC$ und daher auch $ac = ab$ ist, so wird cb eine Horizontallinie bezeichnen.

Nun stelle man sich in dem Endpunkte D der über C hinaus verlängerten und CB gleich gemachten Linie CD auf, stelle die Luftblase der Libelle ein und bestimme auf den Latten in C und B wieder die Zielhöhen Be und Cf der Visierlinie des Fernrohrs, welche offenbar parallel ab sein mufs. Bestimmt man nun auf der in C stehenden Latte den Punkt g so, dafs $cg = be = Bb - Be$ ist, so wird auch ge eine Horizontale darstellen und wenn darauf wieder der Punkt h so bestimmt wird, dafs $fg = fh$ ist, so wird auch die Visierlinie des nach h gerichteten Fernrohrs horizontal, also die Libelle durch die Correctionsschrauben nur noch soweit zu berichtigen sein, dafs in der erwähnten Lage des Fernrohrs die Luftblase einspielt. Dürfte nun vorausgesetzt werden, dafs die erwähnten Einstellungen des Fernrohrs und die bestimmten Zielhöhen völlig fehlerfrei wären, so würde nach der erfolgten Correction der Libelle auch ihre Achse der Visierlinie des Fernrohrs parallel sein müfsen. Diefs darf aber wegen der unvermeidlichen Fehler nicht geschehen und es kann daher der im Nivellierinstrumente vorhandene Fehler nicht als vollständig verbefsert angenommen werden. Indessen möchte das angegebene Verfahren bei Nivellierinstrumenten, von denen man nicht die gröfste Genauigkeit beim Nivellieren erwartet, ausreichend erscheinen. Zugleich ergiebt sich hieraus, wie nothwendig es ist, das Fernrohr der Nivellierwerkzeuge, die nur zum Nivellieren der Linien dienen, zum Umlegen einrichten zu lafsen.

§. 189.

Schlufsbemerkung. Wesentlich verschieden von den bisher betrachteten Libellenniveaux, sowohl in Bezug auf die Construction, als auch auf den Gebrauch, sind die Libellenniveaux mit constanten Zielhöhen (§. 172). Zu diesen gehört zunächst das Stampfer-Starkesche Niveau, von welchem eine vollständige Beschreibung als Niveau, Distanz- und Höhenmefser in Stampfer's Anleitung zum Gebrauch der verbefserton Nivellierinstrumente, welche in der Werkstätte des polytechnischen Instituts in Wien verfertigt werden, Wien, 1839, gegeben ist. In H. g. I. ist dafselbe in den Fig. 179 u. 180 dargestellt; es erfordert eine Latte mit 2 Scheiben, die denselben Abstand von einander haben. In der 40. Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte zu Hannover im September 1865 wies der Prof. Dr. Bohn aus Giessen nach, dafs nach der aufgestellten Theorie die Construction des erwähnten Niveau's eine mangelhafte sei und dasselbe daher unrichtige Mefsungen ergeben müfse und theilte deshalb in der mathematisch-physikalischen Abtheilung die Grundzüge eines von den Mängeln befreiten Instrumentes mit. In Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie Bd. 129 hat Prof. Bohn nicht nur eine Kritik der Stampferschen Theorie, sondern auch die Theorie seines verbefserten Instruments, sowie die Beschreibung und Abbildung desselben gegeben. In vorzüglichster Art soll dasselbe in der Werkstätte von C. Staudinger u. Comp. in Giessen verfertigt werden.

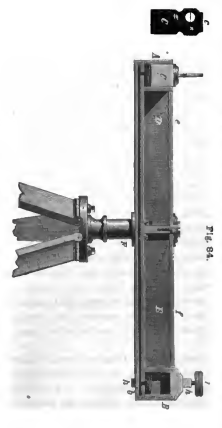
Ein vom Ingenieur Gordian angegebenes Libellenniveau fordert eine gleiche Höhe des Drehpunktes des Fernrohrs mit der Scheibenhöhe der Nivellierlatte von der Oberfläche des Stationspfahls und enthält aufserdem einen Scalenträger zur Bestimmung der Gefälle der Stationslinien. Eine vollständige Beschreibung und Abbildung dieses Niveau's findet sich in H. g. I. S. 456 u. f.

B. Die Röhren-Nivellierinstrumente.

§. 190.

1. Die Quecksilber-Wage.

Diefs von dem Engländer Koith 1790 angegebene, in Fig. 84 im Durchschnitt dargestellte Nivellierinstrument besteht ans zwei parallelepipedischen Holzgefäfsen A und B von etwa 1 Zoll Weite und $1^1/_3$ Zoll Höhe, die mit einer engeren, etwa $1^1/_3$ Fufs langen Röhre ab mit einander in Verbindung stehen und bis zu einer bestimmten Höhe mit Quecksilber gefüllt werden. Auf diefs werden zwei gleich schwere Würfel C (Schwimmer) von Ebenholz oder Elfenbein gesetzt, welche


Fig. 84.

ein zum Vor- und Rückwärtsvisieren eingerichtetes Diopter c tragen. Durch die Visierlinie beider Dioptern, welche beim Nichtgebrauche in den hohlen Räumen D und E liegen, wird der scheinbare Horizont angegeben. Beim Transporte werden die letzteren durch eine um d drehbare Deckplatte ef, und die Gefäfse durch zwei Holzdeckel g geschlofsen, die durch Metallzwingen hh und Druckschrauben i festgehalten werden. Mittelst einer Metallhülse F wird das Instrument auf den Zapfen eines Stativs gestellt.

Prüfung und Berichtigung der Quecksilberwage.

§. 191.

Die Quecksilberwage bedarf vor ihrem Gebrauche zum Nivellieren nur insofern einer vorläufigen Untersuchung, als man prüft, ob die Dioptern auf den Würfeln in gleicher Höhe auf dem Quecksilber schwimmen. Man stelle den Apparat in dem Endpunkte A einer Linie AB auf, und nach der Visierlinie der Dioptern die Zielscheibe der in B errichteten Latte ein. Setzt man dann die Schwimmer in umgekehrter Ordnung auf das Quecksilber, so mufs auch die zweite Visierlinie auf die vorhin eingestellte Zielhöhe gerichtet sein. Eine etwa erforderliche Berichtigung wird dann an dem ausgespannten Horizontalfaden des einen Diopters vorgenommen.

Aufserdem sind aber vor dem Gebrauch der Wage die Gefäfse und Würfel sorgfältig von etwaigem Staub zu reinigen, was am zweckmäfsigsten durch Ausspülen der ersteren mit gereinigtem Quecksilber geschieht. Auch ist das zum Nivellieren anzuwendende Quecksilber

durch einen engzusammengedrehten Papiertrichter in die Gefäfse zu giefsen, damit das etwa entstandene graue Quecksilberoxyd entfernt wird.

§. 192.

2. Die Kanalwage (Wafserwage).

Diese besteht aus einer meistens kupfernen Blechröhre von 3 bis 4 Fufs Länge, die an ihren Enden verticale Ansätze enthält, in welchen etwa 6 Zoll lange und 2 Zoll weite Glascylinder von genau gleichem Durchmefser, wafserdicht eingekittet sind. Letztere haben an ihren oberen Enden eine ebenfalls wafserdicht angekittete Metallfafsung mit einer durch eine Schraube verschliefsbaren Oeffnung. In der Mitte der Röhre ist eine konische Büchse angelöthet, welche auf den Zapfen eines Stativs gebracht wird. (Vgl. H. g. I. Fig. 186.)

Man füllt das Werkzeug durch die eine der erwähnten Oeffnungen etwa bis zur halben Höhe der Glasröhren mit reinem gefärbten Wafser. Der scheinbare Horizont desselben wird durch die horizontalliegenden Ränder des Wafsers gebildet. Hin und wieder hat man auch an den Cylinderflächen zwei mit einem Horizontalfaden versehene verschiebbare Diopteru zu diesem Zwecke angebracht.

§. 193.

Einer besonderen Prüfung bedarf die Kanalwage nicht, da bei vorausgesetzter völliger Reinheit der inneren Glasröhrenflächen und des Glases selbst, gleichem Druck der über dem Wafser in den Glasröhren stehenden atmosphärischen Luft und gleichem, so wie nicht zu geringem Durchmefser der Glasröhren, um die Haarröhrchenattraction unwirksam zu machen, nach physikalischen Gesetzen die oberen Wafserkanten in den Röhren den scheinbaren Horizont darstellen.

Vor dem Gebrauch ist daher die Kanalwage mit reinem Wafser sorgfältig auszuspülen, um allen in den Glasröhren angesetzten Staub zu entfernen. Bei dem Transport derselben von dem einen Standort bis zu einem anderen, sind vor dem Aufstellen und Visieren die Schrauben etwas zu lüften, damit durch die etwa in der einen Röhre entstandene verdichtete Luft kein ungleicher Druck auf die Wafserflächen ausgeübt wird.

C. Die Loth-Nivellierinstrumente.

§. 194.

1. Mayer's Patent-Gefällmefser *).

Der vom Obergeometer Mayer in Karlsruhe angegebene Patent-Gefällmefser soll vorzugsweise theils bei generellen Nivellements,

*) Beschreibung und Gebrauchsanweisung des Patent-Gefällmefsers u. s. w. von V. Mayer. Karlsruhe, 1855.

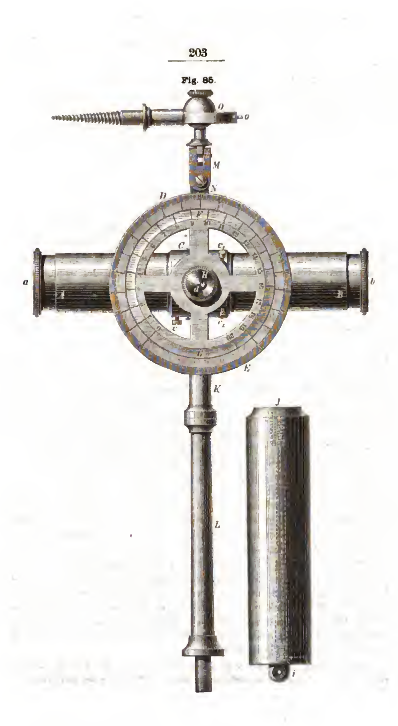
durch welche gewöhnlich vor den Strafsen- und Eisenbahnanlagen, den Flufsregulierungen u. s. w. eine vorläufige Angabe über die Richtung des zu nehmenden Weges und eine allgemeine Kenntnifs von der Lage der Terrainpunkte erworben werden soll, theils aber auch zur Aufsuchung der in technischer Hinsicht zweckmäfsigsten Tracen für anzulegende Strafsen, Eisenbahnen u. s. w. nach bestimmten Gefällen dienen.

Fig. 85 stellt die vordere Ansicht des Apparats, wie er beim Gebrauche an einem Stockstativ aufgehangen wird, in wahrer Gröfse vor. AB bezeichnet ein Sehrohr, das an jedem Ende eine mit einer Convexlinse von gleicher Brennweite versehene Auszugröhre a, b, in dem gemeinschaftlichen Brennpunkte aber ein Fadenkreuz enthält. Obgleich daher nicht achromatisch, kann durch die Reinheit der Glaslinsen doch ein klares Bild des beobachteten Gegenstandes erzielt werden. Das Rohr kann durch vier Schräubchen c, c_1 c_1 in dem Ringe C befestigt, aber auch etwas verschoben werden. Ein seitlicher cylindrischer Fortsatz des Ringes nimmt auf einem kleinen Konus den auf drei Quadranten in 40 gleiche Theile getheilten Kreis DE und auf einem kleinen cylindrischen, in Schraubengewinde endenden Zapfen d, den kleinen Kreis FG auf. Durch die aufgeschraubte Mutter H wird letzterer mit dem Sehrohr AB verbunden und kann durch dessen Bewegung in einer Verticalebene gegen den durch ein angehängtes Gewicht J festgehaltenen gröfseren Kreis bewegt werden. Er enthält eine solche Eintheilung, dafs durch die Coincidenz zweier gleichnamiger Striche beider Eintheilungen das Gefälle von halb zu halb, bis 20 Procent angegeben wird. Fallen demnach die Striche 6, $6^1/_2$, 7... beider Eintheilungen zusammen, so drückt die mit der Bodenfläche parallele Visierlinie des Sehrohrs beziehungsweise 6, $6^1/_2$, 7... Procent Gefälle der Bodenfläche aus.

Unten an der Hinterfläche des Kreises DE ist durch Schrauben ein cylindrisches Stück K befestigt, in welches der an dem unteren Ende mit einem Schraubengewinde versehene Stahlcylinder L geschraubt wird, während durch das angeschraubte cylindrische Gewicht J, der Visierlinie des Sehrohrs eine horizontale Lage ertheilt wird; dabei müfsen dann selbstverständlich die Nullpunkte der Eintheilungen beider Kreise coincidieren. Zum etwaigen Gebrauch des Cylinders L als Schraubenzieher enthält sein oberes in das Stück K eingeschraubtes Ende eine angefeilte Schneide und zum Berichtigen einzelner Theile des Instruments läfst sich in die Durchbohrung des Cylindergewichts J eine Stahlnadel i schrauben und beliebig daraus entfernen.

An dem oberen Ende des Kreises DE ist zum Aufhängen des Apparats wieder mittels Schrauben ein mit dem beweglichen Doppelcharniere M verbundenes Stück N befestigt. Das obere Glied desselben

Fig. 85.



läuft in eine Kugel aus, welche in eine eiserne Gabel *O* gehängt wird, deren entgegengesetztes Ende in eine Holzschraube zum Befestigen in einem 5 Fuſs hohen Stockstativ ausläuft. Durch den vorgesteckten Stift *o* wird das Herausgleiten der Kugel aus der Gabel verhindert.

Der Apparat kann in einzelnen Theilen bequem in ein Lederetui gelegt und in diesem gut verpackt, bequem in einer Tasche getragen werden.

Berichtigung und Gebrauch des Gefällmeſsers.

§. 195.

Soll das Instrument richtig das Gefälle der Bodenfläche angeben, so müſsen unter vorausgesetzten richtigen Eintheilungen der Kreise bei horizontaler Lage der Visierlinie die Nullpunkte der Eintheilungen coincidieren. Hat man nun nach fester Aufhängung des Apparats die Nullpunkte zur Coincidenz gebracht, auch die Auszugröhrchen ab bis zu dem eingeriſsenen Kreise gleich weit ausgezogen, so bemerke man etwa auf einer in entsprechender Entfernung errichteten Nivellierlatte den Punkt α, auf welchen der Durchschnitt des Fadenkreuzes gerichtet ist. Hängt man darauf den Apparat in der Gabel um, daſs das frühere Objectivende zum Ocularende wird und trifft der Kreuzungspunkt wieder den Punkt α, so ist die obige Bedingung erfüllt. Wird aber nach dem Umhängen ein anderer Punkt β getroffen, so bemerke man den Punkt γ mitten zwischen α und β und verstelle durch Anziehen und Lüften zweier diametral gegenübersitzender Correctionsschräubchen $c_2 c_2$ das Fadenkreuz soweit, bis nach dem wiederholten Umlegen der Punkt γ geschnitten wird. Durch das Schräubchen c wird die etwa nicht vorhandene Horizontalität des Horizontalfadens berichtigt.

Wendet man den Apparat zum Nivellieren nach der Methode aus der Mitte der Station an, so dürfte in dieser Hinsicht kaum noch etwas zu bemerken sein, obgleich selbstverständlich die dadurch erzielten Resultate wohl nur denen mit der Kanal- oder Quecksilberwaage, oder den durch die unvollkommneren und kleineren Libellenniveaux erhaltenen an die Seite zu stellen sein möchten.

Soll der Apparat als Gefällmeſser gebraucht und damit z. B. aus einem Punkte *A* eines Bergabhanges ein zweiter Punkt *B* einer Linie bei 10 Procent Gefälle bestimmt werden, so bringt man die mit 10 bezeichneten Striche beider Eintheilungen zur Coincidenz, stellt sich in *A* mit dem Instrumente auf und sucht mittelst einer auf dieselbe Höhe gestellten Zielscheibe einer Nivellierlatte durch Versuche den Punkt *B* des Terrains auf. (Vgl. §. 392, 2.)

Anmerkung. Nach der oben erwähnten Schrift soll der Apparat auch als Höhenmeſser, z. B. bei der Bestimmung der Höhe der Bäume dienen und findet sich

zu diesem Zwecke in dem vierten Quadranten des Kreises DE eine von Grad zu Grad ausgeführte Eintheilung, für welche dann der Nullstrich des kleineren Kreises als Index dient.

§. 196.

2. Der Gradbogen oder die Markscheiderwage.

Der in Fig. 86 in halber wahrer Gröfse dargestellte Gradbogen besteht aus einem Halbkreise ABC von dünnem federharten Messing-

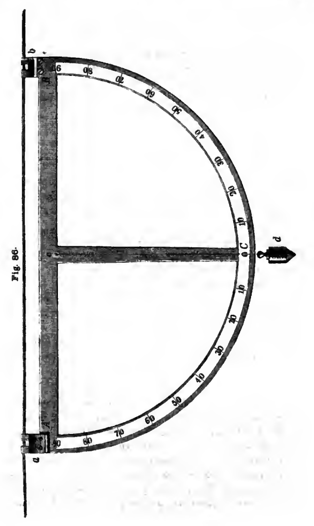


Fig. 86.

blech, dessen Quadrant von dem in der Mitte gelegenen Nullpunkte aus in Viertelgrade getheilt ist. Aus dem Mittelpunkte *c* des Theilkreises hängt ein mit einem Gewichte *d* beschwertes Menschenhaar herab, das bei horizontaler Lage des Durchmefsers mit dem Nullpunkte der Theilung zusammenfällt. An den Enden des Durchmefsers sind zwei nach entgegengesetzter Seite sich öffnende Haken *a*, *b*, zum Anhängen an eine feine Schnur aus Messingdraht durch Schrauben mit wenig ovalen Löchern befestigt. Fällt daher bei völliger Richtigkeit des Apparats das Loth *cd* auf 0, so ist die durch die inneren Hakenflächen festgelegte Linie horizontal. Mittelst der Theilung gestattet der Gradbogen auch die Bestimmung der Neigungswinkel geneigt liegender Linien gegen den Horizont. Um an solchen geneigt liegenden Schnüren das Herabgleiten des Gradbogens zu verhindern, haben die Haken Einschnitte, durch welche kleine zugespitzte Keile von Holz oder Knochen gesteckt werden.

Die Berichtigung und der Gebrauch des Gradbogens.

§. 197.

Die Berichtigung des Gradbogens besteht bei vorausgesetzter gleicher Theilung nur in der Untersuchuug, ob die durch die inneren Kanten der Haken gedachte Linie normal steht gegen die durch den Mittelpunkt *c* und den Nullpunkt der Theilung gehende. Man hänge in die Mitte einer möglichst straff und nahezu horizontal ausgespannten Schnur den Gradbogen und lese den abgeschnittenen Neigungswinkel ab. Wird nun an dieselbe Stelle der Schnur der Gradbogen in verwendeter Lage gehangen und stimmen in beiden Lageu die Ablesungen mit einander überein, so haben die Haken die richtige Stellung. Zur Berichtigung der etwa vorhandenen Abweichung gestattet durch die erwähnten ovalen Löcher jeder der Haken eine geringe seitliche Verschiebung, indem die zur Befestigung dienenden Zugschräubchen etwas gelüftet und nach der Verschiebuug wieder fest angezogen werden.

§. 198.

Der Gebrauch des Gradbogens erstreckt sich vorzugsweise auf die beim Bergbau vorkommenden Nivellements, woher demselben auch der Name Markscheiderwage gegeben ist. Obgleich mit demselben auch horizontale Linien angegeben werden können, so dient er doch in den meisten Fällen zur Bestimmung des Neigungswinkels der schief gegen den Horizont gelegenen Richtungen. Diese werden in der gewöhnlichen Anwendung durch eine aus Messingdraht verfertigte Mefsschnur, deren Glieder durch kleine Ringe und Wirbel verbunden sind,

dargestellt. Beim Markscheiden bezieht sich die Eintheilung derselben auf das Lachter,* beim Feldmeſsen auf das Ruthenmaſs. Ist also a die Länge der Schnur, φ ihr Neigungswinkel, so ist der Verticalabstand der Endpunkte derselben durch den Ausdruck

$$v = a \sin \varphi$$

bestimmt. Werden also auſserdem noch die Verticalabstände der Endpunkte oder auch anderer Punkte der Schnur von der Bodenfläche gemeſsen, so ergiebt sich daraus leicht die Bestimmung des Gefälles.

Bei dem gewöhnlichen Markscheiden wird die Schnur auf Spreizen, oder an dem Grubengezimmer, oder auf der Sohle der Strecken u. s. w., bei Nivellements auf der Tagesoberfläche aber auf in die Erde getriebenen Pfählen, oder auf dreifüſsigen Böcken mit abgerundeten Kopfflächen mittelst eingeschraubter Pfriemen befestigt und gehörig straff gespannt. Weicht die Schnur nur um einige Grade von der Horizontalen ab, so darf man den Gradbogen in ihrer Mitte an beiden Seiten anhängen und von beiden Ablesungen das arithmetische Mittel nehmen. Bei gröſserer Neigung der Schnur aber ist er, ebenfalls in verwendeter Lage, an zwei Punkten aufzuhängen, die vom Anfangs- und Endpunkte gleich weit abstehen, um das arithmetische Mittel jedes einzelnen Mittelwerths für den Neigungswinkel zu nehmen.

Diese Methode des Nivellierens bietet besonders bei der Bestimmung der Querprofile bei bedeutender Verschiedenheit des Terrains in kürzeren Distanzen viel Bequemlichkeit dar.

Kleinere Theile der bis auf Viertelgrado ausgeführten Theilung des Gradbogens bestimmt man nach dem Augenmaſse bis auf etwa $2\frac{1}{2}$ Minuten, wofür aber die Markscheider meistens eine bei der Ablesung der kleineren Theile des bergmännischen Compasses analoge Abschätzung und Bezeichnung anwenden.

Anmerkung. Zu dieser Classe der Nivellierinstrumente gehört auſser dem in II. g. I. Fig. 190 dargestellten Klitometer auch die Wall- oder Tranchee-wage, die Picard'sche und Hugeni'sche Waſserwage, die Pendelwage, die Roth'sche Bergwage, die Ditmar'sche und Falter'sche Libellensetzwage u. e. a., deren Beschreibung aber deshalb hier unterbleiben kann, da die ersteren in der Anwendung längst durch die im Vorhergehenden angegebenen Instrumente ersetzt, die zuletzt erwähnten Libellensetzwagen aber zunächst für Bauhandwerker bestimmt sind. Man findet Beschreibungen dieser Instrumente u. a. in J. T. Mayer's prakt. Geom. III., in Crelle's Handbuch des Feldmeſsens und Nivellierens, Berlin 1826, und in Bauernfeind's Elementen der Vermeſsungskunde, 2. Aufl., München 1862.

Dritter Abschnitt.

Beschreibung, Prüfung und Berichtigung der Instrumente für Linienmefsungen.

§. 199.

Die zum unmittelbaren Mefsen der Linien anzuwendenden Apparate sind hinsichtlich ihrer Einrichtung verschieden, theils nach der Genauigkeit, welche man von der Mefsung fordert, theils nach der Art der Aufnahme, zu welcher die unmittelbare Mefsung der Linien dienen soll, theils endlich nach der Beschaffenheit des Terrains, auf welchem die Mefsung ausgeführt wird.

Die gröfste Genauigkeit wird selbstverständlich bei der Mefsung der Entfernung zweier Punkte nach einem gegebenen Mafse gefordert, welche die Grundlage eines gröfseren oder kleineren trigonometrischen Dreiecksnetzes werden soll. Man bedient sich hierzu, wenn das Dreiecksnetz einer Gradmefsung, oder überhaupt einer Mefsung auf einem solchen Theile der Erdoberfläche angehört, der nicht mehr als eben betrachtet werden darf, nur der metallenen Mefsstäbe. Von diesen wird daher in diesem ersten Buche nicht die Rede sein. Gehört das Dreiecksnetz einer als eben anzunehmenden Flur an, z. B. der Aufnahme gröfserer Feldmarken oder Forsten u. s. w., so erfüllen schon gehörig eingerichtete hölzerne Mefsstäbe ihren Zweck.

Bei ökonomischen oder Kataster-Mefsungen, oder bei den Aufnahmen einzelner Grundstücke oder kleinerer Fluren dient zu Mefsungen der Linien die Mefskette, der einruthige Mefsstab und der Feldzirkel; bei der Aufnahme der Baulichkeiten wendet man mit Vortheil das Mefsband und bei der Mefsung der Ordinaten den Feldzirkel oder den Halbruthenstab an. Bei den beim Bergbau vorkommenden Längenmefsungen dient die Lachterschnur (Lachterkette) und bei den eigentlich topographischen und militärischen, mit dem Mefstisch ausgeführten Aufnahmen wendet man meistens die Distanzmefser an.

A. Längenmefsapparate zur Bestimmung der Grundlinie eines kleineren trigonometrischen Dreiecksnetzes.

§. 200.

1. Die hölzernen Mefsstäbe.

Wegen der geringen Genauigkeit, welche die Anwendung der Mefskette bei der Mefsung der Linien gewährt, kann dieselbe selbst bei der

Mefsung der Grundlinie eines trigonometrischen Dreiecksnetzes für eine gröfsere Fluraufnahme, z. B. bei der Aufnahme einer kleineren Provinz, oder einer gröfseren Feldmark, ausgedehnter Forsten u. s. w. nicht mehr angewandt werden. Man wendet dann zweckmäfsiger Mefsstangen von gut ausgetrocknetem Holz an, da seine Ausdehnung durch die Wärme nur unmerklich erfolgt und dasselbe vor den Einwirkungen der atmosphärischen Feuchtigkeit durch Auskochen in Oel und durch einen Ueberzug von Oelfirnifs hinreichend gesichert werden kann. Nach den bekannten Erfahrungen würde das Holz von Swietenia Mahagoni L. oder Sw. senegalensis Desrous, oder Populus dilatata Ait. dazu sich am meisten eignen; allein wegen der Schwierigkeit, lange Stangen davon zu erhalten, wird man auf das Holz von Pinus beschränkt sein, von welchem aber Pinus Picea L. wohl den Vorzug verdient.

Von einem hölzernen Mefsstangen-Apparat von mindestens 3 Stück, der nach eigenen Erfahrungen bei der Mefsung der Grundlinie einer gröfseren Fluraufnahme die erforderliche Genauigkeit (etwa $\frac{1}{6000}$) gewährt, zeigt Fig. 87 von dem einen Stabe eine Seitenansicht.

Der Stab AB hat eine Länge von einer Ruthe, einige Zoll Breite und $^3/_4$ Zoll Dicke. In etwa 2 Fufs Entfernung von jedem Ende ist eine Metallplatte befestigt, an welche eine etwa 5 Zoll hohe Metallhülse C, D zur Aufnahme eines mit einem eisernen konischen Schuh und

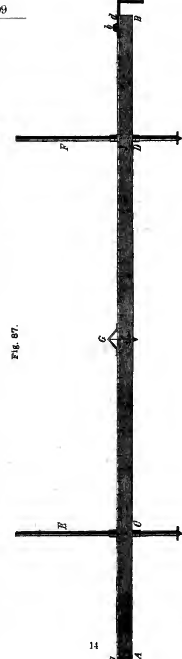


Fig. 87.

Querriegel versehenen cylindrischen Stabes E, F gelöthet ist. An diesen Stäben läfst sich die Mefsstange auf- und niederschieben und durch zwei, gegen Federn wirkende Druckschrauben (in der Figur nicht sichtbar) feststellen, sobald die Mefsstange eine horizontale Lage erhalten hat, welche an einer auf ihrer Mitte angebrachten Setzwage erkannt werden kann. Das aus ihrer Spitze herabhängende Loth mufs in diesem Falle mit dem einen Fufsstriche der nachher zu erwähnenden Eintheilung zusammenfallen. Das, in Bezug auf eine zu mefsende Linie, vordere Ende A der Mefsstange hat eine Metallkappe a mit einem darangelötheten Halbcylinder aus Stahl, dessen horizontalliegende Seite a zugleich den Endpunkt für die in Fufse, Zehntel- und Hundertstelfufse ausgeführte Eintheilung bildet. An dem hinteren Ende B läfst sich in einer aufgelegten Metallplatte mittelst eines Getriebekopfs b ein stählerner rechtwinklichter Arm c etwa 2 Zoll weit ausschieben und die Gröfse der Ausschiebung nach einer auf seiner Oberfläche bis auf Viertellinien (0,00025 Ruthen) ausgeführten Theilung, deren Index die scharfe Kante d der erwähnten Platte bildet, bestimmen. Der Arm läfst sich so weit einschieben, dafs seine äufsere verticale Kante c mit der Kante d zusammenfällt, so dafs d den Anfangspunkt der Eintheilung der Stange und ad ihre Länge bezeichnet.

B. Längenmefsapparate für Detail- oder kleinere Mefsungen.

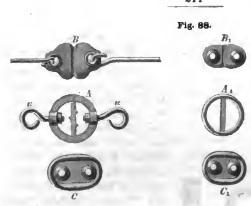
§. 201.

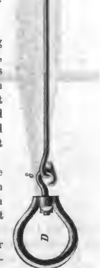
2. Die Mefskette.

Die Mefskette besteht aus einzelnen Gliedern a (Fig. 88) eines weichen Eisendrahts von $1^1/_2$ bis $1^3/_4$ Linien Dicke, die an den Enden hakenförmig umgebogen und durch Metallringe (von Eisen oder Messing) b so mit einander verbunden sind, dafs der Abstand der Mittelpunkte zweier auf einander folgender Ringe dem Zehntel einer Ruthe (einem Decimalfufs) gleich ist. Die Ruthen und halben Ruthen sind durch gröfsere Ringe $A\,A_1$ oder durch gröfsere, mit Löchern versehene ellipsenförmige, oder anders geformte Platten B, B_1, C, C_1 bezeichnet. Zur Aufnahme der Glieder finden sich an den Ruthenringen noch Wirbel $a\,a$, die durch Muttern gehalten werden, auch wohl noch ein Querriegel, an welchem durch dreieckige Ansätze die Zahl der Ruthen bemerklich gemacht ist. An jedem Ende der Mefskette findet sich ein gröfserer, mit einem Wirbel δ versehener Ring D, welcher den Kettenstab aufnimmt.

Damit die nach längerem Gebrauch durch das Ausschleifen der Ringe etwa entstandene Aenderung in der Länge der Kette, bei den verschiedenen Lagen ihrer Glieder oder bei den verschiedenen Ketten-

Fig. 88.





zügen sich nicht weiter ändert, nämlich die Glieder gezwungen werden, immer dieselbe Stelle der Ringe mit ihren Haken zu berühren, hat man, obgleich der Gebrauch der Kette dadurch unbequemer wird, die Ringe A_1 für die halben Ruthen, besonders aber die Ringe b für die Zehntelruthen durch ellipsenförmige Platten von Messing B_1, C_1, b_1, die in der Richtung der grofsen Achse zwei Löcher zur Aufnahme der Haken enthalten, zweckmäfsig ersetzt.

Die gewöhnliche Länge der Mefskette ist 5 Ruthen.

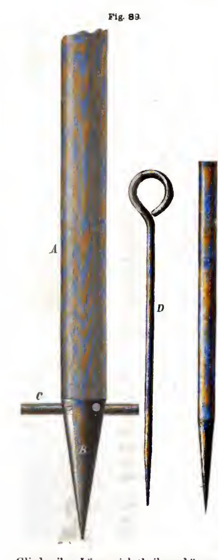
§. 201 a.

Um die Mefskette in der zu mefsenden Richtung auszuspannen, werden durch die Endringe D (Fig. 88), ihrem inneren Durchmefser entsprechende, 5 bis $5\frac{1}{2}$ Fufs hohe cylindrische Stäbe A (Fig. 89) von Tannen- oder Eschenholz, deren unteres Ende mit einem konisch zulaufenden eisernen Schuh B und einem Querriegel C zum Auflegen des Ringes und zum Auftreten versehen ist, gesteckt. Man nennt diese Stäbe Kettenstäbe.

Znm Bezeichnen der Endpunkte der Kettenzüge dienen 10 Markierstäbchen (Kettennägel) von Eisen, D, oder von Holz, E, die an eisernen Haken oder in ledernen Köchern, an Tragriemen aufbewahrt werden.

Die in Fig. 88 u. 89 dargestellten Theile der Mefskette sind im Drittel der wahren Gröfse dargestellt.

Fig. 89.



§. 202.

3. Die Ruthenschnur.

Diese Mefsschnur unterscheidet sich von der Mefskette besonders dadurch, dafs die einzelnen, durch Ringe mit einander verbundenen Glieder aus zwei- oder dreifachem, dünnen Messingdraht zusammengedreht und deren halbe und ganze Ruthen durch gröfsere mit Wirbeln versehene Ringe bezeichnet sind. An den Enden enthält sie ebenfalls gröfsere Ringe mit Wirbeln zur Aufnahme zweier Stäbe. Ihrer gröfseren Leichtigkeit wegen gewährt sie auf sehr unebenem Boden und bei der Mefsung von Linien an steilen Bergabhängen oder auf einem Boden mit vielem Gestrüpp vor der Mefskette einen Vortheil, da sie viel bequemer zu einer horizontalen Linie sich ausspannen läfst.

Die Prüfung und Berichtigung der Mefskette.

§. 203.

Beim längeren Gebrauch der Mefskette wird durch das Verbiegen oder das Ausdehnen der Haken, durch das Ausschleifen der Ringe und Wirbel und durch das Verbiegen der Glieder ihre Länge sich theils verkürzen, theils verlängern, weshalb sie vor dem jedesmaligen Gebrauch zu prüfen und nöthigenfalls zu berichtigen ist.

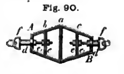
Zu diesem Zwecke mifst man auf einem sorgfältig planierten Boden mittelst einer Mefschnur eine Länge von etwas über 5 Ruthen ab,

schlägt in den Anfangspunkt, und durch Anlegung eines Ruthenstabes in Entfernungen von 1 Ruthe, starke Pfähle mit quadratischen Kopfflächen und bemerkt auf letzteren durch genaue Verschiebung einer vollkommen richtigen, nach Zehntelruthen eingetheilten Normalruthe die Endpunkte der Ruthen durch scharfe Einschnitte oder durch Markierung auf Blechen, die auf den Pfählen befestigt sind. Vor den Einflüfsen der Witterung sind die Pfähle durch übergelegte Stülpen oder Dächer von Holz zu sichern.

Nachdem nun alle Haken und Glieder der Mefskette sorgfältig gerade gebogen sind und die Kette ganz ausgespannt ist, untersucht man zunächst, ob die Länge jeder Ruthe mit den auf den Pfählen befindlichen Marken genau übereinstimmt und somit auch die Länge der Mefskette richtig ist. Die Länge der Zehntelruthen prüft man nach der Eintheilung auf der Normalruthe. Geringe Unrichtigkeiten werden durch Biegen der Haken, gröfsere durch Einsetzen neuer Glieder ausgeglichen.

Zu der Berichtigung der einzelnen Ruthenlängen dient die in Fig. 90 dargestellte, von Berlin*) angegebene Construction der Ruthenwirbel. Aufser dem mittleren Querriegel a enthält der sechseckige, metallene Rahmen AB noch einen Querriegel b, c auf jeder Seite des ersteren. Durch die Endstücke A, B, welche sich in ihrer Mitte zu einer Scheibe ausdehnen, geht ein vierkantiger verschiebbarer Bolzen d, d, der in Schraubengewinde ausläuft und durch die Muttern e, e und Gegenmuttern e_1, e_1 in A und B verstellbar ist. In den in den Wirbelring f, f eingehängten Ring treten die Haken der Glieder. Durch diese Einrichtung kann zwar den einzelnen Ruthen auf eine bequeme Weise die richtige Länge ertheilt werden, indessen ist doch nicht zu läugnen, dafs durch die Möglichkeit des Lösens der Muttern oder Gegenmuttern die Mefskette leichter einer Wandelbarkeit unterworfen ist.

Fig. 90.



Bei einigen Mefskettten ist eine Berichtigung nur an einem der Endglieder, also eine solche nur an der ganzen Länge gestattet.

Verschieden von der Berlin'schen Correctionsvorrichtung ist die von Ertel angewandte, welche in Bauernfeind's Vermefsungskunde 2. Aufl. S. 270 dargestellt ist. Das Correctionsglied besteht nämlich aus zwei Theilen, von denen der eine zwei feste Ansätze enthält, der andere aber in ein Schraubengewinde ausläuft, dessen Mutter im Endansatze sich befindet, während der andere nur die Durchbohrung für das Glied enthält. Durch eine vorgesetzte Gegenmutter kann letzteres dann gehörig festgestellt werden.

---

*) Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. IV. Greifswald 1844.

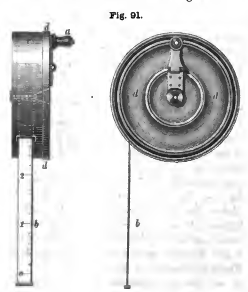
§. 204.

4. Das Mefsband.

Das **Mefsband** ist ein etwa $^3/_4$ Zoll breites leinenes Band, welches längere Zeit in Leinölfirnifs gelegen hat und daranf in Wachs gesotten ist, um es der Einwirkung der Feuchtigkeit möglichst zu entziehen. Es ist meistens in Fufse und Zolle nach dem Duodecimalmafs eingetheilt, da man sich desselben fast nur bei der Mefsung von Baulichkeiten bedient, kann aber auch jede andere Eintheilung erhalten.

In Fig. 91 ist ein Mefsband nebst Kapsel zum Auf- und Abwickeln im Drittel natürlicher Gröfse dargestellt. Die Trommel *c* nimmt auf einem im Innern drehbaren Cylinder das Band *b* auf, indem mittelst der an der Scheibe *d d* befindlichen Kurbel *a* die Scheibe und der daran befestigte Cylinder in drehende Bewegung versetzt werden, wodurch das Band sich aufwickelt.

Fig. 91.



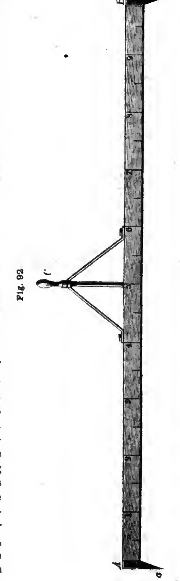
Eine ähnliche Einrichtung hat die **Mefsschnur**, eine 5 bis 10 Ruthen lange und etwa 1 bis 2 Linien dicke Schnur von Hanf, ebenfalls in Oel und Wachs gesotten. Sie wird zweckmäfsig zum Kenntlichmachen der Richtungen gerader Linien, deren Länge durch hölzerne Mefsstäbe (§. 200) bestimmt werden soll, angewandt.

§. 205.

5. Der Feldzirkel.

Der in Fig. 92 dargestellte Feldzirkel bildet eine in Zehntel- und Hundertstelruthen eingetheilte Latte *A B* von der Länge einer Ruthe, an deren Enden zwei eiserne Spitzen *a*, *b* in normaler Richtung gegen die Latte befestigt sind und welcher durch den in seiner Mitte angebrachten Handgriff *C* auf dem Felde in derselben Art gebraucht wird, wie der

Handzirkel beim Abmefsen der Längen auf dem Papiere. Er wird meistens nur zum Mefsen der Ordinaten der krummlinichten Begränzungen oder Baulichkeiten angewandt, wozu aber in vielen Fällen nur ein eine halbe Ruthe langer Mefsstab mit derselben Eintheilung (der Ueberschläger) dient, welcher flach auf den Boden gelegt wird. Hin und wieder wird der Feldzirkel auch Statt der Mefskette zur Bestimmung der Längen der Linien bei flüchtigen Aufnahmen benutzt, wenn man sich mit der geringen Genauigkeit von etwa 1 : 500 begnügen darf.


Fig. 92

C. Die Distanzmefser.

§. 206.

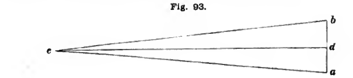
Unter Distanzmefsern versteht man im Allgemeinen die Mefsinstrumente, mittelst welcher die Entfernung zweier Punkte, ohne Anlegung eines natürlichen Mafsstabes, von einander unmittelbar dadurch zu bestimmen ist, dafs, wenn der Apparat in dem einen Endpunkte aufgestellt und damit auf den anderen gerichtet wird, die Entfernung entweder unmittelbar abgelesen oder durch einfache Rechnung ermittelt werden kann. Für einen besonderen Fall ist die Möglichkeit der Distanzmefsung in dem angegebenen Sinne schon im §. 125 angegeben; es mag aber jetzt noch bemerkt werden, dafs sie im Allgemeinen darauf beruht, die zu mefsende Linie noch mit zwei anderen zu einem gleichschenklichten oder rechtwinklichten Dreiecke zu verbinden, worin in dem ersteren der Winkel an der Spitze oder an der Basis, oder in dem anderen der eine der schiefen

Winkel entweder dargestellt wird oder als constant gegeben ist, um durch ihn aus der bekannten Basis des gleichschenklichten oder der kürzeren Kathete des rechtwinklichten Dreiecks, als Standlinie, auf die Länge des Höhenperpendikels oder der längeren Kathete beziehungsweise zu schliefsen.

Bei einzelnen Distanzmefsern dient der im Endpunkte der zu bestimmenden Linie befindliche natürliche Gegenstand selbst zum Einrichten oder Einvisieren; bei anderen mufs ihm noch eine schon im §. 128 erwähnte Distanzlatte, die entweder ihrer ganzen Länge nach eine auf den Distanzmefser bezogene Eintheilung enthält, oder auf welcher zwei ebenfalls auf den Distanzmefser bezogene fixe Punkte markiert sind, hinzugefügt werden. Obgleich es nicht an Versuchen gefehlt hat, Werkzeuge zu ersinnen, durch welche die Distanz zwischen zwei gegebenen Punkten ohne Zuziehung einer Distanzlatte bestimmt werden soll, so ist es doch bis jetzt nicht gelungen, sie so zu construieren, dafs sie die gesuchte Distanz mit derselben Genauigkeit geben, welche die mit Distanzlatten versehenen Distanzmefser gestatten.

Bezeichnet in Fig. 93 *abc* das erwähnte gleichschenklichte Dreieck, so ist bei den mit Fernröhren versehenen Distanzmefsern, welche eigentlich allein auf diesen Namen Anspruch machen können, der Standpunkt

Fig. 93.



des Instruments in der Spitze *c* desselben; wird dabei nun der daselbst gebildete Winkel als constant angenommen, so wird mit *ad* (oder *bd*) sich auch *cd* ändern, wenn dagegen *ad* constant bleibt, so wird *cd* mit dem Winkel *c* sich ändern. Hierauf beruhen sowohl die schon früher beschriebenen distanzmefsenden Fernröhre der Kippregel des Mefstisches, als auch die hier noch zu erwähnenden Distanzmefser, sowie der Diastimeter von Romershausen.

Wird in dem rechtwinklichten Dreieck *acd* der Standpunkt in *d* genommen, und sieht man die kürzere Kathete *ad* als constant an, so beruht darauf sowohl das von Pacceco ab Ucedos erfundene Pantometrum, als auch der von Netto*) unter dem Namen des Branderschen Distanzmefsers erwähnte Apparat.

*) F. W. Netto's Handbuch der gesammten Vermefsungskunde 1. Band, S. 213. Berlin, 1820. Daselbst ist auch der Diastimeter und das Pantometrum beschrieben.

Bei dem Pantometrum von Pacceco haben zwei Fernröhre einen constanten Abstand von 4 oder 5 Fufs. Nachdem sie beide auf einen sehr entfernten Gegenstand gerichtet, also parallel gestellt sind, gestattet das eine eine Drehung nach einem gegebenen Object und die Mefsung dieses Drehungswinkels α, woraus dann dc sich ergiebt. Der Brander'sche Distanzmefser hat ebenfalls eine 5 Fufs lange Standlinie, um welche Länge zwei vor den Objectiven zweier Fernröhre befindliche und unter 45 Grad gegen einander geneigte Metallspiegel von einander abstehen. Bei dem Distanzmefser von Meyer*) wird der Winkel α als constant angenommen und aus diesem, sowie aus der durch Abschreiten bestimmten Kathete ad die Länge cd ermittelt.

§. 207.

Aufser den oben beschriebenen Distanzmefsern mit festen und verstellbaren Fäden, von welchen Fig. 94 die Einrichtung mit verstellbaren Fäden im Verticaldurchschnitt darstellt, mag hier zunächst noch der

Fig. 94.

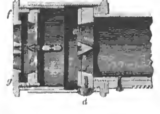


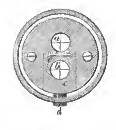
Reichenbach'sche Distanzmefser

seine Stelle finden, von welchem in Fig. 95 ein Längendurchschnitt des Vordertheils der Ocularröhre und ein Querschnitt der Fadenkreuzplatte in natürlicher Gröfse dargestellt ist. Derselbe unterscheidet sich im Wesentlichen dadurch von den gewöhnlichen Distanzmefsern, dafs in der Ocularröhre zwei senkrecht über einander in einer Ebene liegende, aber von einander getrennte Fadenkreuze angebracht sind. Das obere a befindet sich auf der Fadenkreuzplatte, das untere b aber auf einer anderen durchbohrten Platte c, welche sich in dem Ringe der ersteren in senkrechter Richtung verschieben läfst.

Fig. 95.







*) Beschreibung eines neuen Entfernungsmefsers zur Anwendung beim Aufnehmen und Recognosciren. Berlin, 1837.

Zu dieser Verschiebung dient die durch die Ocularröhre gehende Schraube *d* und eine plattenförmige Feder *e*, welche in der Höhlung des erwähnten Ringes angebracht ist. Zu jedem der Fadenkreuze gehört eine Ocularlinse α und β, deren Achsen selbstverständlich mit der geometrischen Achse des Fernrohrs parallel sind. Die Ocularplatte *f g* läfst sich durch das daran befindliche Schraubengewinde so weit verstellen, dafs die beiden Fadenkreuze dem Auge des Beobachters ganz deutlich erscheinen.

Anmerkung. Eine ausführliche Beschreibung des Reichenbach'schen Distanzmefsers findet sich aufser in Bauernfeind's Elementen der Vermefsungskunde, u. a. in Dingler's polytechnischem Journal, Band 116, S. 29, vom Professor G. Decher. Ueber einige andere Distanzmefser vgl. m. H. g. I. S. 594 u. f.

Zweite Abtheilung.

Die geometrischen Aufnahmen mittelst der in der ersten Abtheilung beschriebenen Mefs-Apparate.

§. 208.

Schon im §. 3 ist auf den Unterschied der Horizontal- und Vertical-Aufnahmen und im §. 6 auf die Mannigfaltigkeit der Anforderungen, welche von verschiedenen Seiten an die geometrischen Aufnahmen gestellt werden können, aufmerksam gemacht. Auch ist dort bemerkt, dafs vorzugsweise diejenigen Aufgaben zur Lösnng kommen sollen, welche die Staatsverwaltung in technischer Beziehung an die Wifsenschaft stellt, so wie, dafs die militärischen, markscheiderischen und nautischen Mefsungen hier nicht berücksichtigt werden sollen.

Aufser den eigentlichen Aufnahmen kommt es aber in einzelnen Fällen noch darauf an, die durch unmittelbare oder mittelbare Mefsungen erhaltenen, oder durch Construction dargestellten Punkte und Linien so in das Terrain wieder zu übertragen, dafs ihre auf einer gedachten Horizontal- oder Verticalebene gebildeten Projectionen dem vorhandenen Bilde genau entsprechen. Diese Operationen, welche aber besonders nur in einzelnen Zweigen der praktischen Geometrie und vorzugsweise bei Linienmefsungen zur Anwendung kommen, bezeichnet man mit dem Worte Abstecken. Wo es gestattet ist, soll letztere Operation mit den Aufnahmen verbunden werden.

Erster Abschnitt.

Gebrauch der Winkelmefs-Apparate zur unmittelbaren Mefsung der Winkel.

I. Die terrestrischen Richtobjecte für Winkelmefsungen.

1. Die künstlichen Signale von Holz.

§. 209.

Die zu Winkelmefsungen dienenden Richtobjecte sind entweder schon durch natürliche Gegenstände gegeben, wie Thurmspitzen, hohe

Schornsteine, Wetterfahnen und Schornsteine auf Gebäuden u. dgl., oder sie sind künstlich herzustellen. Je nachdem letztere zu gröfseren oder kleineren Mefsungen auf der Erdoberfläche, oder bei den unterirdischen Mefsungen des Markscheiders gebraucht werden sollen, sind sie sehr verschieden. Nur von den auf der Erdoberfläche anzuwendenden Richtobjecten soll hier die Rede sein.

§. 210.

Ein künstliches Signal, wie es bei der Aufnahme eines trigonometrischen Dreiecksnetzes zur Anwendung kommen kann, besteht in einem cylindrischen, senkrecht aufgerichteten Visierbalken, der von vier, eine Pyramide bildenden, Stützen getragen wird. Letztere sind in einer aus zwei starken Balken zusammengesetzten Kreuzschwelle befestigt, welche auf fünf ebenfalls hinreichend starken, in die Erde gerammten Pfosten ruht. Die Dimensionen dieser Signale richten sich selbstverständlich nach der Entfernung, in der sie gesehen werden sollen. Damit sie deutlich auf dem hinterliegenden Himmel projiciert erscheinen, sind sie schwarz angestrichen, auch wohl die obere Hälfte der Pyramide mit Brettern gedeckt, so dafs die halbe Höhe dieser bedeckten abgestumpften Pyramide bei der Mefsung der Verticalwinkel als Richtobject genommen werden kann.

§. 211.

Für kleinere Entfernungen dienen zu Signalen auch senkrecht aufgerichtete Baumstämme von 20 bis 30 Fufs Höhe, die durch seitliche Streben in dem Boden befestigt sind.

Auch quadratische Tafeln von Holz von etwa 2 Fufs Seite, die auf einem mit Stellschrauben versehenen Dreifufs von Eisen oder Holz angebracht und in der Büchse desselben zu drehen sind, können zweckmäfsig als Signale dienen. Die Tafeln sind schwarz angestrichen bis auf einen in ihrer Mitte angebrachten weifsen Streifen von einigen Zoll Breite.

Will man einzeln stehende Gebäude, die keine Schornsteine haben, als untergeordnete Dreieckspunkte benutzen, so können 10 bis 20 Fufs lange und 4 bis 6 Zoll dicke Stämme benutzt werden, die man an den Kehlbalken des Giebels oder der Fette der First befestigt. Das obere Ende trägt eine Blechkappe mit 2 sich normal kreuzenden, schwarz angestrichenen Blechtafeln, welche in senkrechter Richtung in der Mitte einen, 6 bis 8 Zoll breiten, weifsen Anstrich enthalten, den auch die Kappe führt.

§. 212.

Für die kleinsten Detailaufnahmen wendet man zu Signalen die sogen. Flucht- oder Absteckstäbe, Baken an, cylindrische Stäbe,

am zweckmäfsigsten junge gezogene Eschen, von 8 bis 10 Fufs Höhe und etwa $1\frac{1}{2}$ Zoll Dicke; zu den Winkel- oder Dreieckspunkten aber starke eichene oder buchene Pfähle mit quadratischer Oberfläche und 2 bis 3 Zoll Seite und 1 bis $1\frac{1}{2}$ Fufs Höhe. Bei den letzteren ist der Winkelpunkt auf ihrer Kopffläche durch den Durchschnitt eines eingerifsenen Kreuzes bezeichnet. Zum befseren Erkennen in der Ferne werden die Baken ihrer Länge nach abwechselnd mit schwarzer (oder rother) und weifser Oelfarbe angestrichen und zur leichteren Auffindung in gröfserer Distanz mit einem kleinen Fähnchen versehen, das aus rothem und weifsem wollenen Zeuge verfertigt ist und an einem Stiele in dem oberen Ende der Bake befestigt werden kann. Durch einen am unteren Ende befindlichen konischen Schuh von Eisen können sie dicht an dem Dreieckspfahle in dem Erdboden senkrecht befestigt werden.

Auf hartem oder felsigem Boden und besonders auf gepflasterten Strafsen eignet sich zweckmäfsiger das folgende Signal. Ein parallelepipedischer Stab von 12 bis 20 Fufs Höhe ist in einem starken cylindrischen Fufs befestigt und endigt unter letzterem in eine konische Spitze. Durch drei Holzschrauben, die durch drei von dem Cylinder auslaufende Arme hindurchgehen, kann der Stab mittelst eines an seiner einen Seitenfläche angebrachten Lothes lothrecht und zugleich die Spitze normal über den Dreieckspfahl gestellt werden. Damit der Stab auf einem verschiedenen Hintergrunde sich immer deutlich projiciert, ist die eine der Seitenebenen weifs, eine zweite schwarz und die beiden anderen abwechselnd weifs und schwarz mit Oelfarbe angestrichen.

Zeichnungen der vorhin erwähnten Signale findet man in H. g. I. Figg. 125—128.

2. Die Heliotrope*).

§. 213.

Abgesehen von den Schwierigkeiten, mit welchen die Erbauung gröfserer Signale meistens verbunden ist, können sie theils wegen der ungleichen Beleuchtung, theils bei getrübter Heiterkeit der unteren Luftschichten nicht als so präcise bestimmte Punkte gelten, wie es die jetzige Vollkommenheit der geometrischen Mefswerkzeuge fordert. Demselben Uebelstande sind auch die Spitzen der Thürme ausgesetzt. Selbst bei den hin und wieder angewandten Signalen durch Lampen mit parabolischen Hohlspiegeln bei Nacht, ist der dadurch erreichte Vortheil verhältnifsmäfsig nur gering, da ihre Beobachtung durch Zufall leicht vereitelt werden kann und sie auch nur in geringeren Entfernungen deutlich wahrgenommen werden können. Deshalb war es besonders für

*) Von ἥλιος, die Sonne, und τρέπω, ich wende.

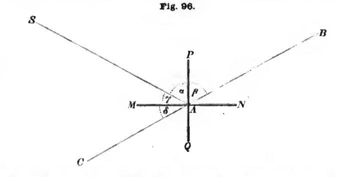
die gröfseren Mefsungen wichtig, durch den von Gaufs im Jahre 1821 bei der Gradmefsung im vormaligen Königreich Hannover erfundenen Heliotrop ein Mittel zu besitzen, das reflectierte Sonnenlicht als Signal anwenden und dem entfernten Beobachter zuwerfen zu können. Da derselbe auch bei kleineren Dreiecksnetzen seine Anwendung finden kann, so soll die Beschreibung desselben hier schon folgen.

1. Der Gaufs'sche Heliotrop.

§. 214.

Die Construction und der Gebrauch des Gaufs'schen Heliotrops stützt sich auf den katoptrischen Satz, dafs wenn von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte Lichtstrahlen auf zwei, auf einander normal stehende Spiegel fallen, die Lichtstrahlen dann nach entgegengesetzten Richtungen von den Spiegeln reflectiert werden. Denn ist in Fig. 96 SA ein auf den Spiegel MN fallender Lichtstrahl, so ist, wenn $\alpha = \beta$ ist, AB der für MN

Fig. 96.



reflectierte Strahl. Eben so ist bei demselben Einfallstrahle SA für den Spiegel PQ, AC der reflectierte Strahl, wenn $\gamma = \delta$ ist. Es ist daher auch

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 90^0,$$

folglich

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^0,$$

d. h. AB und AC liegen in einer geraden Linie.

In Fig. 97 ist ein Gaufs'scher Heliotrop im Drittel der natürlichen Gröfse in der Seitenansicht, in Fig. 98 das Spiegelsystem mit einem Theile des Objectivrohrs im Grundrifs dargestellt. Die Grundlage des Instruments bildet der mit Stellschrauben versehene Dreifufs AA mit der durchbohrten Säule B*). In letzterer findet sich ein Stahlzapfen,

*) Bei den ältesten Constructionen war die Säule nicht durchbohrt.

Fig. 97.

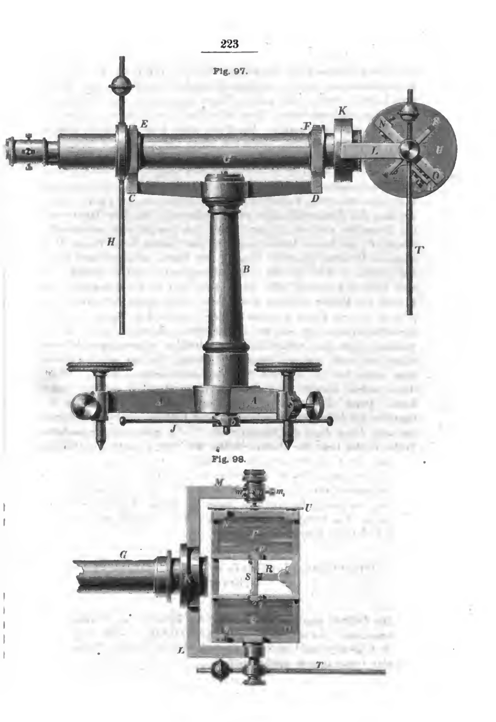


Fig. 98.

mit dessen oberem Ende der massive Träger $CDEF$ für das mit zwei glockenmetallenen Ringen versehene Fernrohr G verbunden ist. Durch zwei Deckel, welche sich auf die Ringe legen, wird das Fernrohr in seinen Lagern festgehalten, kann aber durch den Führungsstift H um seine Achse gedreht werden Der Stahlzapfen trägt an seinem unteren Ende, unter dem Dreifufs, einen mit einem Führungsstift J versehenen Cylinder b, durch dessen Umdrehung mittelst des Führungsstifts dem Träger mit dem Fernrohr eine Horizontalbewegung ertheilt werden kann. Durch die erwähnten Drehungen und die Umdrehung der Stellschrauben kann man daher das Fadenkreuz des Fernrohrs auf den Punkt richten, welchem das Sonnenbild zugeworfen werden soll. An dem Objectivende des Fernrohrs sitzt ein in zwei Arme sich erweiternder cylindrischer Ansatz K, an dessen Armen wiederum zwei andere Arme L und M in normaler Richtung gegen die ersteren sich finden, zwischen welchen der Spiegelrahmen NO, der die beiden Planspiegel P und Q enthält, um eine Achse sich drehen läfst. Die Spiegel sind an der Hinterfläche mit Platten und Federn verwahrt und können durch kleine Stellschräubchen p, q, q_1 in eine Ebene gebracht werden. Durch diese Spiegel soll das Sonnenlicht nach dem entfernten Beobachter reflectiert werden. Rechtwinklicht gegen diese Spiegel ist der aus dunklem oder mattgeschliffenem Glase bestehende kleinere Spiegel S befestigt, der an seiner hinteren Seite einen Arm R mit zwei Correctionsschräubchen s und s_1 enthält, durch welche derselbe rechtwinklicht gegen P und Q gestellt werden kann. Durch diesen Spiegel wird dem am Heliotrop stehenden Beobachter das Sonnenbild zugeworfen. Zur Drehung des Spiegelrahmens um seine Achse dient der Führungsstift T. Um einen etwa vorhandenen Fehler in der Lage der Drehungsachse der Spiegel gegen die Collimationslinie des Fernrohrs verbefsern zu können, liegt das eine Ende der ersteren Drehungsachse in der Büchse m des Armes M, durch welche drei Stellschräubchen (von denen aber in der Figur nur zwei sichtbar sind) m_1, m_1 gegen die erwähnte Drehachse treten. Endlich bezeichnet U eine an dem Spiegelrahmen befestigte flache Scheibe zur richtigen Stellung des Spiegelsystems.

Die Berichtigung des Gaufs'schen Heliotrops und sein Gebrauch.

§. 215.

Die Prüfung besteht, was darüber der Erfinder des Werkzeugs in Schumacher's astronomischen Nachrichten V. 329 augegeben hat, in folgenden fünf Untersuchungen, die so, wie sie hier folgen, nach einander vorgenommen werden müfsen.

1. Die Collimationslinie des Fernrohrs mufs mit seiner Umdrehungsachse zusammenfallen.

Nachdem man das Fadenkreuz an die richtige Stelle in der Ocularröhre gebracht, auch das Spiegelsystem so gedreht hat, dafs der kleine Spiegel S in der Verlängerung der Umdrehungsachse des Fernrohrs liegt, richtet man das Fadenkreuz auf ein deutlich markiertes Object und dreht das Fernrohr in seinen Lagern um 180°. Trifft dann das Bild des Objects mit dem Kreuzungspunkt zusammen, so fallen die erwähnten Linien in eine Gerade. Bei einer Abweichung aber wird die Hälfte derselben an den Stellschräubchen des Fadenkreuzes verbefsert und das Verfahren so lange wiederholt, bis keine Abweichung mehr sich zeigt.

2. Die Collimationslinie des Fernrohrs mufs gegen die Umdrehungsachse des Spiegelrahmens normal stehen.

Man stelle die Umdrehungsachse so nach dem Augenmafse senkrecht, dafs zugleich der Führungsstift T nach Unten gerichtet und mit der Drehachse oder der Collimationslinie des Fernrohrs parallel ist. Dann bringe man das Fernrohr über den einen Arm des Dreifufses, hänge an den Stift eine Röhrenlibelle und bringe ihre Luftblase durch die Stellschraube zum Einspielen. Dreht man nun den Stift um 180° und legt das Fernrohr in seinen Lagern um, und spielt die Libelle wieder ein, so haben beide Achsen, unter der Voraussetzung, dafs die Durchmefser der glockenmetallenen Ringe gleich sind, eine normale Lage gegen einander. Eine Abweichung wird aber zur Hälfte an der erwähnten Stellschraube des Dreifufses, zur andern Hälfte an den Correctionsschräubchen m_1 m_1 verbefsert. Auch diefs Verfahren wird so lange wiederholt, bis keine Abweichung mehr wahrzunehmen ist.

Fig. 99.

3. Die Ebenen der Spiegel P und Q müfsen ihrer Drehachse parallel sein.

Man stelle zwei mit Fadenkreuzen versehene Fernröhre A und B in Fig. 99 so auf, dafs ihre nach kaum hundert Fufs von einander abstehenden Objecten P und Q gerichteten Visierlinien nahe in einer Ebene liegen, schraube den Ansatz k (Fig. 97), der den Spiegelrahmen trägt, ab und gebe demselben dergestalt auf einem Würfel oder dergleichen eine feste Unterlage, dafs die Drehachse der Spiegel ebenfalls nahe in der Ebene

und zugleich in dem Durchschnitt der Visierlinien liegt und auch den von ihnen gebildeten Winkel halbiert. Den zu prüfenden Spiegel C bringe man nun normal auf jene Ebene und bewirke durch allmähliche Drehungen am Spiegel und Verrückungen der Unterlage, dafs das reflectierte Bild des links liegenden Objects P auch am Fadenkreuz des links liegenden Fernrohrs erscheint, drehe darauf den Spiegel um 180° und untersuche die Deckung des anderen Objects Q mit dem Fadenkreuze des anderen Fernrohrs B. Kann dann die gefundene Abweichung nicht lediglich durch Drehung des Spiegels um seine Drehachse erreicht werden, so verbefsert man ihre Hälfte an den Correctionsschrauben q und q_1. Diefs Verfahren gründet sich auf den Satz, dafs eine Ebene durch eine halbe Umdrehung um eine Gerade als Achse nur dann eine parallele, aber entgegengesetzte Stellung zu der in der ersten Lage annehmen wird, wenn sie der Achse parallel war.

4. Die beiden Theile P und Q des grofsen Spiegels müfsen in einer Ebene liegen.

Diese Prüfung nimmt man am einfachsten dadurch vor, dafs man die Drehachse des Spiegels einer seitwärts liegenden Geraden, z. B. der Kante eines Gebäudes u. dgl. ungefähr parallel stellt und untersucht, ob die reflectierten Bilder derselben in P und Q in einer Geraden liegen. Die etwa nöthige Correction geschieht dann an der Correctionsschraube p.

5. Die Ebene des kleinen Spiegels mufs zur Ebene des grofsen normal stehen.

Man stellt den Heliotrop auf und ein mit einem Fadenkreuz versehenes Fernrohr so demselben gegenüber, dafs die Visierlinie des Hülfsfernrohrs etwa um die halbe Entfernung der Mitte der Spiegel P und Q höher steht, als die Visierlinie des Heliotropenfernrohrs und dafs zugleich beide Visierlinien parallel sind. Diefs erreicht man dadurch, dafs man zuerst das Heliotropenfernrohr auf ein entferntes Object richtet, auf diefs das Hülfsfernrohr in der angegebenen Höhe einstellt und nun das Heliotropenfernrohr in seinen Lagern umlegt. Darauf stellt man die Drehachse des Spiegelsystems senkrecht und dreht letzteres so lange, bis ein deutlich markierter Punkt durch Reflexion im kleinen Spiegel in der Achse des Heliotropenfernrohrs erscheint. Sind nun die Ebenen der beiden Spiegel wirklich normal, so mufs das von der oberen Hälfte des grofsen Spiegels reflectierte Bild desselben Objects in die Visierlinie des Hülfsfernrohrs fallen. Die Berichtigung einer etwa gefundenen Abweichung geschieht dann durch die beiden Correctionsschräubchen s und s_1 in Fig. 97.

Dreht man darauf nochmals den grofsen Spiegel um 180° um seine Achse, so dafs die andere Hälfte desselben Oben zu liegen kommt

und zeigt sich dann das Bild eines auf der entgegengesetzten Seite des Spiegels liegenden Gegenstandes wieder an der Visierlinie des Hülfsfernrohrs, so wird dadurch nochmals die in 4. angegebene Forderung erfüllt.

Soll nun mit dem Gaufs'schen Heliotrop das Sonnenbild dem entfernten Beobachter zugeworfen werden, so richtet man das Fadenkreuz des Fernrohrs auf dessen Standort, dreht mittelst des Stifts *H* das Fernrohr um seine Achse, bis der von der Scheibe *U* herrührende Schatten eine schmale Linie bildet und dreht darauf durch den Stift *T* das Spiegelsystem um seine Achse, bis das im kleinen Spiegel *S* entstandene Sonnenbild an dem Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes liegt. Dann wird der entfernte Beobachter in dem grofsen Spiegel das reflectierte Sonnenbild wahrnehmen. Zu dieser Einstellung wird das Sonnenglas *g* (Fig. 97) vor die Mitte des Oculars geschoben.

§. 216.

Da die Anschaffung einer gröfseren Anzahl von Heliotropen bei einer gröfseren Vermefsung sehr bedeutende Ausgaben veranlafst, so wird durch die Möglichkeit der Verbindung des Spiegelsystems mit dem Fernrohre des Theodoliths, oder auch mit einem beliebigen anderen Fernrohre, wie diefs nach der Angabe von Stierlin in Münster ausgeführt werden kann, eine allgemeinere Anwendung des für die Gradmefsungen so wichtigen Heliotropen möglich gemacht.

Die erwähnte Verbindung fordert nur ein Gehäuse, welches von zwei ungleichen Ringen gebildet und durch eine ringförmige Platte, welche von dem Gehäuse abwärts in einen einfachen Ring ausläuft, einseitig verschlofsen ist; aufserdem noch drei Stellschrauben, welche in dem äufseren Ringe ihre Muttern haben und drei prismatische Stücke, die in Einschnitten des inneren Rings sich finden, gegen den äufseren Mantel des Objectivrohrs des anzuwendenden Fernrohrs treten lafsen.

Einen Stierlin'schen Hülfsheliotrop findet der Leser dargestellt und beschrieben in H. g. I. §. 286.

2. Der Steinheil'sche Heliotrop.

§. 217.

Eine noch gröfsere Einfachheit bietet der vom Professor Steinheil in München construierte Heliotrop dar, bei dessen Gebrauch indessen vorausgesetzt wird, dafs man den Richtpunkt, nach welchem das Sonnenbild reflectiert werden soll, mit freiem Auge sehen kann. Der Erfinder des Werkzeugs ging bei der Construction desselben von der Idee aus, dem Spiegel die Einrichtuug zu geben, dafs er von der

Sonne zwei Bilder zeige, von denen das eine nach dem Richtpunkte geworfen werden, das andere weniger intensive nach der entgegengesetzten Richtung reflectiert, und deshalb zur Orientierung des ersten dienen soll. Das weniger intensive Bild wird dadurch erzeugt, dafs die Sonnenstrahlen durch einen in der Mitte des Spiegels befindlichen kleinen, nicht foliierten Kreis von etwa 1 Linie Durchmefser hindurchgehen, auf einen das Licht stark zerstreuenden Körper fallen, von der Rückseite der nicht foliierten Glasfläche wieder reflectiert und von dem Auge als eine matt erleuchtete Scheibe, etwa wie der Mond am Tage erscheint, wahrgenommen werden. An dem Werkzeuge ist daher ein Fernrohr entbehrlich, eignet sich aber auch nur für kleinere Entfernungen.

Fig. 100.

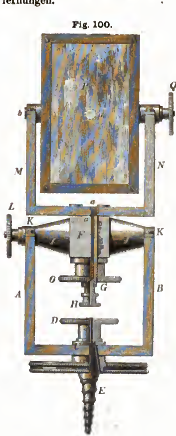


Fig. 100 stellt einen solchen Heliotrop in natürlicher Gröfse dar. *A B* ist ein Metallrahmen, der um die bei *C* befindliche Achse sich drehen läfst und durch die Mutter *D* festgestellt werden kann. Unterhalb desselben findet sich eine Holzschraube *E*, mittelst welcher das Werkzeug auf einem Stativ oder einem anderen feststehenden Gegenstande sich befestigen läfst. *F* ist ein cylindrisch ausgebohrter Würfel, der nach Unten einen hohlen cylindrischen Ansatz *G*, mit einem Gewinde auf der Aufsenfläche versehen, enthält. In ihn greift das Schräubchen *H*, in dessen oberes ausgehöhltes Ende ein das Licht stark zerstreuender Körper, z. B. ein Stückchen Kreide gelegt wird. *J J* sind abgestumpfte Kegel, die mit dem Würfel verbunden sind und in cylindrische Zapfen auslaufen, deren Pfannen auf *A* und *B* liegen und die durch Kappen gehalten werden. Um die Drehachse *K K* läfst sich der obere Theil des Instruments drehen und durch die Mutter *L* hemmen. Mit dem Würfel ist durch einen kleinen cylindrischen, ausgebohrten

Ansatz aa der Rahmen MN verbunden, der zugleich um aa gedreht und durch die Mutter O gegen den Würfel gehemmt werden kann. Dieser Rahmen trägt den um die Achse bb drehbaren Planspiegel P mit der nicht foliierten kreisförmigen Stelle p; die Fafsungsplatte des Spiegels aber hinter p ein eben so grofses kreisförmiges Loch zum Durchsehen. Durch die Mutter Q kann wieder die Drehung des Spiegels gehemmt werden. In der Mitte des unteren Theils des Rahmens endlich liegt eine Glaslinse, durch welche die durch die unbelegte Stelle p hindurchgehenden Sonnenstrahlen auf der in ihrem Brennpunkte liegenden Kreide ein Sonnenbild erzeugt, das von da auf die Glasfläche p zerstreut wird und von dieser durch Reflexion als ein weniger intensives Bild wahrgenommen werden kann.

Einer Prüfung bedarf der Heliotrop nicht, da beide Bilder der Sonne von derselben Ebene des Spiegels erzeugt werden. Hierauf beruht auch die Theorie des Instruments.

Der Gebrauch des Heliotrops ist folgender. Nachdem man denselben an der Stelle, von welcher das Sonnenlicht reflectiert werden soll, befestigt hat, dreht man den unteren Rahmen um die Achse C, dafs der Spiegel der Sonne zugekehrt ist, dreht ferner den oberen Rahmen um die Achse KK so weit, bis die Verlängerung der Achse aa die Sonne trifft. Wird alsdann der Spiegel um seine Achse bb, zugleich aber das ganze Werkzeug um C so weit gedreht, dafs die durch den Kreis p dringenden Sonnenstrahlen die Glaslinse treffen, was man leicht erkennen kann, so wird die Achse C durch Anziehung der Mutter D festgestellt. Hält man nun das Auge hinter den Kreis p, so sieht man das durch die Kreide und die Glaslinse erzeugte Sonnenbild als eine in der Luft schwebende helle runde Scheibe. Durch Drehung des Spiegels um seine Achse bb, und des Rahmens MN um aa, bringt man das fortwährend mit den Augen verfolgende matte Sonnenbild nach dem gegebenen Richtpunkte, auf welchem dann der dortige Beobachter das vom Spiegel P reflectierte Bild der Sonne wahrnehmen wird.

Indem man also mit dem Heliotrop aus dem Dreieckspunkte A, in welchem zugleich der Theodolith aufgestellt gedacht werden mufs, das Licht nach den Winkelpunkten B und C sendet, giebt man den daselbst stehenden Gehülfen den Richtpunkt A an, nach welchem sie ihre Heliotrope zu richten haben, um deren reflectierte Sonnenbilder als Signale bei der in A vorzunehmenden Winkelmefsung benutzen zu können.

3. Die Heliotrope von Baeyer und Bessel.

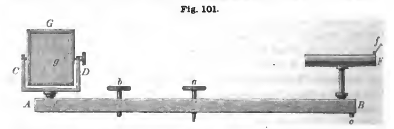
§. 218.

Baeyer wandte bei der preufsischen Küstenvermefsung aufser dem Gaufs'schen Heliotrop bei den weniger entfernten Punkten den in

Fig. 101 etwa im Viertel der natürlichen Gröfse dargestellten einfachen Apparat als Heliotrop an.

In der Mitte eines etwa 20 Zoll langen und einige Zoll breiten Brettes *AB* von gutem, trocknem Holz angefertigt und mit einem Oelanstrich versehen, ist eine Linie parallel den Längskanten gezogen, in deren Mitte eine Schraube *a* angebracht ist, mittelst welcher der Apparat auf dem Dreieckspunkte festgeschraubt wird. An jedem Ende des Brettes ist eine Metallplatte mit einer konischen Vertiefung in der genannten Linie eingelafsen, in welche ein Konus passt, der einerseits den Rahmen *CD* für den Spiegel, andrerseits eine Säule mit einer etwa $1\frac{1}{2}$ Zoll langen Metallröhre *F* trägt. Wie bei dem Steinheil'schen Heliotrop trägt der genannte Rahmen wieder einen Spiegel *G* mit einem in seiner Mitte nicht foliirten Kreise *g*; aufserdem ist hinter dem Mittelpunkte desselben in der Fafsungsplatte des Spiegels ein kleines rundes Loch angebracht, welches die Stelle eines Oculars vertritt. In der Achse der Röhre ist ein Fadenkreuz ausgespannt, dessen Durchschnitts-

Fig. 101.



punkt mit dem Mittelpunkte des Kreises *g* gleiche Höhe hat. An dem Ende der Röhre ist eine Metallklappe *f* angebracht, die auf der Innenseite mit weifsem Papier überzogen ist und durch welche die Röhre einerseits verschlofsen und geöffnet werden kann. Endlich ist *b* eine Schraube, mittelst welcher das Brett in einer Verticalebene auf- und niederbewegt werden kann, zu welchem Zwecke an dem Ende *B* unter dem Brette ein Paar Füfse *c* angebracht sind.

Soll der Heliotrop zum Signalisiren gebraucht werden, so bringt man das Auge hinter das Ocular und richtet, nach Oeffnung der Klappe *f*, durch Drehung des Lineals um die Schraube *a* und durch Anwendung der Schraube *b* das Fadenkreuz auf das Object, wohin das Sonnenlicht reflectiert werden soll. Alsdann schliefst man die Röhre mit der Klappe und bringt durch Drehung des Spiegels das Sonnenlicht so in die Röhre, dafs der runde Schatten, welcher von der nichtfoliierten Stelle gebildet wird, auf der Papierfläche der Klappe central mit dem Fadenkreuz erscheint. Dann sieht der auf dem Richtpunkte stehende Beobachter das von dem Spiegel reflectierte Sonnenlicht.

§. 219.

Von Bessel und Baeyer wurden bei der Gradmefsung in Ostpreufsen bei den weniger entfernten Dreieckspunkten fein polierte und versilberte Halbkugeln von Kupfer von 4 bis 8 Zoll Durchmefser zu Signalen angewandt, die so auf dem Beobachtungspfeiler angebracht wurden, dafs ein auf seiner Oberfläche einige Zoll hervortretender Metallcylinder in einem Loche der Kugel sich befand, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel ging und dessen Durchmefser dem des Cylinders gleich war. Dann diente der auf der Kugelfläche sich erzeugende helle Punkt für die entfernten Richtpunkte als Signal. Da aber der Ort des Lichtpunktes von dem Stande der Sonne und von der Beobachtungszeit abhängt, so mufs derselbe aus dem Stundenwinkel und der Declination der Sonne, aus der Polhöhe, dem Halbmefser der Kugel und der Entfernung vom Beobachter berechnet werden. Es zeigte sich das Sonnenlicht bei den gröfseren Halbkugeln in einer Entfernung von 5000 Toisen noch im Theodolithenfernrohr sichtbar. In Fig. 136 v. H. g. I. ist diefs Signal dargestellt.

Allgemeine Bemerkungen über das Heliotropenlicht.

§. 220.

Ohne Zweifel ist es demselben Umstande, bei welchem die beim Horizontalwinkelmefsen einvisierten Richtobjecte scheinbar bewegt erscheinen und die Winkelmefsung in den Vormittags- und frühen Nachmittagsstunden oft unmöglich machen, zuzuschreiben, dafs auch das Heliotropenlicht zu bestimmten Tageszeiten als ein mit unreinen, oft verwaschenen Umrissen begränzter Kreis von ungefähr 40 Sekunden Durchmefser erscheint, der in eine zitternde und selbst hüpfende Bewegung übergeht, ja zuweilen gar keinen Reflex erkennen läfst, obgleich die Richtung, aus welcher das Licht herkommt, die vollkommen richtige ist; zu anderen Zeiten dagegen, die den Abendstunden näher kommen, als ein scharf begränzter Kreis von etwa 10 Sekunden Durchmefser, ohne hüpfende oder zitternde Bewegung wahrzunehmen ist. Auf diese verschiedenen Erscheinungen macht auch Baeyer in seinem Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin aufmerksam und giebt daselbst auch an, dafs in der Nähe der Küste der Ostsee, in flachen Gegenden, überhaupt da, wo die Sonnenstrahlen nahe am Erdboden fortgehen, mehr oder weniger kurz vor dem Untergange der Sonne, abermals ein Zittern des Lichtkreises eintritt, und dieser auch zuweilen als ein hüpfender kleiner Lichtpunkt erscheint.

Das zu starke oder zu schwache Licht des Heliotropen verbefsert man dadurch, dafs man den Spiegel bald mehr, bald weniger verkleinert

oder vergröfsert, was durch Aufkleben von Papier oder Wiederwegnehmen desselben erreicht wird.

Uebrigens würde in der Praxis die wichtige Gaufs'sche Erfindung viel von ihren Vortheilen verlieren, wenn zwischen den gegenseitigen Beobachtern nicht zugleich eine Heliotropentelegraphie eingeführt würde, über welche dieselben sich vor dem Gebrauche der Heliotropen vereinigt haben müfsen. Sie besteht in einer bestimmten Zahl von taktmäfsig unterbrochenen Lichtblitzen, die man entweder mit dem Heliotropen selbst, oder mit einem Spiegelwerkzeuge dem zweiten Beobachter zusendet und die man ganz einfach durch sekundenlanges Zu- und Aufdecken des Spiegels erhält. Der Empfänger der Nachricht erwiedert in gleicher Art dieselbe Zahl der Lichtblitze, sobald er dieselben benutzen kann und will. Obgleich für das gewöhnliche Bedürfnifs höchstens acht bis zehn Zeichen ausreichen; so können doch sehr bequem auch die Zahlen von 10 an dadurch dargestellt werden, dafs man nach 10 eine Pause von etwa 30 Sekunden eintreten läfst, und daher die Zahl 4 nach der Pause die Zahl 14 bezeichnet.

II. Einflufs einiger Fehler der winkelmefsenden Werkzeuge auf die Mefsung der Horizontalwinkel.

1. Einflufs der Neigung der Umdrehungsachse des Fernrohrs.

§. 221.

Es sei in Fig. 102 $ADBV$ die Ebene des Limbuskreises, welche gegen den Horizont um den kleinen Winkel $AEH = i$ geneigt ist. Wird das über dem Mittelpunkte C gedachte Fernrohr, von welchem aber vorausgesetzt wird, dafs der Collimationsfehler desselben $= 0$ ist, auf das über dem Horizonte liegende Winkelobject O gerichtet, so würde der von seiner Collimationslinie beschriebene gröfste Kreis BOZ durch das Zenith Z gehen, wenn $i = 0$ wäre; da letzteres aber nicht der Fall ist, so wird die Collimationslinie einen anderen gröfsten Kreis DOQ beschreiben, so dafs arc. QZ ebenfalls $= i$ ist.

Bezeichnet nun V den Anfangspunkt der Theilung auf dem Limbus, so wird auf demselben, Statt des Bogens VB der Bogen $VD = a$ abgelesen, dabei also um den Bogen $BD = x$ gefehlt. Weil aber durch die bekannten mechanischen Hülfsmittel die Rotationsachse schon annähernd horizontal gestellt war, so darf i nur als ein Sekundenwerth betrachtet und daher

$$ZO = QO = z = \text{der Zenithdistanz des Objects } O,$$

folglich
$$BO = DO = 90^0 - z$$

gesetzt werden. In den beiden, bei Q und D rechtwinklicht sphärischen Dreiecken ZOQ und ODB ist nun

$$\sin O = \frac{\sin i}{\sin z} = \frac{\sin x}{\cos z},$$

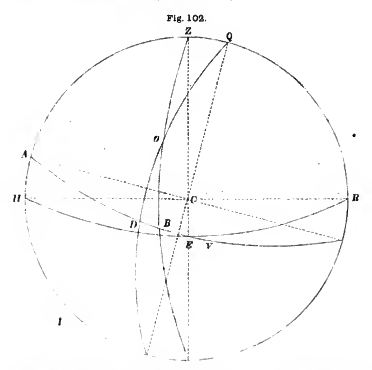
folglich $\sin x = \sin i \operatorname{cotg} z$,

oder, da x und i nur sehr kleine Winkel bezeichnen,

$$x = i \operatorname{cotg} z,$$

und daher die wahre Ablesung $= a - i \operatorname{cotg} z$.

Fig. 102.



Eben so würde nun bei der Einstellung auf ein zweites Object O_1, welches nach der fortlaufenden Theilung zu, also Rechts von O liegt, wenn dessen Zenithdistanz $= z_1$ und die Ablesung $= a_1$ ist,

die wahre Ablesung $= a_1 - i \operatorname{cotg} z_1$ sein.

Der Winkel zwischen den Objectiven O und O_1 ist daher

$$= (a_1 - a) - i (\operatorname{cotg} z_1 - \operatorname{cotg} z)$$

oder $= A_1 - i (\operatorname{cotg} z_1 - \operatorname{cotg} z)$.

Dreht man nun die Alhidade um 180^0 und schlägt das Fernrohr durch, so wird der gröfste Kreis QOD auf die entgegengesetzte Seite des Verticalkreises ZOB fallen und daher, wenn die beiden Ablesungen

durch α und α_1 bezeichnet werden, der Winkel zwischen den Objecten

$$= (\alpha_1 - \alpha) + i(\cot z_1 - \cot z),$$

oder

$$= A_2 + i(\cot z_1 - \cot z).$$

Der wahre Winkel A der Objecte O und O_1 ist demnach

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2},$$

so dafs daher der Fehler, welcher aus der geneigten Lage der Rotationsachse des Fernrohrs entsteht, durch das genommene arithmetische Mittel der Werthe des Winkels in beiden Lagen des Fernrohrs verschwindet.

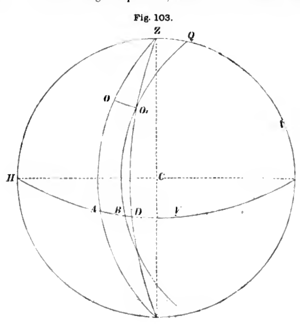
2. Einflufs des Collimationsfehlers des Fernrohrs.

§. 222.

Hierbei wird vorausgesetzt, dafs die Rotationsachse des Fernrohrs normal zur Verticalachse des Instruments steht.

Ist nun in Fig. 103 HAV der horizontale Limbuskreis, so würde die nach dem Object O gerichtete Collimationslinie den Verticalkreis ZOA beschreiben und daher der auf dem Horizontalkreise abgeschnittene Bogen VA der Einstellung entsprechen, wenn der Collimationsfehler $= 0$

Fig. 103.



wäre. Ist der Winkel der Rotationsachse mit der Collimationslinie, nach der Rechten zu, aber $= 90^0 + c$, so beschreibt letztere bei der Umdrehung des Fernrohrs den Mantel eines normalen Kegels, welcher auf der scheinbaren Himmelskugel einen kleinen Kreis $Q O_1 B$ abschneidet, dessen Abstand vom gröfsten Kreise $Z O A$, $B A = c$ ist, so dafs daher durch den vorhandenen Collimationsfehler die Einstellung durch den Bogen $V B = a$ dargestellt wird, als wenn das Object nicht in O, sondern in O_1, also im Verticalkreise $Z O_1 D$ sich befände. In dem sphärischen Dreieck $Z O O_1$, in welchem $O O_1 = A B = c$, $Z O = z$, der Winkel $Z O_1 O = 90^0$ ist und der Winkel $O Z O_1 = x$ sein mag, erhält man daher

$$\sin x = \frac{\sin c}{\sin z},$$

oder, da x und c wieder sehr kleine Winkel sind,

$$x = \frac{c}{\sin z}.$$

Es ist demnach die der Einstellung auf das Object O entsprechende wahre Ablesung

$$a + \frac{c}{\sin z}.$$

Dreht man nun die Alhidade des Azimuthalinstruments um 180^0 und schlägt das Fernrohr durch, so wird der kleine Kugelkreis $Q O_1 B$ auf die entgegengesetzte Seite des Verticalkreises $Z O A$ fallen, und deshalb, wenn dabei die Ablesung a_1 gemacht wäre, die wahre Ablesung

$$a_1 - \frac{c}{\sin z}$$

sein, so dafs demnach ebenfalls durch das genommene arithmetische Mittel der Werthe der Ablesung in beiden Lagen des Fernrohrs der durch den Collimationsfehler c entstandene Fehler eliminiert wird.

3. Einflufs des aus der Excentricität des Fernrohrs entstehenden Fehlers.

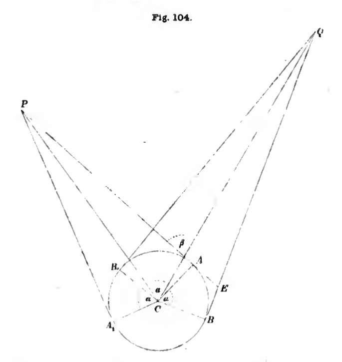
§. 223.

Bei dem Mefsen eines Horizontalwinkels mufs selbstverständlich die Collimationslinie des Fernrohrs senkrecht über dem Mittelpunkte der Theilung sich befinden, wenn durch die Drehnng derselben von dem einen Winkelpunkt auf den anderen die wahre Gröfse des Winkels auf dem Horizontalkreise abgelesen werden soll. Da aber bei einigen Theodolithen nicht nur das Fernrohr an dem einen Endpunkte seiner Rotationsachse angebracht ist, bei den anderen Theodolithen indessen, an denen es zwischen den Stützen desselben liegt, auch nicht geradezu behauptet werden darf, dafs die obige Bedingung erfüllt ist: so ist es

nothwendig, bei einer excentrischen Lage des Fernrohrs die Gröfse des Fehlers für den zu mefsenden Winkel kennen zu lernen.

Es sei in Fig. 104 C das Centrum des Kreises und $CA = CB = e$ die Excentricität des rechts vom Mittelpunkte liegenden Fernrohrs. Wird dasselbe zuerst in AP auf den linken Winkelpunkt P und darauf in BQ auf den rechten Q gerichtet, so dreht es sich um den Winkel $PEQ = ACB = \alpha$, während $PCQ = a$ der zu mefsende Winkel ist.

Fig. 104.



Da nun $a + 90^0 - Q = \alpha + 90^0 - P$ ist.
so ist $a = \alpha - (P - Q)$.
also a nur dann $= \alpha$, wenn $P = Q$ ist, d. h. wenn die Objecte vom Standorte gleiche Entfernung haben; je verschiedener aber diese Entfernung ist, desto gröfser wird der Fehler ausfallen.

Bezeichnet man die als bekannt angenommenen Entfernungen des links und rechts liegenden Objects beziehungsweise durch l und r, und berücksichtigt, dafs die Winkel P und Q immer sehr klein sein werden, also dieselben ihren Sinus proportional gesetzt werden dürfen, so ist in Sekunden

$$a = \alpha - 206265\left(\frac{e}{l} - \frac{e}{r}\right),$$

also der Werth

$$-206265\left(\frac{e}{l} - \frac{e}{r}\right) \text{Sekunden}$$

dem aus der Excentricität des rechts vom Centro C liegenden Fernrohrs entspringenden Fehler gleich.

Liegt dasselbe aber links vom Mittelpunkte des Limbuskreises, so dafs $A_1 P$ und $B_1 Q$ die nach den Objecten gehenden Richtungen der Collimationslinie ausdrücken, so ist

$$a + 90^0 - P = \alpha + 90^0 - Q,$$

und daher
$$a = \alpha + (P - Q),$$

oder
$$a = \alpha + 206265\left(\frac{e}{l} - \frac{e}{r}\right),$$

mithin der Werth des Fehlers

$$+206265\left(\frac{e}{l} - \frac{e}{r}\right) \text{Sekunden.}$$

Es wird demnach der aus der Excentricität des Fernrohrs entspringende Fehler bei der Winkelmefsung wieder eliminiert, wenn man von den in beiden Lagen des Fernrohrs erhaltenen Resultaten das arithmetische Mittel nimmt.

§. 224.

Die Untersuchung über den Einflufs des Fehlers, der bei der Mefsung der Horizontalwinkel durch die Neigung des Alhidadenkreises gegen den Limbuskreis entsteht, fordert die Kenntnifs der beiden Winkel, welche die Durchschnittslinien der Ebene der Alhidade und des Limbuskreises mit den beiden Verticalebenen einschliefsen, die beim Einstellen der Collimationslinie auf die beiden Winkelobjecte durch die Indices der Verniers gelegt werden. Da aber diese Winkel, abgesehen davon, dafs sie überhaupt nicht mit Genauigkeit gemefsen werden können, hinsichtlich ihrer Gröfse zwischen Null und dem Neigungswinkel der beiden Kreisebenen liegen, so wird der berechnete Fehler an verschiedenen Stellen des Limbus einen verschiedenen Werth annehmen. Weil aber die Mechaniker durch die bekannten mechanischen Vorrichtungen jetzt in den Stand gesetzt werden, mit der erforderlichen Schärfe zu prüfen, ob die an den Flauschen der Achsen befestigten Kreise normal zu den Achsen stehen, so wird beim Gebrauch der Azimuthalinstrumente besonders auf die genaue Einstellung der Verticalachse zu achten sein, wozu gute empfindliche Röhrenlibellen vollkommen Gelegenheit darbieten. Und da aufserdem die Verticalachse durch ihre Tragfeder immer eine Verstellung verträgt, so darf man, bei möglichst richtiger Einstellung der Rotationsachse, annehmen, dafs die Verniers der Alhidade mit dem Limbus in einer und

derselben Horizontalebene liegen, oder dafs wenigstens durch die etwa vorhandene Abweichung nur ein Fehler in der Bestimmung des Horizontalwinkels entsteht, der den zufälligen oder unvermeidlichen Fehlern zugesellt werden kann.

Eben so darf bei der jetzigen Einrichtung unserer Mefsapparate von der Gröfse des Einflufses einer nicht genau centrischen Aufstellung des Mefswerkzeuges über dem Scheitelpunkte des Winkels keine Rede sein, da eine solche Aufstellung vermieden werden kann und daher der dadurch entstehende Fehler nicht den zufälligen und constanten Fehlern, sondern den vermeidlichen Fehlern zugehört. Wenn aber die Aufstellung des Mefswerkzeugs in dem Scheitelpunkte des zu mefsenden Winkels überhaupt nicht gestattet ist, so wird im §. 236 gezeigt werden, durch welche Mefsungen und Berechnungen dann der Winkel dennoch zu bestimmen ist.

Dafselbe gilt von dem Einflufs des Fehlers, der von dem unrichtigen Einvisieren der Winkelpunkte entsteht. Man würde sonst mit demselben Rechte auch von dem Fehler sprechen können, der bei der Bestimmung eines Horizontalwinkels dadurch entsteht, dafs diese in einer Tageszeit erfolgt, wo die durch das vorhandene Wallen oder Flimmern der Luft entstehende scheinbare Bewegung der Objecte eine Winkelmefsung sehr unsicher macht, daher letztere immer zu vermeiden ist.

III. Unmittelbare Meßsung der Horizontalwinkel.

A. Mit den winkelmefsenden Werkzeugen.

1. Mittelst des Theodoliths.

§. 225.

Wenn man von den verschiedenen Methoden, mittelst des Theodoliths die Gröfse eines Horizontalwinkels zu bestimmen, vorerst abstrahiert, so kann man bei der Mefsung drei verschiedene Acte von einander unterscheiden: die Aufstellung des Mefsapparats über dem Scheitelpunkte des Winkels; die Berichtigung und Horizontalstellung desselben; und die Einvisierung auf die Winkelobjecte, so wie die Ablesung der Schenkelrichtungen auf dem Horizontalkreise.

a. Die Aufstellung (Centrierung) des Mefsapparats.

§. 226.

Es ist schon im §. 71 erwähnt, dafs die Unterlage des Mefsapparats theils massive Pfeiler von Stein oder Mauerwerk, oder eingegrabene Holzstämme, oder künstliche Stative bilden. Bei den gröfseren Mefsungen, z. B. bei der Aufnahme eines Dreiecksnetzes, bilden dann die erwähnten Pfeiler oder Baumstämme nicht nur die Unterlage des Instruments,

sondern auch die der Signalisierungsapparate, wovon weiter unten die Rede sein wird. Da, wo es geschehen kann, erheben sie sich nur 3 bis $3^1/_4$ Fufs über die Oberfläche des Bodens; der Mittelpunkt der oberen Grundebene eines in die Unterlage eingelafsenen Messingcylinders, der wenige Linien über die Oberfläche hervortritt, dient dann als Scheitelpunkt des Winkels. In den Fällen aber, wo grofse Wälder eine weite Aussicht hindern und auch keine Durchhaue mehr gestattet sind, werden höhere Aufstellungspunkte erfordert, wovon im 2. Buche die Rede sein wird.

Bei kleineren Mefsungen dient zur Markierung der Winkelpunkte ein Holzpfahl mit quadratischer Kopffläche, auf welcher durch den Durchschnitt zweier eingerifsener, sich kreuzender Linien der Scheitelpunkt des Winkels bezeichnet ist. Die Unterlage bildet bei den gröfseren Theodolithen ein Scheibenstativ mit hinreichend grofsem Holzkopf, um auf demselben das Mefswerkzeug mit seinen Unterlegscheiben um mehrere Zolle nach allen Richtungen verschieben zu können; bei den kleineren Theodolithen ebenfalls ein Scheibenstativ, mit welchem sie zeitweilig verbunden werden können.

Das Centrieren selbst ist in allen Fällen mit der gröfsten Sorgfalt anszuführen, eine verschiedene Ausführung aber theils durch die Beschaffenheit der Unterlage, theils durch den Untertheil des Instruments bedingt.

Dient bei den kleineren Mefsungen dem Theodolith ein Stativ zur Unterlage, so wird letzteres zunächst in einer zum Beobachten bequemen Höhe so über dem Pfahle aufgestellt, dafs annähernd die Mitte der Oeffnung des ungefähr horizontal liegenden Kopfes lothrecht über dem Pfahle liegt, worauf dann die Füfse desselben, ohne die Lage des Kopfes in horizontaler Richtung wesentlich zu verändern, gleichmäfsig fest in den Boden gedrückt werden. Dann bringt man durch den Senkelungsapparat der Fig. 7 und durch etwaige Verschiebung des Theodoliths anf dem Stativkopfe die Verticalachse desselben genau senkrecht über den Scheitelpunkt des Winkels. Gestattet der Stativkopf diese Verschiebung nicht, wie es bei den kleineren Theodolithen meistens der Fall ist, so mufs das Einlothen vor dem Aufsetzen und Befestigen des Apparats auf dem Stativ von dem Haken der Befestigungsvorrichtung aus vorgenommen werden.

b. Die Berichtigung und Horizontalstellung des Theodoliths.

§. 227.

Nun erfolgt nach den §§. 107—112 eine Berichtigung des Theodoliths insofern, als man sich überzeugt, ob nach längerem Gebrauch

oder weiterem Transport keine groben Fehler vorhanden sind, indem die kleineren nach den §§. 221—223 durch die Anordnung der Beobachtungen eliminiert werden können.

Die Horizontalstellung des Theodoliths, welche nur in der Lothrechtstellung der Verticalachse besteht, geschieht dann nach dem im §. 110, 3. angegebenen Verfahren, indem man die Alhidade so weit dreht, bis die Aufsetzlibelle in die Richtung des einen Armes des Dreifufses kommt und mit der zugehörigen Stellschraube die Luftblase zum Einspielen bringt; dann die Alhidade um 90° nach der einen Seite hin dreht und mittelst der beiden anderen Stellschrauben die Luftblase wieder einstellt und diese Drehungen und Einstellungen der Blase abwechselnd so lange wiederholt, bis auch schliefslich bei einer vollen Umdrehung die Luftblase ihren Stand behält. Alsdann ist die Verticalachse der Alhidade lothrecht, letztere mit dem Limbuskreise daher horizontal. Sollte man aber, unter der Voraussetzung, dafs die Höhe der Achsenlager bereits berichtigt ist, die Luftblase bei einer ganzen Umdrehung der Alhidade nicht auf demselben Stande erhalten können, so hat letztere in ihrer Büchse einen zu grofsen Spielraum und mufs dann durch die an der Tragfeder befindlichen Schrauben etwas tiefer eingesenkt werden.

Findet sich, Statt der Röhrenlibelle, nur eine Dosenlibelle zum Verticalstellen der Alhidadenachse, so bleibt das Verfahren dem obigen gleich, nur wird man nicht auf dieselbe Genauigkeit rechnen können.

c. Die Einstellung des Fernrohrs auf die Winkelobjecte und die Ablesung der Verniers oder der Schraubenmikrofkope.

§. 228.

Beim Einstellen des Fernrohrs auf die Winkelobjecte hat man besonders darauf sein Augenmerk zu richten, dafs deren Bilder, welcher Art sie auch sein mögen, immer genau in die Mitte der beiden Verticalfäden gebracht werden. Nachdem also die Klemmschraube der Alhidade und die Druckschraube an dem Ringe der Fernrohrachse gelöst sind, bringe man das Fadenkreuz auf das links liegende Object, da bei dem Limbuskreise die Eintheilung von Links nach Rechts mit wachsenden Ziffern bezeichnet ist, hemme alsdann die grobe Bewegung und stelle mit den Mikrometerschrauben das Fadenkreuz genau ein. Dafselbe geschieht bei dem rechts liegenden Objecte.

Um aber auch bei den Theodolithen, deren Alhidaden-Mikrometerwerke nicht die in den Figg. 108 und 110 v. H. g. I. dargestellte Einrichtung haben, den im §. 90 erwähnten Fehler zu vermeiden, der bei dem Hemmen der groben Achsendrehung durch das Anziehen der

Klemmschraube und durch das Umdrehen der Mikrometerschraube des Mikrometerwerks in der Spannung der Speichen oder des Randes des Kreises entsteht, wenn die Mikrometerschraube bald nach der einen, bald nach der anderen Seite gedreht wird: mufs man immer zwei Einstellungen machen, indem man das Fadenkreuz ein Mal von Rechts nach Links und dann von Links nach Rechts auf das Bild des Objects bringt, beide Male abliest und von den erhaltenen Resultaten das arithmetische Mittel nimmt. Bei den Federmikrometerwerken dagegen, bei welchen der todte Gang der Mikrometerschraube von der in der gehörigen Spannung befindlichen Feder stets aufgehoben wird, kann man den etwa noch vorhandenen Fehler wieder dadurch unschädlich machen, dafs man bei einer guten und vollständigen Wirkung der Hemmungen, die Mikrometerschraube bei beiden Objecten immer nur nach einer Richtung umdreht und die groben Drehungen hemmt, wenn das Fadenkreuz bei beiden Objecten einen gleichen Abstand von den Bildern desselben hat.

§. 229.

Nachdem man nun nach dem vorigen Paragraphen das Fadenkreuz des Fernrohrs zuerst auf das linke Object, je nach der Beschaffenheit des Alhidaden-Mikrometerwerks, zwei oder ein Mal eingestellt hat, wird nach §§. 66 und 67 der Stand der Verniere vollständig, oder bei den mit Schraubenmikrofkopen versehenen Theodolithen, der Stand des am Mikrofkopenträger befindlichen Verniers oder Indexstriches in Graden und Gradtheilen abgelesen, der Stand des Fadenkreuzes jedes Mikrofkopes aber nach §. 70 bestimmt und den am Vernier abgelesenen Graden und Gradtheilen zugesetzt. Dieselben Bestimmungen werden darauf nach dem Einstellen der Visierlinie des Fernrohrs auf das rechts liegende Object gemacht. Zieht man dann von den zweiten Ablesungen die ersten, an demselben Vernier oder dem nämlichen Schraubenmikrofkope gemachten ab, so bekommt man so viel Werthe des Winkels, als Verniere oder Schraubenmikrofkope vorhanden sind. Das arithmetische Mittel dieser Winkelwerthe würde daher den Werth des gemefsenen Winkels darstellen, wenn der Theodolith in allen seinen Theilen als vollständig berichtigt angesehen werden könnte. Da diefs aber nicht angenommen werden darf, so wird, wie schon in den §§. 221—223 erwähnt wurde, noch eine zweite Mefsung des Winkels in der Art vorgenommen, dafs man entweder das Fernrohr durchschlägt, oder, falls diefs nicht möglich ist, es aus seinen Achsenlagern hebt, um 180° dreht, und ohne die Achsenenden unter einander zu vertauschen, wieder einlegt und daher auch die Alhidade oder den Mikrofkopenträger um 180° bei unverrücktem Limbuskreise dreht. Auch wird dann aufs Neue die Luftblase der Libelle wieder eingestellt. In dieser

zweiten Lage des Fernrohrs erhält man also wieder eben so viel Werthe des Winkels, als in der ersten, und kann daraus wie vorhin, auch einen Mittelwerth bestimmen. Dann wird das arithmetische Mittel aus den Mittelwerthen in beiden Lagen des Fernrohrs den Werth des Winkels geben, in welchen die oben erwähnten Fehler nicht mehr, sondern aufser den Fehlern der Einstellung und Ablesung, nur noch Theilungsfehler vorkommen.

Bei den Theodolithen mit mikrofkopischer Ablesung ist vor dem Einstellen des Fadenkreuzes auf jedes der Objecte bei jedem der Mikrofkope das im §. 69 erwähnte Stiftchen durch Umdrehung der Mikrometerschraube auf die Mitte des kleinen Rechens und zugleich der Nullpunkt der Trommeltheilung auf den Index derselben zu stellen. Bestimmt man dann an den Mikrofkopen M_1, M_2 ..... die Abstände m_1, m_2 .... des Fadenkreuzes von den entsprechenden Strichen des Limbus, wobei auch selbstverständlich die etwaigen ganzen Umgänge der Trommel mit zuzuzählen sind und multiplicirt mit m_1, m_2 .... die nach §. 70 bestimmten Werthe eines Trommeltheiles, so erhält man für jedes Mikrofkop die Bogenwerthe, welche man den am Vernier abgelesenen Graden und Gradtheilen zuzusetzen hat.

Die Einrichtung des Manuals und der Berechnung zeigen die folgenden Beispiele.

Anmerkung. In dem nachfolgenden Beispiele ist in Bezug auf das oben beschriebene Universalinstrument der Werth eines Trommeltheiles für jedes Mikrofkop zu 5 Seknnden angenommen.

1. Theodolith mit Verniers.

Vernier	Object A			Object B			Winkelwerth		
	Gr.	M.	S.	Gr.	M.	S.			
	1. Lage des Fernrohrs.								
1	30	2	15	148	22	5			
2			5			0			
3			22,5			15			
4			17,5			10			
Mittel	30	2	15	148	22	7,5	118	19	52,5
	2. Lage des Fernrohrs.								
1	210	2	7,5	328	22	0			
2		1	57,5		1	52,5			
3		2	15		2	2,5			
4		2	15			7,5			
Mittel	210	2	8,75	328	22	0,625	118	19	51,875
						Mittel	118	19	52,1875

2. Theodolith mit Schraubenmikrofkopen.

Vernierangabe für das Object				Mikrofkop	Abgelesene Trommeltheile für das Object		Trommeltheile im Bogenmafs. Sekunden. Object		Mittel der Trommeltheile im Bogenmafs. Sekunden.		Object						Winkelwerth		
A		B			A	B	A	B	A	B	A			B					
Gr.	M.	Gr.	M.								Gr.	M.	S.	Gr.	M.	S.	Gr.	M.	S.
1. Lage des Fernrohrs.																			
0	30	46	30	1	80,8	34,0	404,0	170,0	252,25	323,5	0	34	12,25	46	35	23,5	46	1	11,25
				2	20,1	95,4	100,5	477,0											
2. Lage des Fernrohrs.																			
180	30	226	30	1	100,3	111,2	501,5	526,0	367,75	438,5	180	36	7,75	226	37	18,5	46	1	10,75
				2	46,8	64,2	234,0	321,0											
																Mittel	46	1	11

2. Die wiederholt einfache Winkelmefsnng.

§. 230.

Um nun auch noch die Theilungsfehler möglichst unschädlich zu machen, läfst man der ersten Beobachtung noch mehrere andere folgen, indem man den Anfangspunkt der Theilung, also den ersten Vernier nach und nach um 15°, 30°, 45° u. s. w. verändert und auch hierbei immer den Winkel in beiden Lagen des Fernrohrs mifst. Hat der Theodolith nur ein einfaches Achsensystem, so wird man die Veränderung des Anfangspunktes der Theilung nur durch Verschiebung des Dreifufses auf seiner Unterlage erreichen können und daher aufser einer nochmaligen Horizontalstellung der Alhidade auch eine nochmalige Centrierung vornehmen müfsen. Letztere wird aber durch ein zweifaches Achsensystem erspart, daher schon insofern die s. g. Repetitionstheodolithe einen Vorzug vor den einfachen haben. Um aber in diesem Falle das Resultat der Mefsung von einem etwaigen Fehler in den beiden Achsen nicht abhängig zu machen, mufs nach der vorgenommenen Verstellung der Alhidade die Klemm- oder Druckschraube des Kreises gelöst und letzterer mit der angeschlofsenen Alhidade (oder mit dem Mikrofkopenträger) so weit nach Links gedreht werden, dafs das Bild des Objects A dicht am Fadennetz des Fernrohrs erscheint. Dann zieht man die erwähnte Klemm- oder Druckschraube fest an und nimmt die Horizontalstellnng nur durch die Drehung der Alhidaden-(oder Mikrofkopenträger-) Achse vor.

Will man bei der ersten Winkelmefsnng mittelst des Repetitionstheodoliths den Vernier 1. auf Null stellen, so mufs man noch bei der

Einstellung des Fernrohrs auf das Object A das Fadennetz etwas rechts vom Bilde des Objects bringen, damit beim späteren Drehen der Alhidade der Index des Verniers 1. nicht unter Null, d. h. nicht zwischen 350° und 360° zu stehen kommt, um die Zuzählung von 360° beim Object B zu vermeiden.

Sind in einem Punkte mehrere neben einander liegende Winkel zu meſsen, wie es bei der Aufnahme eines Dreiecksnetzes immer der Fall ist, so wird das Fernrohr zuerst auf einen beliebigen Winkelpunkt, den man als den ersten ansehen will, dann nach einerlei Richtung nach Rechts herum auf jeden anderen eingestellt und bei jeder Einstellung abgelesen. Auf die Beendigung dieser Beobachtungsreihe folgt dann eine zweite in umgekehrter Ordnung; durch das arithmetische Mittel aus beiden befreit man sich dann von der Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Anfangspunktes der Theilung des Instruments.

Zwei solche zusammengehörige Beobachtungsreihen pflegt man einen Satz zu nennen. Dann folgt wieder die Umlegung des Fernrohrs, die Verstellung des Anfangspunktes u. s. w. wie vorhin. Dabei ist bei jedem neuen Satz und jeder Umlegung des Fernrohrs die etwa verstellte Luftblase zu verbeſsern.

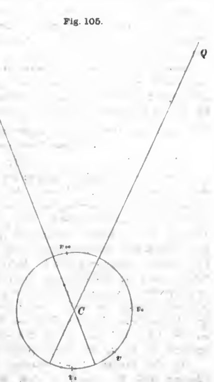
3. Die einfache Repetitionsmethode.

§. 231.

Es wird ausreichend sein, hierbei nur einen Theodolith mit Verniere zu berücksichtigen. Um mittelst desselben die Gröſse eines Horizontalwinkels nach der einfachen Repetitionsmethode zu meſsen, muſs der Horizontalkreis des Theodoliths nicht allein ein zweifaches Achsensystem, sondern zugleich auſser der Klemm- oder Druckschraube zur Hemmung des Limbuskreises auch noch ein Mikrometerwerk zur feinen Bewegung desselben gegen die Büchse des Dreifuſses enthalten. Nachdem man nun nach den §§. 226 und 227 die Centrierung und Horizontierung, letztere aber durch Drehung des Kreises mit der Alhidade ausgeführt hat, stellt man gewöhnlich den Vernier 1. auf den Nullpunkt der Theilung und liest den Stand der Verniere ab. Dann drehe man den Kreis mit der Alhidade so weit herum, bis man im Fernrohr das linke Winkelobject P in Fig. 105 erblickt, hemme die groben Bewegungen und stelle das Fadenkreuz durch Anwendung der Mikrometerschrauben scharf auf P ein. Löst man nun die Klemmschraube des Alhidadenmikrometerwerks und stellt das Fadenkreuz des Fernrohrs durch Drehung der Alhidade auf das rechts liegende Object Q, so ergiebt sich nach §. 229 die Gröſse des Winkels PCQ an dem einen Vernier durch den Bogen vv_1, wenn die Lagen des Index des Verniers v und v_1 beziehungsweise den Lagen der Visierlinie nach den

Objecten P und Q entsprechen. Nun löse man wieder die Hemmung des Limbuskreises und bringe, bei unverändertem Stande der Alhidade gegen den Limbuskreis, die Visierlinie des Fernrohrs, durch Drehung und feine Einstellung des Kreises auf das links liegende Object P, so wird v nach v_0 kommen und daher $v v_0 = v v_1$, also $v_1 v_0 = 2 v_1 v$ sein, wenn bei der vorgenommenen Drehung des Kreises mit der Alhidade und der Einstellung des ersteren auf das Object P angenommen werden kann, dafs der Anfangspunkt dieser zweiten Mefsung identisch ist mit dem Endpunkt der ersten. Unter derselben Voraussetzung wird nun, wenn man nach dieser zweiten Mefsung zu einer dritten, vierten u. s. w. übergeht und dabei immer wechselweise erst mit der Drehung des Limbuskreises nebst angeschlofsener Alhidade, die Visierlinie des Fernrohrs zuerst auf das Object P und dann nach alleiniger Drehung der Alhidade auf das Object Q einstellt, am Ende der $n$ten Operation der Index desselben Verniers von dem Nullpunkte der Theilung um einen Bogen abstehen, der das $n$fache Mafs des Winkels PCQ darstellt, wobei also die zwischenliegenden Stände des Verniers nicht abgelesen zu werden brauchen. Weil aber die folgenden Ablesungen, sobald der Index über 360° fortgerückt ist, nicht stets wachsende Zahlenwerthe geben können, so ist noch zu beachten, wie viel Mal diefs während der Winkelmefsung geschehen ist. Bezeichnet demnach x die Gröfse des Winkels, α die Ablesung zu Anfange, a die Ablesung am Ende, ist dabei der Nullpunkt der Theilung vom Index des Verniers m Mal

Fig. 105.



überschritten und n die Zahl der Repetitionen, so ist, aber nur unter der obigen Voraussetzung,

$$x = \frac{m \cdot 360^0 + a - \alpha}{n}.$$

Denselben Ausdruck würde man dann auch für jeden der andern Verniers erhalten.

Es ist daher auch nicht erforderlich, nach jeder einzelnen Mefsung den Stand der Verniers abzulesen, sondern zur Vermeidung eines etwaigen Beobachtungs- oder Rechenfehlers reicht es hin, aus der ersten Mefsung die Gröfse des Winkels zu bemerken. Zur Vermeidung der erwähnten Fehler ist anzurathen, den Stand des Verniers 1. nach jeder Mefsung abzulesen und zu notieren.

Bestimmt man nun auf dieselbe Weise den Winkel in der zweiten Lage des Fernrohrs durch eine eben so oftmalige Repetition, so ist das arithmetische Mittel aus beiden Resultaten auch von den in den §§. 221—223 angegebenen Fehlern befreit.

Vergleichung der Repetitionsmethode mit der wiederholt einfachen Winkelmefsung.

§. 232.

Unter der im vorigen Paragraphen gemachten Voraussetzung, dafs der Anfangspunkt jeder folgenden Mefsung zugleich der Endpunkt der vorhergehenden ist, würde der Zweck der Repetitionsmethode durch Mefsung an einander liegender Bogen die Fehler der Ablesung und Theilung so viel Mal zu verkleinern, als man Repetitionen angestellt hat, vollkommen erfüllt werden, wenn dadurch nicht neue constante Fehlerquellen entstehen könnten. Dahin gehört, bei der Bewegung des Kreises nebst der Alhidade von dem rechtsliegenden Objecte nach dem linksliegenden, das Bestreben des ersteren, sich gegen die letztere zu verstellen; ferner die nicht concentrische Bewegung der Kreisachse in der Dreifufsbüchse bei dem Hemmen des Kreises und die, in Bezug auf die Alhidade schon im §. 228 erwähnte, mögliche Biegung der Speichen des Kreises bei der Wirkung der Mikrometerschraube.

Da der Einflufs dieser etwaigen Fehlerquellen sich aber nicht schätzen läfst, diese auch bei dem im §. 230 angegebenen Verfahren nicht vorkommen, da jede folgende Mefsung des Winkels einen für sich bestehenden Act darstellt, so bietet die wiederholt einfache Winkelmefsung vor der Repetitionsmethode entschieden einen Vortheil dar.

Anmerkung. 1. Ausführlicher ist dieser Gegenstand behandelt in H. g. 1. S. 329, §. 269.

2. Dafs bei den Verticalkreisen eine Verstellung des Limbuskreises gegen den Vernierkreis durch die Wirkung der Schwere noch vermehrt wird, ist einleuchtend, daher auch die Mefsung der Verticalwinkel durch die Repetitionsmethode der Methode der wiederholt einfachen Mefsung nachstehen wird.

4. Die doppelte oder Borda'sche Repetitionsmethode.

§. 233.

Zur Anwendung dieser Methode ist ein zweites Fernrohr erforderlich, das unterhalb des Horizontalkreises angebracht ist und nicht nur eine von der Drehung des Limbuskreises unabhängige vollständige Umdrehung um die Verticalachsen, sondern auch mittelst eines Mikrometerwerks eine feine Einstellung gegen den Limbuskreis fordert. Dieser Forderung wegen wird das Fernrohr immer eine Excentricität von einigen Zollen gegen die Verticalachse der Alhidade haben. Es ist für die Winkelmefsung deshalb nothwendig, dafs das Fernrohr mit seiner einseitigen Rotationsachse mit Leichtigkeit in seinem Achsenlager, Statt des Durchschlagens sich umlegen läfst. Diese Einrichtung zeigt der in Fig. 43 dargestellte Apparat.

Nach der Horizontalstellung des Kreises bringe man den Index des Verniers 1. wieder auf den Nullpunkt der Theilung, wonach also das obere Fernrohr gegen den Limbuskreis fest steht, löse die Hemmung des unteren Fernrohrs, richte das obere Fernrohr durch Umdrehung des Kreises mit der Alhidade auf das links liegende Object P in Fig. 105, das untere aber auf das rechts liegende Object Q, wodurch also der Limbuskreis an den Dreifufs, das untere Fernrohr aber an den Kreis geschlofsen wird. Nimmt man nun vorläufig an, dafs die Fernröhre keine Excentricität gegen die Verticalachse besäfsen, so würden ihre Visierlinien den Winkel PCQ darstellen. Nun löse man die Hemmung des Limbuskreises, drehe denselben mit den beiden gegen ihn festgestellten Fernröhren so weit nach links herum, bis das vorhin auf Q eingestellte untere Fernrohr auf P gerichtet erscheint. Dadurch kommt der Nullpunkt, der vorhin in v war, um einen Bogen $v v_0$ nach Rechts, der, bei der Richtigkeit der obigen Annahme, das Mafs des Winkels PCQ darstellt. Löst man daher nun die Hemmung der Alhidade und stellt das obere Fernrohr auf das rechts liegende Object Q, so beschreibt der Index des Verniers einen Bogen $v_0 v_1$ auf dem feststehenden Limbuskreise, der $= 2 . v_0 v$ sein würde.

Nachdem nun wieder, wie beim Beginn der ersten Mefsung, die Hemmungen des Kreises und des unteren Fernrohrs gelöst worden, das obere Fernrohr, durch die Drehung des Kreises mit der darangeschlofsenen Alhidade, auf das Object P, das untere aber auf Q gestellt ist, so werden wieder ihre Visierlinien, bei der obigen Annahme, den Winkel PCQ darstellen. Durch das Lösen der Hemmung des Limbuskreises und das Einstellen des unteren Fernrohrs auf das Object P rückt dann der Nullpunkt der Theilung, der jetzt schon um $2 . v_0 v$ von ihm absteht, um eben diesen Bogen von v_0 nach v_{00}. Wird daher nun durch

das Lösen der Hemmung der Alhidade das obere Fernrohr wieder auf Q gerichtet, so beschreibt der Index des Verniers einen Bogen von $v_{00} v_1$ auf dem feststehenden Limbuskreise, der $= 2 \cdot 2\, v_0 v_1 = 4\, v_0 v_1$ ist u. s. f. Bei jeder folgenden Mefsung rückt also die Alhidade um das Doppelte des zu mefsenden Winkels von dem Nullpunkte weiter fort. Nach der $n$ten Mefsung wird demnach der gesuchte Winkel x, wenn ausserdem der Index des Verniers den Nullpunkt des Limbus m Mal überschritten hat und der von ihm zuletzt abgeschnittene Bogen $= a$ gesetzt wird,

$$x = \frac{m \cdot 360^0 + a}{2n}.$$

§. 234.

Wegen der Excentricität des unteren Fernrohrs bedarf aber der im vorigen Paragraphen angegebene Ausdruck noch einer Correction, indem dabei vorausgesetzt wurde, dafs beide Fernröhre senkrecht über und unter dem Mittelpunkte der Theilung sich bewegten. Um die Gröfse der Correction zu bestimmen, mufs die Gröfse der Drehungen ausgemittelt werden, welche man den Fernröhren bei jeder der einzelnen Mefsungen ertheilte. Wird angenommen, dafs das untere Fernrohr an der rechten Seite der Verticalachse sich befindet, dafs diese Entfernung $= e$, so wie der Abstand des links und rechts liegenden Objects vom Standpunkte beziehungsweise l und r beträgt, so stellt CP in Fig. 104 bei der ersten Mefsung, die erste Lage des oberen Fernrohrs, BQ die des unteren. Da nun bei der zweiten Drehung des Limbuskreises das untere Fernrohr in die Lage EP kommt, so ist die Gröfse seiner Drehung $= PEQ$. Um denselben Winkel wurde indessen das obere Fernrohr zurückgestellt, bei der Drehung der Alhidade aber wieder um PCQ gedreht, also entspricht der gemachten Ablesung ω ($= v_0 v_1$ in Fig. 105) die Summe: $PEQ + PCQ$.

Da aber $\quad \beta = PEQ + Q = PCQ + P$,
so ist $\quad \omega = 2\,PCQ + P - Q$,
folglich nach §. 223

$$PCQ = \tfrac{1}{2}\,\omega - \frac{e}{2}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{r}\right) 206265,$$

mithin der Werth des Fehlers

$$-206265\,\frac{e}{2}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{r}\right) \text{ Sekunden.}$$

Ebenso würde nun die Correction für die etwaige Excentricität des oberen Fernrohrs, wenn dasselbe ebenfalls rechts von dem Mittelpunkte der Theilung in dem Abstande e_1 gedacht wird, nach §. 223 betragen

$$-206265\,e_1\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{r}\right) \text{ Sekunden.}$$

Legt man also beide Fernröhre in ihren Lagern um, so dafs das Ocular dahin kommt, wo früher das Objectiv war, ohne aber bei dem oberen Fernrohr die Enden der Achse zu verwechseln, dreht auch die Alhidade um 180° und bestimmt den Winkel PCQ durch eine ebenso oftmalige Repetition, so ist das arithmetische Mittel aus beiden Resultaten nicht allein frei von den Fehlern wegen der Excentricität der Fernröhre, sondern auch noch von den in den §§. 221 und 222 erwähnten Fehlern.

§. 235.

Dafs aber bei der doppelten Repetitionsmethode die nach §. 232 durch die einfache Repetionsmethode entstehenden constanten Fehler noch durch die Bewegungen des unteren Fernrohrs, so wie durch dessen Hemmung und feine Einstellung vermehrt werden, also das erhaltene Resultat der Winkelmefsung um so weniger auf Zuverläfsigkeit Anspruch machen darf, bedarf keiner weiteren Begründung. Man hat deshalb auch längst schon von dieser Methode in der Praxis keinen ernsthaften Gebrauch mehr gemacht.

5. Das Centrieren der Horizontalwinkel.

§. 236.

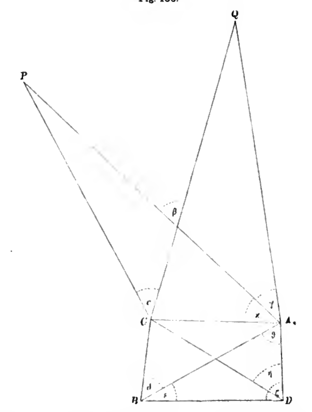
Nicht selten, insbesondere bei gröfseren Vermefsungen, ist es wegen der Beschaffenheit der Signale nicht gestattet, das Azimuthalinstrument in dem Scheitelpunkte des zu mefsenden Winkels aufzustellen, sondern man mufs in einem bestimmten Abstande von demselben den Standpunkt nehmen. Ist dieser z. B. A in Fig. 106, so ist einleuchtend, dafs nur dann der daselbst gemefsene Winkel PAQ dem Winkel PCQ gleich sein wird, wenn die vier Punkte C, A, P und Q in der Peripherie eines Kreises liegen. In jedem anderen Falle mufs aus dem gemefsenen Winkel PAQ, aus dem Abstande $CA = a$ und aus dem Winkel QAC oder PAC der Winkel PCQ berechnet werden, welches man das Centrieren des Winkels PAQ oder die Reduction des gemefsenen Winkels auf das Centrum der Station nennt. Man wird von diesem Verfahren auch dann gern Gebrauch machen, wenn die im §. 226 beschriebene Aufstellung (Centrierung) des Instruments zwar möglich, aber doch schwierig ist, um mit der möglichsten Unbefangenheit und Ruhe die Mefsung ausführen zu können.

Setzt man die Abstände CP und CQ des Punktes C von den Winkelobjecten beziehungsweise $= l$ und r, so ist

$$\sin P = \frac{a \sin \alpha}{l}, \ \sin Q = \frac{a \sin (\alpha + \gamma)}{r},$$



Fig. 106.



oder, da in Bezug auf die Längen l und r die Winkel P und Q nur sehr klein sind, in Sekunden

$$P = 206265 \frac{a}{l} \sin \alpha,$$

$$Q = 206265 \frac{a}{r} \sin (\alpha + \gamma).$$

Da nun $\beta = P + c = Q + \gamma$ oder

$c = \gamma + Q - P$ ist, so erhält man

$$c = \gamma + 206265 \frac{a}{r} \sin (\alpha + \gamma) - 206265 \frac{a}{l} \sin \alpha \text{ Sekunden,}$$

ein Ausdruck, der allgemeine Gültigkeit hat und nur noch nach der Lage des Standpunktes A gegen den Scheitelpunkt C Modificationen erleidet. Liegt nämlich A zwischen den Schenkeln CP und CQ, oder

zwischen den rückwärts gelegenen Verlängerungen derselben, so ist beziehungsweise

$$c = \gamma \mp Q \mp P;$$

liegt er in dem einen Schenkel CP des Winkels oder in seiner rückwärts gezogenen Verlängerung, so ist wieder beziehungsweise

$$c = \gamma + Q.$$

Kann die unmittelbare Mefsung der Linie CA nicht ausgeführt werden, wenn z. B. C eine Thurmspitze bezeichnet, so wählt man eine andere BD, deren Mefsung möglich ist und setzt auf sie zwei Dreiecke BCD und BDA, deren Spitzen in C und A liegen. Mifst man nun in diesen z. B. die Winkel δ, ε, ζ, η und ϑ, so läfst sich aus ihnen und der Standlinie $BD = a_1$ mit genügender Sicherheit der Abstand $CA = a$ berechnen. (Vergl. §. 302.)

6. Die für terrestrische Horizontal-Winkelmefsungen geeignete Tageszeit.

§. 237.

Wenn die Sonnenstrahlen an der Erdoberfläche auf undurchsichtige, die Wärme nicht durchlafsende Substanzen stofsen, dadurch also in ihrer Bewegung gehemmt und zu einer fortgeleiteten, freien Wärme werden, so theilt sich diese den unteren, in unmittelbarer Berührung stehenden Schichten der Atmosphäre mit. Da nun die Luft dadurch ausgedehnt und leichter wird, so wird sie nach aërostatischen Gesetzen in die Höhe steigen und von einer anderen herabsinkenden, kälteren Luftschicht ersetzt, welche bald dieselbe Veränderung erleidet. Es wird dadurch also ein bestimmter Luftzug von Unten nach Oben unterhalten werden, durch welchen die durch das Fernrohr betrachteten Objecte scheinbar bewegt werden und eine Unsicherheit, ja selbst oft eine Unmöglichkeit im Visieren abgeben. Diese Erscheinung beginnt meistens schon am Morgen und sogleich nach Sonnenaufgang; obgleich sie allmählich abnimmt und dabei dann auch wohl eine ausnehmende Durchsichtigkeit der Luft wahrzunehmen ist, so zeigt sich doch selten oder nur auf kurze Dauer eine zum genauen Beobachten erforderliche Ruhe der Bilder; am Mittage zeigt sich die Erscheinung aber am stärksten, selbst bei bedecktem Himmel, so dafs demnach die Vormittage zu den Horizontalwinkelmefsungen am ungeeignetsten erscheinen. Am Nachmittage dagegen, wo in den verschiedenen, die Erdoberfläche zunächst umgebenden Luftschichten mehr ein Gleichgewicht eingetreten ist, zeigt sich nach den Erfahrungen von Struve*) in etwa 0,6 der Zeit von der

*) Beschreibung der Breitengradmefsung in den Ostseeprovinzen Russlands u. s. w., von F. G. W. Struve. Dorpat 1831. I. Theil, S. 87.

Culmination der Sonne bis zu ihrem Untergange der Anfang der Ruhe der Bilder, die alsdann auch von da an etwa $2^1/_4$ Stunden anhält, weshalb also diese Zeit als die zum Meſsen der Horizontalwinkel geeignetste angesehen werden muſs.

B. Mit den winkelzeichnenden Werkzeugen.

1. Mit dem Meſstische.

§. 238.

a. Aufstellnng eines auf der Meſstischplatte gegebenen Punktes *a* über den entsprechenden *A* auf dem Felde und einer durch *a* gezogenen Geraden *ab* in die auf dem Felde gegebene Verticalebene *AB*.

Man stelle den Meſstisch mit *a* senkrecht über *A* und die Meſstischplatte nach dem Augenmaſse horizontal, was theils durch Verrücken des Meſstisches oder Verschieben der Platte und durch Einlothen mittelst der Einlothgabel oder eines herabfallenden Steinchens nach und nach leicht ausführbar ist. Darauf drückt man die Füſse des Stativs fest in den Boden und verbeſsert die etwaige Verrückung des Punktes *a* gegen *A* durch Verschiebung der Platte.

Dann stellt man die Platte durch die aufgesetzte Libelle mittelst der Stellschrauben genau horizontal. Nun legt man die Kippregel an *ab*, bringt durch grobe Achsendrehung die Meſstischplatte *ab* ungefähr in die Richtung (in das Alignement) *AB*, hemmt die grobe Bewegung und stellt mittelst der Mikrometerbewegung den Durchschnitt der Kreuzfäden genau auf *B*. Man sagt dann, der Meſstisch sei nach der Linie *AB* orientiert.

Anmerkung. Die Orientierung des Meſstisches nach einer auf der Meſstischplatte gegebenen Linie unter anderen Bedingungen, als die oben gegebenen, wird erst später (3. Abschn. 3. Cap.) erörtert.

§. 239.

b. Construction eines auf dem Felde gegebenen Winkels *ACB* auf der Meſstischplatte.

Nachdem man nach dem vorigen Paragraphen den Meſstisch mit dem Scheitelpunkte *c* senkrecht über *C* gestellt und nach *CA* orientiert hat, dreht man um *c* die Visierkante der Kippregel so weit auf der Platte herum, bis das Fadenkreuz auf den Punkt *A* gerichtet ist und zieht längs der Kante die Linie *cb*, so ist *acb* der gesuchte Winkel.

Von dem unverrückten Stande der Meſstischplatte während der Drehung der Kippregel um *c*, überzeugt man sich leicht dadurch, daſs

man wieder die Kippregel an *ac* legt, die behuf genaueren Anlegens gleich anfangs an den beiderseitigen Rändern durch eine feine Linie bemerkt wurde: dann mufs das Fadenkreuz wieder genau auf *A* gerichtet sein. Durch dies Verfahren wird auch die Anbringung des von Einigen empfohlenen Versicherungsfernrohrs überflüfsig. Um so weniger kann daher hierbei von der Anwendung einer s. g. Orientierboussole die Rede sein.

Anmerkung. 1. Zum bequemeren Umdrehen der Kippregel *c* schlagen Einige den Gebrauch der Anschlagnadel, nämlich das Einstechen einer feinen Nadel in *c* vor, woran aber der Anfänger sich nicht zu gewöhnen hat.

2. Wegen der viel geringeren Genauigkeit, welche die Winkelbestimmung mittelst des Mefstisches, verglichen mit der mittelst des Theodoliths, selbst eines kleinen einfachen Theodoliths gestattet, kann hier von dem in den §§. 221 und 222 untersuchten Einflufs der Neigung der Umdrehungsachse und des Collimationsfehlers des Fernrohrs auf die Bestimmung der Horizontalwinkel keine Rede sein. Es ist daher aber auch um so nothwendiger, die Kippregel in einer solchen Construction anzuwenden, um die erwähnten Fehler möglichst vollständig berichtigen zu können.

2. Mit der Boussole.

§. 240.

Bestimmung des Abweichungswinkels zweier auf dem Felde gegebener Linien *CP* und *CQ* von dem durch *C* gehenden magnetischen Meridiane.

Nachdem man die Zulegeplatte so auf ihrer Unterlage befestigt hat, dafs bei einem nach Graden abgetheilten Compasse der Nullpunkt oder bei einem bergmännischen Compasse der mit Nord 12 bezeichnete Punkt dem Objective des Fernrohrs zugekehrt ist, bringe man die Mitte der Theilung senkrecht über *C* und die Zulegeplatte nach dem Augenmafse in eine horizontale Lage. Nun löse man die Arretierung, stelle mittelst der Stellschrauben die Boussole so, dafs das Nordende der Magnetnadel genau in der Ebene des Theilringes spielt (man vergl. §. 138), richte das Fernrohr auf *P*, klemme und stelle mittelst der feinen Achsendrehungsvorrichtung scharf ein, so giebt der Nordpol der zur Ruhe gekommenen Magnetnadel den gesuchten Abweichungswinkel für *CP* an. Auf dieselbe Weise bestimme man den Winkel für das andere Object *Q*, so ist die Differenz beider Abweichungswinkel der Horizontalprojection des Winkels *PCQ* gleich.

Hinsichtlich des Ablesens der Abweichungswinkel ist Folgendes zu bemerken. Die Compässe mit der Gradabtheilung sind meistens bis auf halbe Grade unmittelbar getheilt und gestatten dann noch eine sichere Schätzung bis auf 10 Minuten. Bei den Markscheidercompässen dagegen theilt man die Sechszehntel-Stunde (die aber als $\frac{1}{2}$ von der Achtelstunde bezeichnet wird) zuerst in 2 und jeden dieser Theile noch

in 3 gleiche Theile; jene werden als Viertel, diese aber durch die Wörter reichlich (mehr) und scharf (weniger) angedeutet und durch Anhängung von r und s bezeichnet. Aufserdem bedarf es wegen der gleichen Eintheilung in beiden Halbkreisen noch der Beisetzung der Himmelsgegend. Demgemäfs ist die Bezeichnung der aufeinander folgenden Theile der zweiten Achtelstunde des Compasses: N. 12. 1.; N. 12. 1 r; N. 12. 1 $^1/_4$ s; N. 12. 1 $^1/_4$; N. 12. 1 $^1/_4$ r; .... N. 12. 1 $^3/_4$; N. 12. 1 $^3/_4$ r; N. 12. 2 s; N. 12. 2.

Eine Ablesung der Abweichungswinkel mit beiden Polen der Magnetnadel ist nach §. 131 unnöthig. In den wenigsten Fällen will man bei der Anwendung der Boussole auch die Gröfse der Winkel, welche von verschiedenen Objecten gebildet werden, in der Gradabtheilung wifsen, sondern nach §. 131 kommt es nur auf eine graphische Darstellung der Lage der verschiedenen Punkte gegen einander an. Damit alsdann die bedeutenderen täglichen Variationen der Magnetnadel keinen Einflufs ausüben können, mufs es der Geometer sich zur Regel machen, zu derselben Tageszeit die Constructionen auf dem Papiere auszuführen, zu welcher die Aufnahme auf dem Felde erfolgte.

Die Genauigkeit der Winkelbestimmung mittelst des Theodoliths, des Mefstisches und der Boussole.

§. 241.

Weil die Azimuthalinstrumente mit dem Mefstische und der Boussole die Classe der Horizontal-Winkelmefser bilden, so ist am Schlufs der Beschreibung dieser Apparate die Frage über die im Gradmafs angegebene Gröfse der Genauigkeit dieser Mefsapparate gewifs am rechten Orte, weil gerade die Beantwortung dieser Frage dem Praktiker bei einer gröfseren oder kleineren Fluraufnahme über die Wahl des anzuwendenden Mefswerkzeugs zur Richtschnur dienen mufs. Es ist wohl selbstverständlich, dafs man bei der richtigen Beantwortung der erwähnten Frage alle nachtheiligen Einflüfse, durch welche bei der Winkelbestimmung Fehler entstehen können, als möglichst beseitigt annimmt, so dafs bei der Mefsung selbst nur noch die zufälligen oder unvermeidlichen Fehler in Betracht kommen können.

Nimmt man bei der Boussole einen Theilungsdurchmefser von 4 Zoll, eine Eintheilung in Drittel-Grade und eine weitere Eintheilung derselben durch Schätzung in vier gleiche Theile an, wobei also jede zwei der 1080 Theilstriche um etwa 0,14 Linien von einander abstehen, so würde in der Ablesung einer Richtung doch immer eine Unsicherheit von 5 Minuten liegen, wenn selbst von dem Fehler, der bei der Zulage dieser Richtung begangen wird, abstrahiert würde.

Bei der Winkel- oder Richtungsbestimmung mittelst des Meſstisches hängt die Genauigkeit derselben, bei Beseitigung aller nachtheiligen Einflüſse, nur allein von der Dicke d des auf der Meſstischplatte gezogenen Bleistiftstrichs ab, der also, bei einer bestimmten Länge s desselben, einen Winkel von $\frac{d}{s}$ 206265 Sekunden verdecken wird, also wenn man $d = 0{,}02$ Linien annimmt, bei einer Länge von 100 Linien 40 Sekunden betragen würde. Da aber die hierbei vorausgesetzten günstigsten Umstände wohl nie, oder doch nur selten in der Wirklichkeit zutreffen werden, so darf man den bei einer Richtungsbestimmung gemachten Fehler auf etwa $1\frac{1}{2}$ Minuten annehmen.

Bei den Theodolithen wird die Genauigkeit der Ablesung der Richtungen, bei vorausgesetzter richtiger Eintheilung des Limbus und Verniers und der fehlerfreien Construction der Mikrometerschrauben der Schraubenmikroſkope, lediglich bedingt durch die Angabe des Verniers oder des Werthes eines Trommeltheiles der Mikrometerschraube. Wird nun bei den Angaben der Verniere oder den Trommeltheilen der Schraubenmikroſkope ein kleinerer Bogen gefordert, so ist dieſs bei den mit Verniers versehenen Theodolithen, da der Entfernung der Theilstriche zum genauen Ablesen und Bestimmen der Coincidenz derselben immer eine bestimmte Gränze gesteckt ist, nur durch einen gröſseren Durchmesser des Theilkreises, also nur durch gröſsere Theodolithen zu erreichen; bei der Anwendung der Schraubenmikroſkope indessen ist dieſs nicht der Fall, da man durch die jetzigen mechanischen Einrichtungen der Schraubenschneidmaschinen die Gewinde der Schrauben nicht nur vollkommen gleichmäſsig, sondern auch von beliebiger Höhe oder Feinheit darzustellen im Stande ist, also auch die Genauigkeit der Ablesung beliebig gesteigert werden kann. Es kommt deshalb jetzt in dieser Beziehung weniger auf den Durchmeſser des Theilkreises, als nur auf die Vollkommenheit der Theilung selbst an. Auch ist nicht zu übersehen, daſs die Theodolithe mit mikroſkopischer Ablesung noch den Vortheil einer leichteren und schnelleren Ablesung darbieten. Da nun auſserdem bei der Winkelmeſsung mittelst des Theodoliths alle constanten Fehlerursachen durch die Methode der Beobachtung eliminiert, die zufälligen oder unvermeidlichen Fehler aber nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen werden können: so dürften wohl alle diese Vortheile, die der Theodolith, dem Meſstisch und der Boussole gegenüber, gewährt und die bislang auch nur von der s. g. höheren Geodäsie adoptiert waren, auch auf kleinere Aufnahmen übertragen werden.

Bedenkt man ferner, daſs man durch Anwendung eines Theodoliths mit etwa 5zölligem Horizontalkreis und mikroſkopischer Ablesung von

etwa 5 Sekunden eine Genauigkeit bei Mefsungen erreichen kann, welche die Entfernungen bis auf $\frac{1}{5000}$ — $\frac{1}{6000}$, also ungefähr 12 bis 15 Mal genauer, als mit der Mefskette giebt: so dürfte auch die Frage, welcher Mefsapparat bei Aufnahmen, von denen man die gröfste Genauigkeit fordert, anzuwenden sei, wohl leicht zu entscheiden sein. Und so liegt denn auch wohl die Hoffnung nicht mehr ganz fern, dafs die Vorstands-Behörden über die Kataster- und ökonomischen Aufnahmen allmählich zu der Ueberzeugung kommen, dafs mit der Zugrundelegung des Theodoliths eine viel gröfsere Genauigkeit erreicht wird, als mit der alleinigen Anwendung der Mefskette. Diese Ueberzeugung hat man auch bereits im Fürstenthum Schwarzburg-Sondershausen gewonnen, woselbst bei der Kataster-Vermefsung soweit ins Detail hinunter trianguliert wird, dafs auf jede 12 bis 15 Morgen ein durch einen Theodolith bestimmter trigonometrischer Punkt kommt *).

Dafs im 2. Abschn. der 1. Abth. die zum Theil veralteten, einfachen Constructionen des Mefstisches und der Boussole nicht mehr dargestellt sind, möchte durch die letzteren Bemerkungen gerechtfertigt erscheinen.

IV. Unmittelbare Meßung der Verticalwinkel.

1. Bestimmung des Indexfehlers des Höhenkreises am Theodolith, Mefstisch, oder an der Boussole und Mefsung der Höhen- und Tiefenwinkel.

§. 242.

Hier soll nur von den Höhenkreisen die Rede sein, welche bei Detailmefsungen zur Bestimmung der Elevations- und Depressionswinkel dienen, um die in geneigten Ebenen liegenden Stationslinien auf den Horizont reducieren zu können. An den erwähnten Apparaten ist der Höhenkreis an der Rotationsachse des Fernrohrs, die Verniers, wenn deren zwei vorhanden sind, an der einen Stütze desselben befestigt. Häufig findet sich auch nur ein Vernier, ebenfalls an der einen Stütze angebracht. Der Kreis ist meistens von dem Nullpunkte aus nach entgegengesetzten Richtungen in zwei Mal 180 Grade getheilt und demgemäfs beziffert. Da nun die Ablesung der Verticalwinkel bei dem Nullpunkte beginnt, so soll eigentlich bei der horizontalen Lage des Fernrohrs der Index des Verniers auf den Nullpunkt der Theilung treffen. Zeigt sich eine Differenz, so wird dieselbe der Indexfehler des Höhenkreises genannt. Könnte man denselben durch das Instrument selbst auf ähnliche Weise, wie es die Spiegelwerkzeuge gestatten, bestimmen, oder dem Fernrohr, wie bei den Nivellierwerkzeugen, eine horizontale Lage

*) Baeyer, über die Gröfse und Figur der Erde. Berlin, 1861. S. 66.

geben, so würde man den Indexfehler vor jeder Mefsung ablesen und dann in Rechnung bringen können. Man beurtheilt aber, umgekehrt, die Lage der Visierlinie erst aus der Coincidenz des Nullpunktes mit dem Indexstriche. Aus diesem Grunde mufs die Gröfse des Indexfehlers ermittelt werden, um ihn bei der Bestimmung der Höhen- und Tiefenwinkel seinem Vorzeichen nach in Rechnung bringen zu können.

§. 243.

Da der eine Sector oder Halbkreis des Höhenkreises vom Nullpunkte an für die Elevations-, der andere für die Depressionswinkel dient, so folgt, dafs wenn man bei vorausgesetzter richtiger Eintheilung der Bogen die Visierlinie des Fernrohrs unter einem bestimmten Winkel über den Horizont erhebt und darauf dieselbe unter dem nämlichen Winkel unter ihn senkt, die absolute Gröfse des Indexfehlers dieselbe sein und nur das eine Mal subtractiv werden mufs, wenn sie das andere Mal additiv war.

Bestimmt man daher in dem einen Endpunkte einer gegen den Horizont geneigten Linie den Elevationswinkel a, in dem andern den Depressionswinkel a_1, so ist ein Indexfehler i vorhanden, wenn beide von einander verschieden sind. Ist nun $a > a_1$ und v der wahre Verticalwinkel, so ist

$$a = v + i \text{ und } a_1 = v - i,$$

folglich

$$i = \tfrac{1}{2}(a - a_1),$$

welcher Werth daher für alle Elevationswinkel subtractiv, für alle Depressionswinkel additiv zu nehmen ist.

Es folgt leicht, dafs i nur dann mit Genauigkeit bestimmt werden kann, wenn die beiden Visierlinien bei dem Mefsen der Verticalwinkel parallel sind. Indessen reicht zu dem im vorigen Paragraphen angegebenen Zweck das beschriebene Verfahren vollkommen aus. Mit gröfserer Genauigkeit erhält man den Werth für i, wenn man zwei mit Fadenkreuzen versehene Hülfsfernröhre mit ihren Objectiven so einander gegenüberstellt, dafs ihre Visierlinien eine Gerade bilden. Bringt man dann das Fernrohr des Mefsapparats zwischen beide Hülfsfernröhre, richtet seine Visierlinie auf das Fadenkreuz des einen Hülfsfernrohrs, so erhält man am Vernier den Winkel a oder a_1 und, wenn man das Fernrohr durchschlägt, oder beim Theodolith die Alhidade um 180° dreht und auf das Fadenkreuz des zweiten Hülfsfernrohrs richtet, beziehungsweise den Winkel a oder a_1 mit gröfserer Sicherheit.

In Ermangelung zweier Hülfsfernröhre kann man auch nur eins anwenden, für das andere aber ein deutlich markiertes Object benutzen, auf welches dann zuerst das Fernrohr des Mefsapparats, der selbstverständlich zwischen dem Hülfsfernrohr und dem Objecte aufgestellt ist,

gerichtet wird, wodurch dann der eine der Verticalwinkel a oder a_1 sich bestimmen läfst. Den zweiten erhält man dann wie vorhin angegeben wurde.

Oder man richte das Fernrohr auf ein hoch gelegenes, deutlich markiertes Object und bringe zwischen beide einen künstlichen Horizont (§. 158) in eine solche Lage, dafs darin vom Fernrohr aus das reflectierte Bild des Objects wahrgenommen werden kann. Liest man dann beim Einstellen des Fernrohrs auf das Object und auf das Bild desselben den Verticalwinkel $= 2v$ ab, so erhält man daraus den Indexfehler.

Zuweilen ist der Höhenkreis mit einer Büchse verbunden, die auf den verlängerten Zapfen der Rotationsachse geschoben und durch eine Druckschraube festgestellt wird. Durch Lösung der letzteren und durch Verschiebung des Kreises kann der gefundene Indexfehler wenigstens annähernd berichtigt werden, so dafs dann nur noch ein kleiner Ueberschufs in Rechnung zu bringen ist. Dafselbe kann auch meistens durch Verschiebung der Vernierplatte geschehen, wenn dieselbe zwischen Schraubenspitzen befestigt ist.

§. 244.

Die Bestimmung der Gröfse eines Elevations- oder Depressionswinkels ergiebt sich dann sehr leicht. Nachdem nämlich der Verticalzapfen des Winkelmefsers vertical gestellt, also die Umdrehungsachse des Fernrohrs in eine horizontale Lage und der Höhenkreis in die Ebene des Verticalwinkels gebracht ist, richtet man das Fadenkreuz des Fernrohrs zuerst durch grobe Drehung, dann nach Schliefsung der Hemmungsvorrichtung des Höhenkreises und durch Anwendung der Mikrometerschraube auf das gegebene Höhenobject fein ein, liest am Höhenkreise den Stand der Indices der Verniers ab und verbefsert den dadurch bestimmten Winkel um den bekannten Indexfehler im additiven oder subtractiven Sinne.

2. Mefsung der Zenithdistanz eines terrestrischen Objects.

§. 245.

Es werde hierbei der in Fig. 44 dargestellte Compensations-Theodolith in Anwendung gedacht. Nachdem man demselben eine sichere Unterlage gegeben hat, bringe man die Mitte des Azimuthalkreises senkrecht über den Beobachtungspunkt und stelle durch die aufgesetzte Röhrenlibelle L die Verticalachse vertical. Dadurch wird dann auch der Verticalkreis eine verticale Lage haben und die Collimationslinie des Fernrohrs, bei dessen Rotation, eine Verticalebene beschreiben.

Man bringe nun in Bezug auf das Höhenobject, durch Lösung der Klemmschraube δ des Alhidadenmikrometerwerks, den Verticalkreis auf die linke Seite der Verticalachse (Kreis links), und stelle den Durchschnitt des Fadenkreuzes des Fernrohrs auf einen bestimmten Punkt des Höhenobjects zuerst ungefähr, dann aber durch Anwendung der Mikrometerschrauben der Mikrometerwerke des Horizontal- und Verticalkreises scharf ein. Nun lese man den Stand der beiden Verniere des Verticalkreises, so wie auch den des einen Verniers am Azimuthalkreise ab. Bei den ersteren bestimme man nur am Vernier 1 die Grade, Minuten und Sekunden, an dem anderen aber nur die Sekunden. Darauf löse man die Klemmschraube δ und drehe den beweglichen Theil des Apparats um 180°, was an dem abgelesenen Stande des Verniers des Azimuthalkreises erkannt werden kann. Hierdurch kommt der Verticalkreis auf die rechte Seite der Verticalachse (Kreis rechts). Dann löse man die Klemmschraube des Verticalkreises und stelle auf dieselbe Weise, wie in der ersten Lage des Apparats angegeben war, den Mittelfaden des Fernrohrs wieder auf denselben Punkt des Höhenobjects ein. Darauf lese man, wie vorhin, wieder die beiden Verniere des Verticalkreises ab und setze der Ablesung des Verniers 1 360° zu, wenn bei dem Durchschlagen des Fernrohrs in der zweiten Lage der Nullpunkt von dem Index überschritten ist. Zieht man nun von dem Mittelwerth R der Ablesungen in der zweiten Lage, den Mittelwerth L in der ersten ab und dividiert den Rest durch 2, so ist $\frac{1}{2}(R-L)$ der Zenithdistanz des Höhenobjects gleich, wenn angenommen werden kann, dafs keine Veränderung in der Lage der Indices der Verniere gegen die Eintheilung des Limbus eingetreten ist.

Da aber die Feststellung des Verticalkreises gegen den Rahmen des Verniers an des ersteren Peripherie geschieht, also die umgedrehte Mikrometerschraube h_1 in der Richtung der Tangente wirkt, in dieser Richtung daher auch die Bewegung des Kreises erfolgt, so wird die dadurch mögliche Verstellung des Kreises gegen die Verniers unschädlich gemacht werden müfsen. Man macht nämlich in jeder Lage des Verticalkreissystems zwei Einstellungen auf das Höhenobject, indem man das Fadenkreuz des Fernrohrs einmal von Oben nach Unten und dann von Unten nach Oben auf das Höhenobject richtet und nimmt dann von beiden Ablesungen an den Verniers das arithmetische Mittel. (M. vergl. §. 228.)

§. 246.

Will man zur Verminderung der Theilungsfehler mehrere Beobachtungen machen, so mufs, wie bei den Azimuthalinstrumenten, der Verticalkreis eine Verstellung auf der Rotationsachse des Fernrohrs gestatten, wie es bei dem oben beschriebenen Universalinstrumente mit

mikrofkopischer Ablesung der Fall ist. Für diefs ist dann, nachdem der Verticalzapfen desselben vertical gestellt ist, das excentrisch angebrachte Fernrohr zuerst auf die linke Seite (Fernrohr links) und dann vor dem Durchschlagen desselben auf die rechte Seite (Fernrohr rechts) des Vertitalzapfens zu bringen. In Bezug auf die Einstellung und Ablesung der Schraubenmikrofkope sind die im §. 229 angegebenen Regeln zn befolgen, woraus die Bogenwerthe für jede Einstellung des Fernrohrs sich ergeben. Aufserdem ist aber vor der ersten Einstellung des Fernrohrs die Luftblase der nach §. 112 berichtigten Versicherungslibelle durch das zugehörige Mikrometerwerk auf die Mitte der Scale zu bringen und nach der zweiten Einstellung des Fernrohrs zu untersuchen, ob die Luftblase eine Veränderung erlitten hat. Sollte diefs der Fall sein, so mufs die Verstellung ihrer Mitte gegen die Mitte der Scale in Sekunden ausgedrückt und dieser Werth im additiven oder subtractiven Sinne dem berechneten Bogenwerthe der zweiten Einstellung zugesetzt werden, um die Ablesung zu erhalten, bei welcher die Mitte der Blase in der Mitte der Scale sich befindet.

Anmerkung. In dem nachfolgenden Beispiele ist wieder der Werth eines Trommeltheiles für jedes Mikrofkop zu 5 Sekunden angenommen.

Lage des Fernrohrs	Vernierangabe		Mikrofkop	Abgelesene Trommeltheile	Trommeltheile im Bogenmafs	Mittelwerth des Bogens	Winkel		
	Gr.	M.			Sek.	Sek.	Gr.	M.	S.
L	0	0	1	102,1	510,5				
			2	123,0	615,0	562,75	0	9	22,75
R	136	20	1	53,7	268,5				
			2	64,6	323,0	295,75	136	24	55,75
						$R - L$	136	15	33
						$\frac{1}{2}(R - L)$	68	7	46,5

3. Bestimmung des Zenith- oder Horizontpunktes am Vernier des Verticalkreises.

§. 247.

Obgleich die Bestimmung dieses Punktes vorzugsweise nur bei solchen Instrumenten in Betracht kommt, mit welchen Gestirnbeobachtungen vorgenommen werden sollen, um vor einer solchen Beobachtung das Fernrohr auf diejenige Höhe zu stellen, die das Gestirn beim Durchgange durch den Meridian oder einen andern Verticalkreis der

Himmelskugel für ein bestimmtes Azimuth besitzt: so kommt dieselbe doch auch bei denjenigen Meſsapparaten zur Anwendung, deren Verticalkreis eine von 0°, durch 180°, bis 360° fortlaufende Bezifferung enthält und mit denen ebenfalls Elevations- oder Depressionswinkel zur Reduction schief liegender Stationslinien auf den Horizont bestimmt werden sollen.

Miſst man nämlich nach den vorigen Paragraphen in Bezug auf den Vernier, der selbstverständlich eine sich gleich bleibende feste Lage gegen den beweglichen Verticalkreis hat, die Zenithdistanz irgend eines Objects in beiden Lagen des Kreises (§. 245) oder des Fernrohrs (§. 246), so ist, wenn die Zenithdistanz des Objects $= \frac{1}{2}(R - L)$ war, der Ort des Zeniths $= \frac{1}{2}(R + L)$, der Ort des Horizonts daher $90^0 + \frac{1}{2}(R + L)$, woraus dann auch der Indexfehler sich ergiebt.

4. Die Verbeſserung der gemeſsenen Verticalwinkel wegen der irdischen Strahlenbrechung.

§. 248.

Nur bei kleinen Entfernungen wird von dem, von einem Höhenobjecte ausgehenden Lichte angenommen werden können, daſs es in einer Geraden in das Auge des Beobachters gelangt, also das Object wirklich an seinem Orte gesehen wird; bei gröſseren Entfernungen dagegen, etwa von 800 bis 1000 Fuſs an, wird das Licht bei den gewöhnlichen Zuständen der Atmosphäre eine gegen die Erdoberfläche concav liegende Curve darstellen, mithin der beobachtete Ort des Objects dem Zenith näher liegen, als der wahre, so daſs demnach wegen der irdischen Strahlenbrechung alle gemeſsenen Zenithdistanzen der Höhenobjecte zu klein, folglich alle Elevationswinkel zu groſs erhalten werden. Von dem Orte A aus in Fig. 107 scheint daher der Ort B etwa in B_1 und von B aus der Ort A etwa in A_1 zu liegen. Bei den Höhenbestimmungen terrestrischer Objecte nennt man daher die Winkel ZAB_1 und Z_1BA_1 die scheinbaren, die Winkel ZAB und Z_1BA die wahren Zenithdistanzen der Oerter A und B gegen einander und die Winkel BAB_1 und ABA_1 die Refraction.

Setzt man die Entfernung der beiden Oerter A und $B = d$, den Erdhalbmeſser $CA = CD = r$ und nimmt, da die Entfernung AB gegen den Erdhalbmeſser immer sehr klein ist, $AB = AD$, so erhält man, da $C : 360^0 = d : 2r\pi$ ist,

$$C = \frac{d}{r}\, 206265 \text{ Sekunden},$$

so daſs also der Winkel C als gegeben angesehen werden kann. Bezeichnet man nun die scheinbaren Zenithdistanzen der Oerter A und B

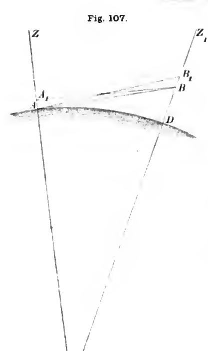


Fig. 107.

beziehungsweise durch z und z_1, die wahren Zenithdistanzen derselben durch Z und Z_1 und die zugehörigen Refractionen durch ρ und ρ_1, so ist

$$Z = z + \rho,$$

$$\text{und } Z_1 = z_1 + \rho_1.$$

Aus den Aufsenwinkeln Z und Z_1 des Dreiecks ABC folgt aber leicht

$$Z + Z_1 = 180^0 + C,$$

folglich ist

$$z + z_1 + \rho + \rho_1 = 180^0 + C.$$

Werden nun die scheinbaren Zenithdistanzen gleichzeitig gemefsen, wobei dann angenommen werden kann, dafs der Zustand der Atmosphäre in den Beobachtungspunkten wenigstens nahezu derselbe ist, so ist auch $\rho = \rho_1$ und daher

$$\rho = 90^0 + \tfrac{1}{2}\, C - \tfrac{1}{2}\,(z + z_1).$$

Bei denselben Zenithdistanzen erscheint daher die Refraction nur von dem Winkel C abhängig und kann demnach, unter der Voraussetzung derselben Dichtigkeit der Atmosphäre, dem Winkel C proportional angesehen werden, so dafs dann

$$\rho = \varkappa\, C$$

ist, in welchem Ausdrucke $\varkappa$ einen Zahlencoefficienten, die Refractionsconstante oder den Coefficient der Refraction, bezeichnet, der bei derselben Dichtigkeit als constant betrachtet werden darf.

Nach Gaufs	ist $\varkappa = 0{,}0653$,
„ Bessel	„ $\varkappa = 0{,}0685$,
„ Struve	„ $\varkappa = 0{,}06185$,
„ Coraboeuf	„ $\varkappa = 0{,}0642$,
„ Delambre	„ $\varkappa = 0{,}08$,
„ Lambert	„ $\varkappa = 0{,}0625$,
„ Tob. Mayer	„ $\varkappa = 0{,}0625$.
Die Engländer setzen	$\varkappa = 0{,}1$.

Anmerkung. Dafs Delambre (und Méchain) einen gröfseren Werth für $\varkappa$ fanden, ist nach Bessel dem Umstande zuzuschreiben, dafs die von den genannten Astronomen angewandten Wiederholungskreise die Zenithdistanzen immer zu klein angeben. Dafs in England ein noch gröfserer Werth für $\varkappa = 0,1$ gefunden ist, rührt ebenfalls nach Bessel wahrscheinlich von Beobachtungen von Lichtsignalen während der Nacht her, indem dann wegen der Wärmeabnahme der Atmosphäre die Refraction gröfser ist.

In dem Nachfolgenden soll immer der von Gaufs angegebene Werth für $\varkappa$ berücksichtigt werden.

§. 249.

Wegen der Veränderung der Dichtigkeit der Atmosphäre, insbesondere zu den verschiedenen Tageszeiten, kann aber auch der Werth für $\varkappa$ nicht immer derselbe sein, und nach den Gaufs'schen Untersuchungen kann derselbe sogar um den achten Theil seiner Gröfse als verschieden sich zeigen, mithin bei $\varkappa = 0,0653$ zwischen 0,0735 und 0,0571 liegen. Aus den ausgedehnten Untersuchungen, die von Struve, Bessel und Baeyer bei den Gradmefsungen in den Ostseeprovinzen Rufslands und Ostpreufsens angestellt sind, hat sich nun ergeben, dafs die irdische Strahlenbrechung gerade am constantesten ist, wenn die Bilder der Objecte am Mittage am unruhigsten sich zeigen, und dafs dann deren Zenithdistanzen sich fast gar nicht ändern, auch an einem Tage dieselben sind, wie an einem andern; dafs aber die Strahlenbrechung sogleich wächst, sobald die Bilder der Höhenobjecte ruhig werden. Deshalb wird von denselben als günstigste Zeit zu Zenithdistanzenbestimmungen die Zeit am Vor- und Nachmittage, welche beziehungsweise den ruhigen Bildern folgt oder vorangeht, dagegen als die ungeeignetste Zeit genannt der Zeitraum kurz nach dem Sonnenaufgange oder kurz vor dem Sonnenuntergange.

V. Unmittelbare Meſsung der schiefgeneigten und Höhenwinkel mittelst der Reflexionsinstrumente und Reduction der ersteren auf den Horizont des Standorts.

A. Meſsung der schiefliegenden Winkel.

§. 250.

1. Mittelst des Sextanten.

Es sei P das links-, Q das rechtsliegende zweier terrestrischer Objecte und O der Standort des Beobachters, also POQ der zu mefsende schiefliegende Winkel. Da die Eintheilung des Bogens, vom Mittelpunkte aus betrachtet, immer von Links nach Rechts wachsend beziffert ist, so bestimme man nach §. 149 für das linksliegende Object P die Gröfse des Indexfehlers mit dem entsprechenden Vorzeichen. Alsdann halte

man den Sextanten an seinem Handgriffe so in der rechten Hand, dafs seine Ebene durch die der Winkelschenkel geht, richte, durch Drehung des Instruments, das Fernrohr auf das linksliegende Object P und drehe die Alhidade mit der linken Hand so weit längs der Eintheilung herum, bis unter dem dioptrischen Bilde des linksliegenden Objects im unbelegten Theil des kleinen Spiegels, an dem senkrechten Faden des Fernrohrs das katoptrische Bild des rechtsliegenden Q erscheint. Darauf hemme man die grobe Bewegung und bringe durch Anwendung der Mikrometerschraube beide Bilder genau zur Deckung, nämlich beide dicht unter einander an den erwähnten Faden; dann giebt der Index des Verniers, nach Verbefserung des Indexfehlers, die Gröfse des gegebenen Winkels POQ an.

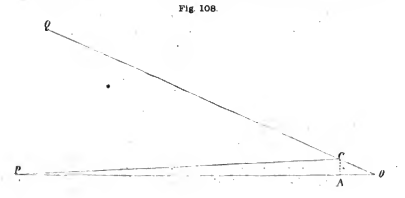
Dem Anfänger wird die Coincidenz der Bilder der beiden Objecte wegen der etwaigen ungleichen Beleuchtung weniger Schwierigkeiten machen, wenn er anfangs das astronomische Fernrohr mit dem einfachen Rohr vertauscht, oder auch nur mittelst Durchsehens längs der Achse des Ringes des Fernrohrs die Alhidade so weit vorwärts bewegt, bis beide Bilder sich beinahe berühren, dann die Klemmschraube des Mikrometerwerks anzieht und nun erst durch Auschrauben des Fernrohrs die genaue Coincidenz der Bilder bewirkt. Sollte das eine Bild dabei zu schwach beleuchtet erscheinen, so wird man durch Heben oder Senken des Fernrohrträgers die nöthige Helligkeitsabänderung bewirken können.

§. 251.

Der nach dem vorigen Paragraphen erhaltene Winkelwerth bedarf aber in den meisten Fällen noch einer Correction.

Ist nämlich in Fig. 108 C der Drehungspunkt der Alhidade, O der Ort des Auges oder der Scheitelpunkt des Winkels, so erhält man

Fig. 108.



durch Ablesung auf dem Limbus nicht den Winkel POQ, sondern PCQ. Da aber

$$PCQ = POQ + CPO$$

ist, so erhält man den gesuchten Winkel um CPO zu grofs, welchen Winkel man die Parallaxe oder die Schiefenparallaxe des Sextanten zu nennen pflegt, und der offenbar von der Entfernung e des linksliegenden Objects und dem Abstande a des Drehungspunktes der Alhidade von der Fernrohrachse abhängt. Da aber

$$\operatorname{tg} P = \frac{a}{e},$$

so läfst sich leicht für das angewandte Werkzeug eine Tafel anfertigen. Für $a = 0{,}02$ Ruthen ist

für $e =$	50	Ruthen	die Parallaxe	68	Sekunden,
„ $e =$	60	„	„ „	57	„
„ $e =$	70	„	„ „	49	„
„ $e =$	80	„	„ „	43	„
„ $e =$	90	„	„ „	38	„
„ $e =$	100	„	„ „	34	„
„ $e =$	150	„	„ „	23	„
„ $e =$	200	„	„ „	17	„
„ $e =$	300	„	„ „	12	„
„ $e =$	400	„	„ „	9	„
„ $e =$	500	„	„ „	7	„
„ $e =$	1000	„	„ „	3	„

§. 252.

2. Mittelst des Pistor-Martin'schen Spiegel-Prismenkreises.

Obgleich der Gebrauch des Spiegel-Prismenkreises im Allgemeinen auf den im §. 143 gegebenen Sätzen und der Erscheinung der totalen Reflexion (§§. 62 und 63) beruht, so wird doch durch die Stellung des Glasprisma's gegen den beweglichen Spiegel und gegen die unabänderliche Richtung der Visierlinie, in der Mefsung der Winkel von verschiedener Gröfse, wenigstens bis zu gewissen Grenzen hin, ein verschiedenes Verfahren bedingt.

Ist der Index des Verniers 1 auf den Nullpunkt der Limbuseintheilung oder auch nur auf dessen Nähe gestellt, so bildet, wie schon im §. 151 erwähnt wurde, die Indexlinie der Alhidade mit der Spiegelebene oder mit der Visierlinie des Fernrohrs einen Winkel von 20°. Wegen der hierdurch erfolgenden starken Zerstreuung des Lichts wird daher bei jener Lage der Alhidade das in das Fernrohr gelangende Licht nur eine geringe Helligkeit besitzen, die aber aus dem entgegen-

gesetzten Grunde bei dem Wachsen der Winkel im Allgemeinen sich wieder erhöhen wird.

Soll nun die Gröfse eines gegebenen spitzen Winkels gemefsen werden, so ist das dabei anzuwendende Verfahren dem beim Sextanten angewandten gleich, nur dafs mit dem in Rede stehenden Apparate der Winkel frei von der etwaigen Excentricität sich ergiebt.

Bezeichnen α_1 und α_2 den Stand der Verniere 1 und 2 beim Einstellen des Spiegels auf das linksliegende Object, a_1 und a_2 den Stand derselben auf das rechtsliegende, so ist das Mafs des Winkels $= \frac{(a_1 + a_2) - (\alpha_1 + \alpha_2)}{2}$.

Kehrt man das Instrument um, so dafs der Limbus nach Unten gerichtet ist, und betrachtet nun das rechtsliegende Object als das direct gesehene, so erhält man ein zweites Resultat.

Auf dieselbe Weise wird auch die Gröfse der Winkel bis zu 130⁰ bestimmt, indem in diesem Falle die von dem rechtsliegenden Objecte ausgehenden Lichtstrahlen auf den Spiegel unter einem Winkel von $\frac{130^0}{2} + 20^0 = 85^0$ fallen, d. h. in einer Richtung, welche den cylindrischen Fufs des Prisma's berührt, so dafs letzteres und aufserdem auch noch der vordere Theil des Fernrohrs die Lichtstrahlen von Objecten, die einen noch gröfseren Winkel als 130⁰ mit dem linksliegenden Object bilden, nicht mehr auf den Spiegel gelangen läfst. Ist der Winkel zu 180⁰ geworden, so bildet zwar das Prisma nicht mehr, dann aber der Kopf des Beobachters dasselbe Hindernifs, so dafs in diesem Falle nur ein kleines gleichschenklicht-rechtwinklichtes Prisma, welches man vor die Ocularröhre des Fernrohrs steckt, die Beobachtung gestattet. In diesem Falle kann daher der Apparat auch zur Auffindung eines Punktes in einem gegebenen Alignement auf dieselbe Weise benutzt werden, wie das Prismenkreuz von Bauernfeind dazu dient.

Wendet man aber den Spiegel-Prismenkreis, nöthigenfalls in der linken Hand gehalten, in umgekehrter Lage an, so dafs der Limbus dem Erdboden zugekehrt ist, und nimmt man dafür den rechtsliegenden Gegenstand als den direct gesehenen, das reflectierte Bild also von dem linksliegenden, so ist nun auch die Mefsung von Winkeln zwischen 130⁰ und 180⁰ und zwischen 180⁰ und 280⁰, oder, da bei der umgekehrten Lage des Instruments die Drehung der Alhidade nach entgegengesetzter Lage erfolgt, bis zu 100⁰ auf dem Limbus gestattet. Zugleich ergiebt sich hieraus, dafs die zwischen 100⁰ und 130⁰ liegenden Winkel doppelt gemefsen werden können, indem man ein Mal das linksliegende, das andere Mal aber das rechtsliegende Object als das direct beobachtete annimmt.

Anmerkung. Wenn bei geographischen Ortsbestimmungen mit dem Pistor-schen Spiegelprismenkreise Winkeldistanzen zwischen terrestrischen Objecten in Gebirgsgegenden gemessen werden sollen, so werden zur Reduction derselben auf den Horizont wenigstens angenäherte Werthe der Zenithdistanzen der beobachteten Punkte erfordert, indem Höhenwinkel, welche kleiner als 16 Grad sind, mit Hülfe des Reflexionshorizonts nicht in gewöhnlicher Weise bestimmt werden können. Zur Bestimmung solcher Zenithdistanzen erhält der Apparat dann noch ein offenes Ocular und zwei Suchniveaux als Zugabe.

Man vgl. darüber Schumacher's astron. Nachrichten Bd. 50, S. 263, u. II. g. I. S. 535.

§. 253.

3. Mittelst des Steinheil'schen Prismenkreises.

Auch beim Gebrauch des Steinheil'schen Prismenkreises werden nicht nur die im §. 143 angegebenen Sätze, sondern auch die in den §§. 62 und 63 angegebenen Sätze über die totale Reflexion angewandt. Indessen gestattet doch die eigenthümliche Einrichtung dieses Apparats eine zweifache Anwendung desselben zu Winkelbestimmungen, indem das unbewegliche Fernrohr entweder, wie bei den anderen Reflexionsinstrumenten, in der gewöhnlichen Lage des Limbuskreises auf das links- oder bei umgekehrter Lage desselben auf das rechtsliegende Winkelobject gerichtet ist, oder eine zwischen den beiden Objecten in der Mitte liegende Richtung annimmt. In beiden Fällen kann man auch dadurch wieder eine Modification bewirken, dafs man die Seitenebenen der beiden Prismen entweder in eine Ebene bringt, oder nicht. Aufserdem wird die Winkelbestimmung noch wesentlich erleichtert, wenn man sich zu derselben des im §. 155 beschriebenen Stativs bedient.

1. Methode. Das Fernrohr ist auf das linksliegende Object gerichtet.

§. 254.

Obgleich man die Winkelmefsung in jedem beliebigen Punkte des Limbus beginnen lafsen kann, so werde doch angenommen, dafs der Index der Randtheilung auf 180° und der des Verniers 1 auf 0° gestellt sei, dann fallen die Seitenebenen der Prismen nicht in eine Ebene. Man giebt nun gleich anfangs durch Drehung der Rotationsachse HH (Fig. 63) dem Apparat die Lage, dafs seine Kreisebene in die Ebene der Winkelschenkel fällt und zieht dann die Klemme O_1 an. Durch Drehung des beweglichen Theils des Stativs bringt man darauf das Kreisprisma in die Lage, dafs das Bild des linksliegenden Objects P an dem senkrechten Faden des Fernrohrs erscheint, dreht das Alhidadenprisma, bis an demselben Faden das Bild des rechtsliegenden Objects Q

sich zeigt, und bringt durch Anwendung des Mikrometerwerks beide Bilder zur Coincidenz. Das scharfe Erkennen der Bilder wird durch Erhöhung oder Erniedrigung des Fernrohrs erreicht. Nun liest man den Stand des Verniers 1 ab, um die ungefähre Gröfse $^1/_2\ a$ des abgeschnittenen Bogens zu erfahren, wenn a den gesuchten Winkel bezeichnet. Darauf verstellt man durch Lösung der Klemme N (Fig. 61) den Kreis mit der darangeschlofsenen Alhidade um $^1/_2\ a$ auf der Randtheilung, aber selbstverständlich nach dem Fortschreiten der Eintheilung, und bringt durch Drehung der Alhidade das Bild des rechtsliegenden Objects wieder an den Faden des Fernrohrs, so giebt jeder Vernier in Bezug auf dessen ursprüngliche Stellung und nach Anbringung des Indexfehlers den Winkel a und zwar befreit von dem Einflufs der Winkelungleichheit der Prismen und der Excentricität.

Den Indexfehler erhält man auf die schon bekannte Weise, indem man den Index des Verniers 1 ungefähr auf 0° stellt und mittelst der Mikrometerschraube das Alhidadenprisma so weit dreht, bis das Bild des linksliegenden Gegenstandes mit demselben Bilde des Kreisprisma's coincidiert und die halbe Summe der Ablesungen α_1 und α_2 der Verniers 1 und 2 nimmt. Dann ist wieder das Mafs des Winkels, wenn die zuerst erwähnten Ablesungen a_1 und a_2 sind,

$$= {}^1/_2\,[(a_1 + a_2) - (\alpha_1 + \alpha_2)].$$

Aufserdem bietet der Prismenkreis gegen die anderen Reflexionsinstrumente bei der Bestimmung des Indexfehlers noch den Vortheil dar, dafs man dazu jeden nahen, scharf begrenzten Gegenstand benutzen kann, weil das Alhidadenprisma eine concentrische Lage zum Kreisprisma hat.

Im Falle, dafs die Winkelbestimmung nicht auf dem Stativ, sondern aus freier Hand vorgenommen wird, kann man nach der Verstellung des Kreises und der Alhidade um $^1/_2\ a$ auf der Randeintheilung, bei umgekehrter Lage des Instruments, Statt des rechtsliegenden Objects, sich auch des linksliegenden bedienen.

Da wegen des angebrachten Mikrometerwerks die Alhidade gegen das festsitzende Fernrohr um mehr als 90 Grade verstellt werden kann, so lafsen sich von jedem Punkte des Limbus aus zwischen 0° und 180° alle Winkel bis über 90 Grade mefsen.

2. Methode. Das Fernrohr ist nach einem Punkte in der Mitte zwischen den beiden zu beobachtenden Objecten gerichtet.

§. 255.

Diese Methode unterscheidet sich besonders dadurch von der vorhergehenden, dafs das Resultat des Winkels aus zwei Theilen zusammen-

gesetzt wird, die durch eine symmetrische Lage der Prismen auf beiden Seiten der Visierlinie des Fernrohrs sich bestimmen, aus welchem Grunde es auch der Bestimmung des Indexfehlers nicht bedarf, und woraus auch die Möglichkeit der Mefsung von Winkeln bis über 180° hinaus sich ergiebt. Vorzugsweise eignet sich diese Methode aber zu Höhenmefsungen über Reflexionshorizonten. (§. 257.)

Es sei der Index der Randeintheilung auf 0°, der des Verniers 1 auf 180°, wobei die Seitenebenen der Prismen in eine Ebene fallen. Wie bei der vorigen Methode bringt man das Bild des linksliegenden Objects an den Verticalfaden des Fernrohrs, und, indem man den Kreis mit der Alhidade zugleich dreht, durch Drehung und feine Einstellung der Alhidade das Bild des rechtsliegenden Objects mit ihm zur Coincidenz. Wird der zu bestimmende Winkel wieder durch a bezeichnet, so steht nach dieser Operation der Index der Randtheilung auf $0^0 + \frac{1}{4} a$ und der Index des Verniers 1 auf $180^0 + \frac{1}{2} a$.

Darauf bringt man den letzteren Index wieder auf 180°, dreht aber den Kreis mit der Alhidade um 180°, wodurch also die Prismen symmetrisch auf die andere Seite der Visierlinie gelangen und der Index der Randtheilung auf 180° kommt. Man bringt nun aber durch Drehung des Kreises mit der Alhidade das Bild des rechtsliegenden Objects an den Verticalfaden des Fernrohrs und durch Drehung und feine Einstellung der Alhidade, die jetzt also gegen die Limbustheilung erfolgt, das Bild des linksliegenden Gegenstandes mit dem ersteren zur Coincidenz; dann ist wieder der Index des Verniers 1 um einen Bogen $= \frac{1}{2} a$ von seinem Anfangspunkte 180° fortbewegt. Beide Werthe also addiert, giebt den Werth des Winkels für den Vernier 1. Auf dieselbe Weise ergiebt sich auch für den Vernier 2 und aus ihrer Verbindung mit einander der ebenfalls von der Excentricität befreite Werth des Winkels.

B. Mefsung der Höhenwinkel.

§. 256.

Die Mefsung der Höhenwinkel mittelst der Reflexionsinstrumente unterscheidet sich dadurch wesentlich von der, welche mit den in Abschnitt 2 Capitel 1 beschriebenen Instrumenten ausgeführt wurde, dafs hier nur von der Bestimmung der Elevations- oder Depressionswinkel, nicht aber von der Mefsung der Zenithdistanzen die Rede sein kann, weshalb auch bei Mefsungen, die auf dem Festlande vorgenommen werden, immer ein Reflexionshorizont angewandt werden mufs.

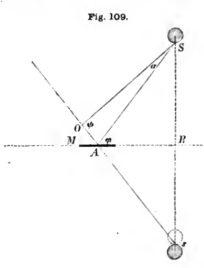
Das Verfahren mit dem Sextanten und dem Pistor'schen Spiegel-Prismenkreise bleibt im Allgemeinen dasselbe, nur dafs bei dem letzteren das Prisma die Stelle des kleinen Spiegels einnimmt. Der Steinheil'sche

Prismenkreis gestattet zwar auch die Anwendung des nämlichen Verfahrens; jedoch auch noch ein zweites, dem im vorigen Paragraphen angegebenen entsprechend, das durch die concentrische Lage der beiden Glasprismen bedingt ist.

Man stellt in einigen Fufs Entfernung vom Standpunkte einen der im §. 158 beschriebenen Reflexionshorizonte so auf, dafs man eben sowohl das Höhenobject direct, als auch dessen vom Horizonte reflectiertes Bild sehen kann und hält das Reflexionswerkzeug so in die Verticalebene des Winkels, dafs man durch den Ring und durch den unbelegten Theil des kleinen Spiegels, oder über dem Prisma weg beim Spiegel-Prismenkreise, das Bild im Horizonte sieht. Darauf dreht man die Alhidade mit dem grofsen Spiegel soweit, bis das doppelt reflectierte Bild in der Nähe des ersteren erscheint. Dann schraubt man das Fernrohr ein und bringt an seinem Verticalfaden durch Anwendung der Mikrometerschraube beide Bilder zur Coincidenz, so ist mit Berücksichtigung des zu bestimmenden Indexfehlers für nahe terrestrische Objecte der vom Index des Verniers abgeschnittene Bogen dem doppelten Höhenwinkel gleich.

Beim Steinheil'schen Prismenkreise wird das im Horizonte liegende Bild des Objects durch das Kreisprisma mittelst Drehung des Kreises und der Alhidade beobachtet und dann der Kreis gehemmt; darauf die Alhidade so weit gedreht, dafs beide Bilder an dem Faden des Fernrohrs erscheinen; durch Anwendung der Mikrometerschraube werden dann beide Bilder zur Coincidenz gebracht.

Fig. 109.



Wäre das Auge des Beobachters in dem Punkte A des Reflexionshorizonts M (Fig. 109), in welchem sowohl der leuchtende Punkt S als dessen optisches Bild s coincidieren, so würde der halbe abgelesene Winkel den Höhenwinkel $SAB = \varphi$ angeben. Da aber das Auge hinter dem Fernrohre des Reflexionsapparats in einem bestimmten Abstande $OA = a$ sich befindet, so ist, wenn man die dem Winkel SOA entsprechende Ablesung am Kreise $= \psi$ setzt,

$$2\varphi = \psi + \alpha,$$

welchen Winkel α man die Höhenparallaxe der Beobachtung nennt. Setzt man $AS = b$, so ist

$$\sin \alpha = \frac{a}{b} \sin \psi,$$

oder, da α immer einen sehr kleinen Winkel darstellt,

$$\alpha = \frac{a}{b} \sin \psi \,.\, 206265 \text{ Sekunden},$$

folglich ist $\varphi = \frac{1}{2} \psi + \frac{a}{2b} \sin \psi \,.\, 206265$ Sekunden.

Bei der Mefsung der Höhen der Gestirne bedarf man dieser Correction nicht, da bei ihnen $SO \mathrel{\#} SA$, also $\psi = \varphi$ ist.

§. 257.

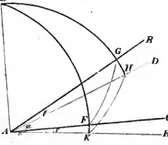
Der Steinheil'sche Prismenkreis gestattet noch eine zweite Art der Höhenbestimmung, welche der bei der Mefsung schiefliegender Winkel analog ist. Da aber dabei das Fernrohr eine horizontale Lage haben mufs, so ist der Apparat entweder aus freier Hand zu gebrauchen, oder bei der Anwendung des Stativs nur soweit auf der Schraube L (Fig. 63) zu befestigen, dafs das in den Ring H (Figg. 61 und 62) geschraubte Fernrohr die horizontale Lage bekommt. Substituiert man nun bei den Mefsungen der schiefliegenden Winkel für das linksliegende Object hier das Bild im Reflexionshorizonte, für das rechtsliegende aber das wirkliche Höhenobject, so giebt jede Ablesung an den Verniers für sich die von dem Einflufs der Winkelungleichheit der Prismen, der Excentricität und des Indexfehlers befreite Höhe über dem Horizont.

C. Reduction schiefliegender Winkel auf den Horizont des Standortes.

§. 258.

Es sei in Fig. 110 $BAC = \alpha$ der gemefsene Winkel, dessen Schenkel hier oberhalb der durch A gedachten Horizontalebene DAE angenommen werden mögen. Setzt man $BAD = \beta$ und $CAE = \gamma$ und denkt sich aus A eine Kugel beschrieben, in A auf DAE die Normale AZ errichtet und nun durch AB, AC und AZ gröfste Kreise gelegt, so sind in dem sphärischen Dreiecke ZFG die drei Seiten $FG = \alpha$, $ZG = 90^0 - \beta$ und $ZF = 90^0 - \gamma$ bekannt; da nun der Bogen KH als Mafs des gesuchten Winkels auch das Mafs des sphä-

Fig. 110.



rischen Winkels FZG ist, so erhält man, da nach der sphärischen Trigonometrie

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left(\frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b) \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b \sin c}\right)} \text{ ist},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} Z = \sqrt{\left(\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\cos \beta \cos \gamma}\right)}.$$

Liegt der eine Schenkel des gemefsenen Winkels, z. B. AB unter dem Horizonte DAE, so ist β negativ zu nehmen und da $\cos(-\beta) = \cos \beta$ ist, so erhält man für diesen Fall

$$\sin \tfrac{1}{2} Z = \sqrt{\left(\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) \sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta-\gamma)}{\cos \beta \cos \gamma}\right)}.$$

In dem Falle, dafs beide Winkel β und γ Depressionswinkel sind, gilt wieder die zuerst angegebene Formel.

Für $\alpha = 79^0\ 5'$, $\beta = -20^0\ 18'$, $\gamma = 15^0\ 25'$, erhält man $Z = 71^0\ 51'\ 8''$; setzt man dagegen $\beta = 20^0\ 18'$, so ist $Z = 83^0\ 48'\ 38''$.

VI. Die Zuverläfsigkeit der Winkelmefsungen mit den winkelmefsenden Werkzeugen und die Ausgleichung derselben.

§. 259.

Die Erfahrung lehrt, dafs selbst bei der einfachsten Art der Mefsungen, und ungeachtet der gröfsten dabei angewandten Sorgfalt und der Entfernung aller der Umstände, welche möglicherweise einen Fehler veranlafsen können, fortgesetzte Wiederholungen der nämlichen Mefsung stets etwas verschiedene Resultate geben, weshalb auch keine unmittelbar und daher auch keine mittelbar gemefsene Gröfse für absolut richtig gehalten werden kann, sondern mit einem Fehler behaftet angesehen werden mufs.

Aufser den s. g. **groben**, aus Nachläfsigkeit entstandenen Fehlern, die aber bei gehörig angewandter Sorgfalt immer zu vermeiden sind und deshalb hier nicht weiter in Betracht kommen können, sind es

1. solche, die unter denselben Umständen nach einem bestimmten Gesetze immer wiederkehren und deshalb **regelmäfsige** oder **constante Fehler** genannt werden. Da die Ursachen derselben, also auch ihre Gröfsen immer ermittelt werden können, so lafsen sie sich theils durch die Art der Mefsung, theils durch Berechnung wegschaffen.

Dahin gehören u. a. die in den §§. 221 — 223 angegebenen Fehler, der Indexfehler, der Fehler wegen der Refraction des Lichts u. a.

2. Sind die Fehler solche, welche veränderliche und uns oft unbekannte Ursachen haben und deren Einwirkung auf die Mefsungen keinem bestimmten Gesetze unterliegt und deshalb **unregelmäfsige, zufällige, unvermeidliche Fehler** genannt werden.

Hierher gehören die aus der Unvollkommenheit unserer Sinne beim Einstellen und Ablesen entstehenden Fehler; ferner die, welche den Mefsapparaten, wegen der vom Künstler nur annähernd erreichten idealen Construction angehören; so wie die, welche in äufseren verändernden Umständen ihren Grund haben, wie in der verschiedenen Beleuchtung der Richtobjecte, in den Luftzitterungen u. a.

Diese unvermeidlichen Fehler sind demnach nie die Ursache eines einzelnen Umstandes, sondern sie können angesehen werden als die Summe einer unbestimmten Anzahl einzelner s. g. Elementarfehler, welche theilweise von einander ganz unabhängig sind und denen daher auch, gröfserer Einfachheit wegen, eine gleiche absolute Gröfse beigelegt werden kann.

Deshalb kann aber auch der Einflufs jeder einzelnen Fehlerquelle der Rechnung nicht unterworfen werden, sondern es kann nur die Aufgabe des Geodäten sein, aus einer Reihe von Resultaten, die aus einer Mefsung hervorgegangen sind, denjenigen Werth zu bestimmen, welcher unter allen dem kleinsten Fehler unterworfen, also dem der Wahrheit nächste oder der wahrscheinlichste ist. Die Lösung dieser Aufgabe nennt man die Ausgleichungsrechnung.

§. 260.

Um sich aber eine Kenntnifs von der Genauigkeit der Resultate einer Mefsung verschaffen zu können, müfsen s. g. überschüfsige Beobachtungen oder Probemefsungen angestellt werden. Dann zeigen sich die unvermeidlichen Fehler in den Widersprüchen, die aus der Mefsung hervorgehen, dafs z. B. die Summe der Winkel eines $n$ecks $\gtrless (n-2)\,2\,R$, die Summe der um einen Punkt herum gemefsenen Horizontalwinkel $\gtrless 4\,R$ ist, u. s. w.

§. 261.

Es lehrt wieder die Erfahrung, dafs bei gleich genauen Mefsungen, solange die Zahl derselben noch gering ist, oft sehr verschiedene Resultate, also die unvermeidlichen Fehler in ganz willkürlicher oder zufälliger Verschiedenheit, theils positiv, theils negativ sich zeigen; dafs aber, wenn die Zahl der Mefsungen fortgesetzt wird, gewifse Resultate häufiger, andere dagegen seltener hervortreten, so dafs das früher Zufällige sich zu verlieren beginnt und Resultate sich ergeben, die von einem bestimmten nur weniger abweichen, so dafs dem letzteren ein s. g. mittlerer Fehler zugeschrieben werden mufs. Man wird demnach zu dem Schlufse berechtigt sein, dafs bei einer bestimmten Art von Mefsungen sowohl die Anzahl der Fehlerquellen oder der Elementarfehler, als auch die Anzahl ihrer Verbindungen, die sie eingehen können,

dieselbe bleibt und dafs, wenn diese Verbindung wieder vorkommt, auch derselbe Fehler angenommen werden darf. Stellt x den Beobachtungsfehler einer bestimmten Mefsung vor, der aus den Elementarfehlern $+\Delta x$ und $-\Delta x$ in beliebiger Zahl m und in beliebigen Verbindungen derselben zu Unionen, Binionen, Ternionen u. s. w. zusammengesetzt ist, so ist einleuchtend, dafs wenn x zusammengesetzt ist

1. aus $m . + \Delta x$, diese Verbindung nur 1 Mal,
2. „ $(m-1). + \Delta x$ u. $1 . - \Delta x$, diese Verbindung zu Eins m Mal,
3. „ $(m-2). + \Delta x$ „ $2 . - \Delta x$, „ „ „ Zwei $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ „

$\vdots$

„ $(m-2). - \Delta x$ u. $2 . + \Delta x$, „ „ „ Zwei $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ „
„ $(m-1). - \Delta x$ „ $1 . + \Delta x$, „ „ „ Eins m „
u. „ $m . - \Delta x$, diese Verbindung wieder nur 1 Mal

vorkommen kann. Da aber die rechtsstehenden Ausdrücke die Binomialcoeffieienten eines Binoms ausdrücken, welche bis zum mittelsten Gliede wachsen und dann eben so wieder abnehmen, so folgt, dafs die beiden äufsersten Fehler $m . \pm \Delta x$, zu deren Entstehung die sämmtlichen Elementarfehler in demselben Sinne beigetragen haben, nach den Principien der Wahrscheinlichkeit am wenigsten häufig vorausgesetzt werden dürfen, und dafs die relative Möglichkeit der Fehler desto gröfser wird, je mehr sie in der Mitte der obigen Darstellung liegen, d. h. je kleiner die absolute Gröfse desselben ist. Es folgt ferner, dafs 2 Beobachtungsfehler, welche von gleicher absoluter Gröfse sind, auch eine gleiche relative Möglichkeit haben werden.

§. 262.

Damit aber die durch bestimmte Mefsungen entstandenen Widersprüche sich heben, werden mit den Resultaten der Mefsung Umänderungen d. h. Verbefserungen vorzunehmen sein. Hierbei dient nun folgender Satz als Grundsatz: für jede beliebige Anzahl von Resultaten einer bestimmten Mefsung oder verschiedener bestimmter Mefsungen sind diejenigen Werthe die wahrscheinlichsten, für welche die Summe der Quadrate der Fehler oder Verbefserungen ein Minimum ist, weshalb auch die diesem Satze zum Grunde liegende Ausgleichungsrechnung die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate genannt wird.

Diese findet also immer da ihre Anwendung, wo die zu bestimmenden Gröfsen zwischen Gränzen liegen und Gleichungen zwischen Be-

kannten und Unbekannten voransgesetzt werden, von welchen letzteren aber nur die wahrscheinlichsten Werthe gefunden werden sollen.

§. 263.

Bei der Anwendung der Ausgleichungsrechnung darf aber nicht übersehen werden, dafs, da die zu bestimmenden Gröfsen stets benannte Zahlen sind, vor der Rechnung die anzubringenden Verbefserungen durch die benannte Einheit zu dividieren, nach derselben aber wieder zuzusetzen sind. Diese einfache Umänderung findet nur bei Mefsungen von derselben Art und Beschaffenheit Statt, wie bei Winkelbestimmungen, die mit demselben Theodolith ausgeführt sind; ist die Art der Beobachtungen aber verschieden, wie es bei Ausgleichungen, wobei Winkel- und Linienbestimmungen gemacht sind, der Fall ist, so mufs für jede derselben die Einheit erst ermittelt und festgestellt werden.

Anmerkungen. Ueber die Quellen der Methode der kleinsten Quadrate vergleiche man:

C. F. Gaufs, Theoria motus corporum coelestium etc. Hamburg, 1809. Lib. II. Sect. III., wovon auch eine deutsche Uebersetzung von C. Haase, Hannover, 1865, erschienen ist; so wie dessen Abhandlungen in v. Lindenau's Zeitschrift für Astronomie I. S. 185 und in den Comment. Goetting. von den Jahren 1808—1811 und 1821—1828.

Laplace, Théorie analytique de la probalité. Paris, 1806.

Enke, Berliner astronom. Jahrbuch, 1834—1836, wovon in Fischer's Lehrbuch der höheren Geodäsie, Darmstadt, 1845, ein Abdruck sich findet.

Eine Abhandlung von Wittstein in der Uebersetzung von Navier's Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Hannover, 1848.

Ueber Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate vergleiche man:

Legendre, Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Paris, 1806.

Paucker, über die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Mitau, 1819.

Hagen, die Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin, 1837.

Gerling, die Ausgleichungs-Rechnungen der praktischen Geometrie. Hamburg, 1843.

v. Freeden, die Praxis der Methode der kleinsten Quadrate. Braunschweig, 1863.

Sawitsch, die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Berechnung der Beobachtungen und geodätischen Mefsungen. Mitau, 1863.

§. 264.

Bei den Ausgleichungsrechnungen wird entweder 1) nur eine einzige bestimmte Gröfse gesucht, von der selbstverständlich eine Reihe von Resultaten wiederholter Mefsungen gegeben sind, in welchem Falle die Beobachtungen directe genannt werden, oder 2) es sollen bei irgend einer Anzahl von unbekannten Gröfsen aus gegebenen Beobachtungen die wahrscheinlichsten Werthe der letzteren bestimmt werden.

Bei diesen können die Beobachtungsgröfsen a. von der Art sein, dafs die gesuchten unbekannten Werthe derselben völlig unabhängig von einander sind und nicht bestimmten Bedingungen entsprechen müfsen. Beobachtungen von dieser Beschaffenheit pflegt man vermittelnde zu nennen.

b. Oder die Beobachtungsgröfsen sind von der Art, dafs gewifse Bedingungen vorhanden sind, welchen die gesuchten wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten entsprechen müfsen, weshalb solche Beobachtungen bedingte genannt werden.

Die directen Beobachtungen hat man bei der Bestimmung des wahrscheinlichsten Werthes einer Linie oder eines Winkels, eines Gefälles zwischen zwei Punkten, wenn von denselben mehrfach wiederholte Mefsungen vorliegen, also bei Horizontal- und Verticalwinkelbestimmungen, wenn es sich nur um einen Winkel handelt; bei Linien- oder Gefällmefsungen unter denselben Bedingungen; bei der Bestimmung der Winkel um einen gegebenen Punkt, wenn immer nach allen Richtobjecten visiert werden kann u. s. w. Zu den vermittelnden Beobachtungen gehört die Bestimmung der wahrscheinlichsten Richtungen, die von einem Punkte aus mit einem Theodolith nach rund herum liegenden Richtobjecten genommen sind, wenn die letzteren nicht immer einvisiert werden konnten. Eben so die Bestimmung der Theile AC, CB einer Linie AB, wenn die Mefsungen für AC, AB, CA, CB, BC, BA zu wiederholten Malen ausgeführt sind, oder die Bestimmung der Theile eines auf dieselbe Weise gemefsenen Winkels u. s. w.

Die bedingten Beobachtungen kommen vorzugsweise in einem Dreieckssystem vor, für welches die bekannte Bedingung für die Summe der Winkel in jedem der vorhandenen Dreiecke, so wie die Bedingung erfüllt werden mufs, dafs alle von anderen Punkten nach einem bestimmten Punkte genommenen Richtungen sich in einem und demselben Punkte schneiden müfsen. Eben so bei Polygonmefsungen, bei welchen sämmtliche Seiten und Winkel gemefsen sind u. s. w. Hier soll zunächst nur von der Ausgleichung der directen Beobachtungen, und, obgleich dieselben wieder von der Art sein können, dafs man ihnen gleiche Genauigkeit beilegen darf, oder dafs dieselbe verschieden ist, doch nur von der ersteren Art derselben die Rede sein, da Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit in den gewöhnlichen Fällen der Feldmefskunst immer vermieden werden können.

Die Ausgleichung vermittelnder und bedingter Beobachtungen wird im 4. Abschnitt zur Sprache kommen.

§. 265.

Sind von einer beliebigen Beobachtungsgröfse lauter Beobachtungen von gleicher Genauigkeit gemacht, so ist der

wahrscheinlichste Werth derselben dem arithmetischen Mittel aus den einzelnen Beobachtungen gleich.

Es seien die einzelnen Beobachtungen a, a_1, a_2, a_3 . . . . ., deren Anzahl $= n$, der wahrscheinlichste Werth der gesuchten Gröfse $= A$ und die Fehler der einzelnen Beobachtungen beziehungsweise

$$x, x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots,$$

so sind die ausgeglichenen Beobachtungen $a + x$, $a + x_1$, $a + x_2$, ... alle einander gleich.

Man erhält daher

$$x = A - a$$
$$x_1 = A - a_1$$
$$x_2 = A - a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Nach der Theorie der Methode der kleinsten Quadrate ist der wahrscheinlichste Werth A derjenige, für welchen die Summe $x\,x + x_1\,x_1 + x_2\,x_2 + \ldots.$, welche nach Gaufs's Vorschrift durch $(x\,x)$ bezeichnet wird, ein Minimum wird. Bildet man demnach die Summe der Quadrate der obigen Gleichungen und bezeichnet dieselbe durch $2\,\Sigma$, so ist

$$2\,\Sigma = (A - a)^2 + (A - a_1)^2 + (A - a_2)^2 + \ldots.$$

Da hier nur A als die einzige Veränderliche zu betrachten ist, so erhält man, da 2Σ ein Minimum sein soll

$$\frac{d\Sigma}{dA} = 0 = (A - a) + (A - a_1) + (A - a_2) + \ldots\ldots,$$

folglich $$A = \frac{a + a_1 + a_2 + \ldots.}{n}.$$

Wird also das arithmetische Mittel der einzelnen Beobachtungen für die gesuchte Beobachtungsgröfse durch M bezeichnet, so ist nach der bekannten Bezeichnungsart

$$M = \frac{(a)}{n} \qquad \text{N. 1.}$$

für welchen Ausdruck nur nicht zu übersehen ist, dafs M nicht der wirkliche wahre Werth für A ist, sondern nur als der wahrscheinlichste Werth dafür, den vorliegenden Beobachtungen gemäfs, angesehen werden darf und dafs er es solange bleibt, als nicht neue Umstände, also neue Mefsungen hinzutreten.

§. 266.

1. Die Fehler der einzelnen Beobachtungen erhält man demnach aus:

$$x = M - a,$$
$$x_1 = M - a_1,$$
$$x_2 = M - a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

folglich $$(x) = n\,M - (a) = n\,\frac{(a)}{n} - (a) = 0. \qquad \text{N. 2.}$$

d. h. die Summe der Fehler der einzelnen Beobachtungen ist gleich Null.

2. Ebenso erhält man, wenn man die vorigen Gleichungen quadriert,

$$(x\,x) = n\,M\,M - 2\,(a)\,M + (a\,a)$$

oder nach Substitution von N. 1 des vorigen Paragraphen

$$(x\,x) = (a\,a) - \frac{(a)^2}{n}.$$

§. 267.

In praktischer Beziehung ist es wichtig, gewifse Werthe von dem Fehler der einzelnen Beobachtungen zu bestimmen, welche einen Schlufs auf die Genauigkeit der bereits gemachten oder noch zu machender Beobachtungen gestatten.

1. Mittlere Abweichung der vorliegenden Beobachtungen vom arithmetischen Mittel $= \alpha$.

Da die Quadratsumme der nach dem Vorhergehenden sich ergebenden Fehler ein Minimum ist, so wird man letztere solange als die ansehen müfsen, welche sich der Wahrheit am meisten nähern, so lange man kein Mittel hat, den Werth von M (§. 265) näher zu bestimmen. Denkt man sich also eine zweite Beobachtungsreihe mit demselben M und demselben $(x\,x)$, so kann man den Fehler dieser fingierten Beobachtungsreihe, der von M gleich viel abweicht, die mittlere Abweichung der ersten Beobachtungen vom arithmetischen Mittel nennen.

Da nun bei n gegebenen Beobachtungen

$$n \,.\, \alpha\,\alpha = (x\,x)$$

ist, so erhält man $$\alpha = \pm \sqrt{\frac{(x\,x)}{n}}. \qquad \text{N. 3.}$$

Diesen Werth benutzt man, um die Güte verschiedener Beobachtungsreihen, die mit verschiedenen Mefsapparaten unter übrigens gleichen Umständen angestellt sind, zu erkennen. Je kleiner daher α gefunden wird, für desto genauer müfsen die Beobachtungen gelten.

2. Der mittlere oder zu befürchtende Fehler m.

§. 268.

Da es aber darauf ankommen mufs, die mittlere Abweichung von der gesuchten wahren Gröfse zu erfahren, die indessen, da letztere nicht bekannt, nur annäherungsweiše bestimmt werden kann, so nennt man jene Abweichung für die vorliegenden Beobachtungen den mitt-

leren, oder in Bezug auf noch folgende, den zu befürchtenden Fehler.

Bezeichnet man die Verbefserungen, welche an die Beobachtungen a, a_1, a_2 ... angebracht werden müfsten, damit sie dem wahren A gleich kämen, beziehungsweise durch χ, χ_1, χ_2, ... so würde

$$n \,.\, mm = (\chi\chi)$$

sein. Obgleich man nun $(\chi\chi)$ nicht kennt, so lehrt doch die Erfahrung, dafs man als wahrscheinlichsten Werth dafür $(xx) + mm$ annehmen kann. Denn wäre zu den n Beobachtungen noch eine neue hinzugekommen, ohne dafs man bestimmt wüfste, welchen Werth sie gegeben hätte, so würde man doch dem (xx) noch den Werth mm hinzufügen müfsen, ohne dafs an den vorhandenen Beobachtungen etwas verändert würde. Es ist daher

$$n \,.\, mm = (xx) + mm,$$

worans

$$m = \pm \sqrt{\frac{(xx)}{n-1}} \qquad \text{N. 4.}$$

folgt.

§. 269.

1. Durch die Kenntnifs des m wird man also auch einen sicheren Schlufs auf noch folgende Beobachtungen machen können, die unter einerlei Umständen angestellt sind. Für eine solche Beobachtung a würden nämlich durch $a \pm m$ die Gränzen ausgedrückt, innerhalb welcher die gesuchte Gröfse A anzunehmen sein würde.

2. Aus der Vergleichung der Werthe für α und m ergiebt sich, dafs m stets gröfser als α sein mufs, dafs man sich aber mit m dem α um so mehr nähert, je gröfser die Anzahl der Beobachtungen ist. Setzt man daher $n = \infty$, so ist $\alpha = m$, d. h. bei einer unendlich grofsen Zahl von Beobachtungen kann man das gefundene arithmetische Mittel M der wahren Gröfse gleich setzen.

3. Das Umgekehrte von m, nämlich $\frac{1}{m}$, nennt man im engeren Sinne die Genauigkeit der Beobachtungen. In zwei Reihen von Beobachtungen, deren mittlere Fehler sich wie 1 : 2 verhalten, wird das Verhältnifs der Genauigkeiten = 1 : $\frac{1}{2}$ sein.

3. Der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels μ.

§. 270.

Der Fehler, welcher in dem arithmetischen Mittel M einer Beobachtungsreihe zu befürchten ist, wenn in den einzelnen Beobachtungen der Fehler m zu befürchten war, wird der mittlere Fehler des Mittels genannt.

Es ist daher

$$A - M = \pm \mu$$

und es werden die einzelnen Beobachtungen a, a_1, $a_2 \ldots$, um jede $= A$ zu machen, nicht um x, x_1, $x_2 \ldots$, sondern um

$$\chi = x \pm \mu,\ \chi_1 = x_1 \pm \mu,\ \chi_2 = x_2 + \mu \ldots$$

zu verbefsern sein. Es geht alsdann die Gleichung des §. 268

$$(\chi\chi) = n \cdot mm$$

über in

$$((x \pm \mu)^2) = n \cdot mm;$$

folglich ist

$$(xx) \pm 2\,\mu\,(x) + n\,\mu^2 = n \cdot mm$$

oder, da nach N. 2

$$(x) = 0$$

und nach N. 4

$$(n - 1)\,mm = (xx) \text{ ist,}$$

$$(n - 1)\,mm + n\,\mu^2 = n \cdot mm,$$

woraus

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad \text{N. 5.}$$

folgt.

Da nach N. 4

$$m = \pm \sqrt{\frac{(xx)}{n-1}} \text{ ist,}$$

so erhält man auch

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{(xx)}{n\,(n-1)}}. \qquad \text{N. 6.}$$

Der zu befürchtende Fehler μ des arithmetischen Mittels ist daher nach N. 5 dem mittleren Fehler m der einzelnen Beobachtungen gerade und der Quadratwurzel aus der Zahl der Beobachtungen umgekehrt proportional, so dafs daher bei demselben m die Beobachtungszahl im quadratischen Verhältnifse vermehrt werden mufs, wenn μ sich im einfachen Verhältnifse vermindern soll.

4. Der wahrscheinliche Fehler w und ω.

§. 271.

Der Fehler von der Beschaffenheit, dafs er bei gegebenen Beobachtungen eben so oft überschritten als nicht erreicht wird, nennt man den wahrscheinlichen Fehler. Derselbe ist nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung immer

$$= 0{,}674489 \cdot m \qquad \text{N. 7.}$$

wofür man aber annäherungsweise $\frac{2}{3}\,m$ setzen darf.

Es ist daher auch der wahrscheinliche Fehler des arithmetischen Mittels

$$\omega = 0{,}674489\,\mu. \qquad \text{N. 8.}$$

§. 271 a.

Zur Erläuterung und Anwendung der bis jetzt abgeleiteten Formeln diene 1. das folgende Beispiel der Bestimmung eines Winkels mit einem

10zölligen Theodolith, dessen 4 Verniers unmittelbar 10 Sekunden angaben. Die nachfolgenden Werthe stellen das Mittel aus beiden Lagen des Fernrohrs vor.

n	a	x +	x −	$\log x$	$\log xx$	xx
1	118° 19' 42,"50	6,122	—	0,78689	1,57379	37,479
2	50, 00	—	1,378	0,13925	0,27850	1,899
3	41, 25	7,372	—	0,86759	1,73517	54,346
4	56, 88	—	8,258	0,91687	1,83375	68,194
5	52, 50	—	3,878	0,58861	1,17722	15,039
6	51, 88	—	3,258	0,51295	1,02590	10,615
7	46, 25	2,372	—	0,37511	0,75023	5,626
8	53, 13	—	4,508	0,65398	1,30797	20,322
9	60, 00	—	11,378	1,05607	2,11213	129,459
10	55, 63	—	7,008	0,84559	1,69119	49,112
11	40, 63	7,992	—	0,90266	1,80531	63,872
12	49, 38	—	0,758	0,87967 − 1	0,75934 − 1	0,575
13	51, 25	—	2,628	0,41963	0,83925	6,906
14	51, 25	—	2,628	0,41963	0,83925	6,906
15	41, 88	6,742	—	0,82879	1,65758	45,454
16	44, 25	4,372	—	0,64068	1,28136	19,114
17	45, 63	2,992	—	0,47596	0,95192	8,952
18	46, 88	1,742	—	0,24105	0,48210	3,035
19	52, 50	—	3,878	0,58861	1,17722	15,039
20	48, 75	—	0,128	0,10721 − 1	0,21442 − 2	0,016
21	40, 63	7,992	—	0,90266	1,80531	63,872
22	42, 50	6,122	—	0,78689	1,57379	37,479
23	52, 50	—	3,878	0,58861	1,17722	15,039
24	56, 25	—	7,628	0,88241	1,76482	58,187
25	41, 25	7,372	—	0,86759	1,73517	54,346
	$(a) = 1215{,}55$ $M = \frac{1215{,}55}{25} = 48{,}622$	61,192 (x)	61,192 $= 0$		$(xx) =$	790,883

$$\begin{aligned}
\log (xx) &= 2{,}89811 \\
-\quad n &= 1{,}39794 \\
&\ 2)\ \overline{1{,}50017} \\
\log \alpha &= 0{,}75008 \\
\alpha &= \pm 5{,}''624.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log (xx) &= 2{,}89811 \\
-\, n - 1 &= 1{,}38021 \\
&\ 2)\ \overline{1{,}51790} \\
\log m &= 0{,}75895 \\
m &= \pm 5{,}''741.
\end{aligned}$$

Da nun $M = 48{,}622$,
so mufs eine folgende Beobachtung des Winkels mit demselben Theodolith

höchstens 54,"363
und mindestens 42,"881

geben.

$$\log (x x) = 2{,}89811$$

$\log n = 1{,}39794$
$\log (n - 1) = 1{,}38021$

$$\log n (n-1) - 2{,}77815$$
$$0{,}11996$$
$$\log \mu = 0{,}05998$$
$$\mu = \pm 1{,}''148.$$

Da nun $M = 48{,}''622$,
so kann die wahre Gröfse des gemefsenen Winkels

höchstens 49,"770
und mufs mindestens 47,"474

betragen.

Da hier $\sqrt{n} = 5$ ist, so enthält das gefundene arithmetische Mittel von 48",622 eine 5 Mal so grofse Genauigkeit, als jede einzelne Beobachtung geben würde.

Ferner ist $w = 0{,}674489 \,.\, 5{,}''741 = 3{,}''872$, d. h. jede einzelne Beobachtung ist unter übrigens gleichen Umständen einem Fehler von fast 4 Sekunden unterworfen.

2. Zwischen 2 Punkten A und B ist der Höhenunterschied durch folgende Nivellements gefunden:

	x +	x −	$x x$
a = 5' 2" 7,'"50	—	0,16	0,0256
a_1 = 8, 25	0,59	—	0,3481
a_2 = 6, 75	—	0,91	0,8281
a_3 = 8, 00	0,34	—	0,1156
a_4 = 7, 25	—	0,41	0,1681
a_5 = 7, 00	—	0,66	0,4356
a_6 = 6, 75	—	0,91	0,8281
a_7 = 7, 25	—	0,41	0,1681
a_8 = 8, 25	0,59	—	0,3481
a_9 = 8, 75	1,09	—	1,1881
a_{10} = 8, 50	0,84	—	0,7056
(a) = 84, 25	3,45	3,46	5,1591
also nach N. 1 M = 7,'"659	=	(x)	= $(x x)$
= 7,'"66			

$\log (x\,x) = 2{,}71257 - 2$
$\log n - 1 = 1{,}00000$
$1{,}71257 - 2$
$\log m = 0{,}85629 - 1$
$m = 0,'''718.$

$\log m = 0{,}85629 - 1$
$\log \sqrt{11} = 0{,}52070$
$\log \mu = 0{,}33559 - 1$
$\mu = 0{,}21657$

Nach N. 7 ist daher $\omega = 0,''48$.

Der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtnng beträgt also 0,'''7, der wahrscheinliche Fehler derselben 0,'''48 und der Fehler, den man bei der Annahme des Gefälles von 5' 2'' 7,'''66 begeht, beträgt nur 0,'''22 d. h. man kann 1 gegen 1 wetten, dafs in dem Resultate 5' 2'' 7,'''66 nicht ein Fehler vorkommt, der die Gröfse von 0,'''22 übersteigt.

§. 272.

Es dienen die im Vorhergehenden abgeleiteten Ausdrücke für M, α, m und μ nicht allein zur Bestimmung einer gewifsen Beobachtungsgröfse, von welcher eine bestimmte Anzahl von Beobachtungen vorliegt, sondern man wird dadurch auch in den Stand gesetzt, die Genauigkeit zu prüfen, welche verschiedene Mefsapparate bei der Winkelmefsung gestatten.

Auf ähnliche Weise kann man die Gröfse der α, m und μ finden für bestimmte Längen von Linien, welche mittelst der Mefsstäbe, der Mefskette und des Distanzmefsers gemefsen, oder deren Gefälle mittelst verschiedener Nivellierwerkzeuge bestimmt sind und erhält hierdurch erst eine Kenntnifs der Genauigkeit jedes einzelnen Mefsapparats.

Es erscheint daher schon die Kenntnifs der Ausgleichung directer Beobachtungen für jeden Praktiker als durchaus nothwendig.

Zweiter Abschnitt.

Gebrauch der Mefsapparate zum Abstecken und zur unmittelbaren Mefsung der Linien.

I. Das Abstecken gerader Linien.

§. 273.

Eine gerade Linie ist zwar schon durch ihre Endpunkte bestimmt und bedarf daher insofern nur der Bezeichnung jener Endpunkte; allein da es nach §. 3 bei allen Horizontalaufnahmen auf die Be-

stimmung der Horizontalprojection der auf dem Felde gegebenen räumlichen Gröfsen ankommt, so wird man zum Kenntlichmachen der Linien, wie es beim Mefsen derselben erforderlich ist, oder um den Durchschnittspunkt zweier sich schneidender Linien zu bestimmen, eine Verticalebene, ein Alignement, durch die Linien zu legen haben. Bei einer Linie, deren Endpunkte eine bedeutende Entfernung von einander haben, oder zwischen welchen Hindernisse der Art sich finden, dafs der eine aus dem andern nicht gesehen werden kann, wird man eine Verticalebene bestimmen müfsen, welche mit dem Alignement der gegebenen Punkte zusammenfällt. Diese Bestimmungen auf dem Felde sind es, welche man das Abstecken oder Ausbaken der Linien nennt. Man bedient sich dazu der im §. 212 beschriebenen Baken oder auch längerer Pfähle.

§. 274.

Im Allgemeinen wird es beim Abstecken einer Linie nur darauf ankommen, eine Bake in eine solche Stellung gegen zwei schon vorhandene, künstliche oder natürliche Signale zu bringen, dafs das eine durch die beiden andern gedeckt erscheint, ein Verfahren, welches nur die Anwendung des Grundgesetzes der Orthoptik erfordert und daher auch keiner besondern Regeln bedarf, sobald bei der Bestimmung von Punkten in einer geraden Linie oder in ihrer Verlängerung wenigstens der eine ihrer Endpunkte zugänglich, der andere aber kenntlich gemacht ist.

Wenn aber die kenntlich gemachten Endpunkte einer gegebenen geraden Linie nicht zugänglich sind, oder der eine, zwischenliegender Hindernifse wegen, aus dem andern nicht gesehen werden kann, so kommt es darauf an, durch Zwischensignale zwei oder mehrere Hülfsverticalebenen abzustecken und diese allmählich mit dem gegebenen Alignement zum Zusammenfallen zu bringen. Die Zwischensignale sind auf solche Punkte zu bringen, dafs man von dem einen noch zwei derselben, oder doch eins von diesen und das in dem einen Endpunkte des gegebenen Alignements befindliche Signal sehen kann. Es wird hinreichen, hier nur die Möglichkeit von dem anzuwendenden Verfahren zu betrachten. Ist in Fig. 111 AB das gegebene Alignement, so wähle man die Punkte C und D so, dafs A und C von D aus, so wie D und B von C aus sichtbar sind. Zunächst richtet nun der in C stehende Gehülfe das Signal D in das Alignement CB nach D' ein; darauf der Gehülfe D das Signal C in die

Fig. 111.

Linie $D'A$ nach C'. Auf dieselbe Weise wird von C' aus, D' in das Alignement $C'B$ nach D'' eingerichtet u. s. f.

Dasselbe Verfahren wendet man an, wenn mehr als zwei Zwischenpunkte zu bestimmen sind. Auch die Erweiterung des Alignements AB über den einen Endpunkt hinaus kann durch ein ähnliches Verfahren ausgeführt werden, wenn die oben genannten Bedingungen zu erfüllen sind.

Wie man den Durchschnittspunkt zweier sich schneidender Alignements bestimmen kann, ergiebt sich von selbst. Am einfachsten kann die Bestimmung mit dem Prismenkreuz von Bauernfeind vorgenommen werden, worüber §. 167 u. f. zu vergleichen ist.

§. 275.

Sind aber der Hindernisse zwischen den Endpunkten eines gegebenen Alignements so viele, dafs man aus keinem Zwischenpunkte einen der Endpunkte sehen kann, um das vorige Verfahren anwenden zu können, so stecke man, wenn das Terrain es gestattet, seitwärts von dem gegebenen Alignement AB, ein anderes AE ab, mefse AC', $C'D'$, $D'E$, sowie BE, welche auf AE normal stehen mag, so kann man daraus die Abstände $C'F$, $D'G$ berechnen und dadurch die Punkte F, G in AB und eben so auch in der Verlängerung von AB bestimmen. Selbst dann, wenn das Terrain die Anwendung des eben genannten Verfahrens nicht gestattet, kann man durch Hülfe planimetrischsr Sätze Punkte in der gegebenen Linie oder deren Verlängeruug festlegen; allein in den meisten Fällen ist doch das Verfahren dazu so compliciert, dafs der Praktiker gewifs keinen Gebrauch davon machen, sondern es vorziehen wird, durch Winkelmefsung die Lage der Linie und ihrer Verlängerung zu bestimmen.

§. 276.

Bei sehr langen Linien, oder solchen, bei deren Absteckung es auf die gröfste Genauigkeit ankommt, wie u. a. bei dem Abstecken der Basis eines Dreiecksnetzes, bedient man sich eines Fernrohrs, z. B. des an der Kippregel eines Mefstisches befindlichen, oder des Fernrohrs eines Theodolithen u. s. w., dessen optische Achse in die Richtung des gegebenen Alignements gebracht wird. Das Verfahren, wodurch damit Punkte festgelegt werden, bedarf aber keiner weiteren Erläuterung.

§. 277.

Beim Abstecken der Linien hat man besonders darauf zu achten, dafs die angewendeten Baken möglichst lothrecht in den Boden gesteckt werden und das Auge nicht dicht hinter die Bake, sondern etwas davon

entfernt und seitwärts gehalten wird, so dafs man längs den Seitenflächen der Stäbe hinsieht. Das erstere ist insbesondere dann zu beobachten, wenn das Abstecken über Anhöhen oder durch hohes Gebüsch geschieht, oder die eingesetzten Baken als Signale zu Winkelbestimmungen gebraucht werden sollen. In letzterer Hinsicht ist zu bemerken, dafs wenn das Auge dicht hinter den Stab gehalten wird, der neu einzusetzende Stab in allen Punkten des Winkels, den der Augenpunkt mit den beiden Berührungslinien bildet, welche von ihm aus an den vordern Stab gezogen werden können, diesen vordern Stab zu decken scheint. Aus diesem Grunde mufs man sich beim Abstecken der Linien auch möglichst dünner Baken bedienen.

II. Unmittelbares Mefsen gerader Linien.

A. Mittelst der Mefskette.

§. 278.

Nachdem die Mefskette auseinander geschlagen und mit den Kettenstäben verbunden ist, setzt der hintere Kettenzieher den Kettenstab in den Anfangspunkt der zu mefsenden Linie und richtet den Stab des vorderen Kettenziehers ein, dafs er in der geraden Linie liegt. Nun zieht der vordere Kettenzieher die Kette straff an, dafs die Mitte sämmtlicher Ringe in der Linie sich befindet. Bevor beide Kettenzieher in der Richtung der gegebenen Linie weiter gehen, bezeichnet der Vordermann den Endpunkt des ersten Kettenzuges durch eins der 10 Markierstäbchen. Dicht an die Spitze desselben setzt beim zweiten Zuge der hintere Kettenzieher seinen Kettenstab, zieht das Markierstäbchen aus, bewahrt es an dem Haken des Ledergürtels oder in dem Köcher auf und verfährt wie vorhin. Eben so bei den folgenden Zügen. Ist die Linie länger als 50 Ruthen, so werden am Ende dieser Länge die 10 Markierstäbchen dem vorderen Kettenzieher übergeben, dabei diefs s. g. Wechseln bemerkt und es wird dann weiter wie vorhin verfahren. Schliefslich werden die vom Anfangspunkte des letzten Zuges bis zum Endpunkte der zu mefsenden Linie liegenden Ruthen und Zehntelruthen an den Ringen abgezählt und die Hundertstelruthen nach dem Augenmafse oder mit dem Zollstabe gemefsen. Aus der Zahl n der Markierstäbchen, welche der hintere Kettenzieher hat und deren so viele sein müfsen, als dem vorderen an 10 fehlen, vermehrt um die gewechselten m . 10, welche Summe daher mit 5 zu multiplicieren ist, und dem abgelesenen Ueberschufse a wird dann die Länge der Linie bestimmt und daher $= (m \, . \, 10 + n) \, 5 + a$ sein.

§. 279.

Reduction einer in einer geneigten Ebene liegenden geraden Linie auf den Horizont.

Man mefse in dem einen Endpunkte A der geneigten Linie AB ihren Neigungswinkel α gegen den Horizont, so bestimmt sich die auf den Horizont reducierte Linie AB durch den Ausdruck

$$b = c \cdot \cos \alpha.$$

Sind die Neigungswinkel sehr klein, wie das z. B. bei dem Mefsen der Linien mit Mefsstäben der Fall sein wird, so wird der Werth für b nicht mit der erforderlichen Schärfe bestimmt. Man sucht dann den Unterschied zwischen c und b; ist dieser $= d$, so erhält man

$$d = c\,(1 - \cos \alpha) = 2c \sin {}^1\!/_2\, \alpha^2,$$

welcher Werth demnach von c abzuziehen ist, um b zu erhalten.

Zum Mefsen der Neigungswinkel dient der am Theodolith oder an der Kippregel des Mefstisches oder der Boussole befindliche Höhenkreis oder Höhenbogen, worüber §. 244 zu vergleichen ist.

§. 280.

Auf einem unebenen Boden mit vielen kleineren Erhöhungen und Vertiefungen, oder der mit niedrigem Gestrüpp bewachsen ist, wendet man zur Mefsung der Linien mit Vortheil die im §. 202 beschriebene Ruthenschnur an, die ihrer gröfsern Leichtigkeit wegen befser gehandhabt werden kann.

Bei gröfseren Erhöhungen und Vertiefungen des Bodens mifst man die Längen am zweckmäfsigsten **staffelweise** mit der halben Kettenlänge oder noch kleineren Theilen der Kette. Auch hierzu eignet sich befser die vorhin erwähnte Kette. Noch zweckmäfsiger ist es, die Mefsung durch Mefsstäbe von $^1\!/_2$ oder 1 Ruthe Länge auszuführen. Ein Gehülfe hält einen solchen Mefsstab mit seinem einen Ende auf den ansteigenden Boden in der Richtung der zu mefsenden Linie durch Hülfe der Setzwage horizontal, während vor das andere Ende ein zweiter Gehülfe einen Mefsstab mit Zuziehung eines Lothes vertical hält und dadurch auf der Oberfläche eines eingeschlagenen Pfahles den Punkt kenntlich macht, woran der erste Gehülfe wieder seinen Mefsstab anlegt. Auf diese Weise kann die Mefsung weiter bergab und ebenso auch bergan fortgeführt und aus der Zahl der horizontal gelegten Mefsstäbe u. s. w. die Länge der zu mefsenden Linie bestimmt werden.

Bei gröfseren Unebenheiten kann man die gegebene Linie nach der Verschiedenheit ihrer Neigung auch in kleinere Sectionen theilen, die Länge jeder einzeln und zugleich den Neigungswinkel gegen den Hori-

zont mefsen, um daraus dann die Horizontalprojection der ganzen Linie bestimmen zu können.

§. 281.

Es kann nicht die Absicht sein, hier auf die bei der Behandlung der Kette erforderlichen Handgriffe, über das Auseinanderschlagen und Zusammennehmen derselben u. s. w. aufmerksam zu machen, was sich leicht durch Aufmerksamkeit und Uebung erlernt; indessen mag doch bemerkt werden, dafs der Geometer bei den Kettenzügen besonders darauf zu achten hat, dafs die Mefskette fortwährend gehörig ausgespannt und straff angezogen ist; keine Glieder verbogen oder Ringe überschlagen sind; der Stab des hinteren Kettenziehers von dem vorderen nicht schief gezogen werde; auf unebenem Boden die Endringe an den Kettenstäben etwas erhöht werden; dafs beim staffelweisen Mefsen der Stab des tieferstehenden Kettenziehers genau vertical gehalten und die Kette nur so lang genommen werde, dafs der durch ihre Schwere verursachte Bogen nur wenig von der horizontalen Lage und Entfernung abweiche. In der Nichtbeachtung dieser Regeln sind besonders die Quellen der Fehler zu suchen, die bei dem weiteren Fortgange der Mefsung durch Probemefsungen sich zeigen.

Soll eine gegebene Linie als Grundlage einer weiter fortgeführten Mefsung dienen, so mufs ihre Länge zwei bis drei Mal gemefsen und aus den erhaltenen Resultaten das arithmetische Mittel genommen werden.

B. Mittelst der Mefsstäbe.

§. 282.

Vor dem Gebrauch der Mefsstäbe zur Mefsung einer gegebenen Linie mufs die Länge $a\,d$ (Fig. 87) jeder einzelnen Stange genau ausgemittelt werden. Diefs geschah nach einem messingenen Stabe, auf welchem zwei Hannoversche Fufs abgetragen waren und der noch eine Eintheilung auf Hundertstel Linien hatte. Hiernach wurden die Längen der 3 Stäbe bestimmt.

Die Mefsung einer auf ebenem Boden gegebenen Linie geschieht auf folgende Weise:

Nachdem der Anfang ihrer Richtung durch eine ausgespannte Mefsschnur von etwa 10 Ruthen Länge bezeichnet ist, werden die Stäbe E und F der Mefsstange No. I. dicht an die Schnur gesetzt, so dafs die Kante d noch etwas nach Vorn vom Anfangspunkte der Linie liegt. Letzterer ist durch ein auf die Oberfläche eines eingeschlagenen Pfahls eingeschnittenes Kreuz bezeichnet. Darauf wird die Mefsstange in etwa 2 Fufs Abstand vom Boden in eine horizontale Lage gebracht und, durch Eindrücken der Stäbe in den Boden, gehörig festgestellt. Dann

schiebt man den Arm c so weit vor, bis das an seiner Endfläche herabhängende Loth, das aus einer feinen Metallsaite und einem in eine konische Spitze endigenden Konus besteht, den Kreuzpunkt des Pflockes trifft. Man notiert nun die Länge des ausgezogenen Arms in dem Mannal. Darauf stellt man auch die Stangen II. und III. wie I. auf, so dafs der zuerst eingeschraubte Arm c des hinteren Endes fast vor dem Cylinder a der vorangehenden Stange steht, schiebt denselben bis zur Berührung aus und notiert wieder die Länge jedes Auszuges. Auf diese Weise setzt man die Mefsung fort.

Sollten sich an einzelnen Stellen des Terrains solche Unebenheiten finden, dafs der Arm mit dem Endcylinder, nach möglichster Erhöhung oder Erniedrigung der einen oder anderen Stange, nicht mehr zur Berührung gebracht werden kann, so nimmt man die erwähnten Lothe zu Hülfe.

Ist man beim Endpunkte der Linie angelangt, so läfst man von einem Punkte der Stange ein Loth bis zum Kreuzpunkte des Pfahls herab und bestimmt durch Anwendung eines angelegten Mafsstabes die Entfernung dieses Punktes von dem Anfangspunkte der Latte. Aus dieser letzteren Gröfse, den bekannten Längen jeder einzelnen Stange und den bestimmten Auszügen der Arme ergiebt sich die Länge der Linie, die von dem aus einer zweiten Mefsnng erhaltenen Resultate um höchstens $\frac{1}{5000}$ bis $\frac{1}{6000}$ der ganzen Länge abweichen darf, wenn das arithmetische Mittel aus beiden die Länge der Linie angeben soll.

Zu dieser Mefsung werden 4 Gehülfen erfordert, die vor der Mefsung hinsichtlich des Anfstellens der Latte etc. gehörig instruiert und eingeübt sind.

C. Mittelst des Distanzmefsers.

§. 283.

Man stellt sich mit dem Distanzmefser in dem einen Endpunkte der zu mefsenden Linie auf und die Latte in dem anderen. Richtet man nun den einen der äufsersten Horizontalfäden, z. B. den obersten, auf den Nullpnnkt der Eintheilung, von welcher angenommen werden mag, dafs sie für das distanzmefsende Fernrohr entworfen ist, so wird der andere Horizontalfaden irgend einen Punkt der Eintheilung decken. Fällt dieser mit einem der Theilstriche zusammen, so erhält man dadurch schon die gesuchte Entfernung, die man durch das Fernrohr abliest. Liegt aber der erwähnte zweite Horizontalfaden zwischen zwei Theilstrichen, so stellt man zur Bestimmung der kleineren Theile mittelst der Mikrometerbewegung des Fernrohrs den unteren Horizontalfaden auf den nächstniedrigen Theilstrich der Latte, dann wird der früher

auf 0 stehende Faden in die unter 0 vorhandene Unterabtheilung treten, wodurch also den ganzen Theilen die Zehntel u. s. w. zugesetzt werden können.

Wenn der untere Theil der Latte durch vorliegendes Gebüsch u. dgl. verdeckt werden sollte, so richtet man den oberen Horizontalfaden Statt auf 0, etwa auf 10 oder 20; durch die seitwärts angebrachte Unterabtheilung lafsen sich dann auf dieselbe Weise Zehntel etc. der Theile der Latte ablesen.

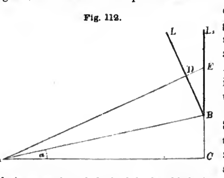
Bei der Anwendung einer nicht für das distanzmefsende Fernrohr eingerichteten Latte mufs zunächst nach §. 129, 2. das Fernrohr für diese Latte justiert sein und ist dann beim Ablesen die daselbst erwähnte Tabelle zu berücksichtigen.

Das distanzmefsende Fernrohr der Figg. 50 und 51 richtet man mit dem einen der äufseren Horizontalfäden ebenfalls auf den Nullpunkt der Latte, und bestimmt mittelst Umdrehung der Mikrometerschraube den Abstand des anderen Fadens von dem oberen Punkte der Latte in Trommeltheilen, so erhält man daraus auch den Werth der Trommeltheile von AB (Fig. 53), woraus dann nach §. 130 die Distanz leicht bestimmt werden kann.

§. 284.

Sind die Linien, deren Längen man bestimmen soll, gegen den Horizont geneigt, so mufs, unter der Voraussetzung, dafs die Distanzlatte normal gegen die Visierlinie des Fernrohrs gerichtet ist, die abgelesene Distanz noch mit dem Cosinus des Neigungswinkels der Linie gegen den Horizont multipliciert werden. Denn ist AB in Fig. 112 die nach dem Nullpunkte gehende Visierlinie und schneidet der andere Horizontalfaden auf der Latte BL das Stück BD ab, so ist diefs das Mafs für AB und daher

Fig. 112.



$$AC = BD \cdot \cos\alpha.$$

Steht aber die Latte BL_1 senkrecht auf dem Horizonte AC, so wird auf derselben das Stück BE abgeschnitten, während doch BD das Mafs für AC ist. Da man nun ohne beträchtlichen Fehler AD als normal auf BD annehmen kann, so ist $LBL_1 = \alpha$, und da $BD = BE \cos\alpha$ ist, so erhält man die auf den Horizont reducierte gemefsene Distanz durch den Ausdruck

$$AC = BE \cos\alpha^2.$$

D. Mittelst des Schalles und Abschreitens.

§. 285.

Da aus angestellten Versuchen bekannt ist, dafs der Schall bei einer Temperatur von etwa 10⁰ R. in einer Sekunde 1048 Pariser Fufs zurücklegt, so kann man durch Hülfe einer Sekunden- oder Terzien-Uhr, welche mittelst einer Feder in jedem Momente in Bewegung gesetzt, aber auch gehemmt werden kann, den Weg mefsen, den der Schall durchläuft, sobald man z. B. beim Abfeuern eines Geschützes die Zeit in Terzien oder Sekunden bestimmt, welche zwischen dem Sehen des Blitzes und dem Hören des Schalles verfliefst. Indem man nun auf diese Weise die Beobachtungen häuft, so kann man aus dem arithmetischen Mittel aller der Wahrheit sich nähern.

Allein die Geschwindigkeit des Schalles steht mit der Dichtigkeit und Temperatur der Atmosphäre im genauen Zusammenhange und aus vielfach angestellten Versuchen weifs man, dafs, wenn die Temperatnr der Atmosphäre nm 1⁰ R. zunimmt, die Geschwindigkeit des Schalles um etwa $\frac{1}{480}$ wächst. Durch Hülfe folgender Tafel läfst sich dann die Entfernung bei verschiedenen Temperaturen bestimmen.

Wärme	Geschwindigkeit des Schalles	Wärme	Geschwindigkeit des Schalles	Wärme	Geschwindigkeit des Schalles
Grad R.	Par. Fufs.	Grad R.	Par. Fufs.	Grad R.	Par. Fufs.
0	1027				
1	1029	11	1053	21	1076
2	1032	12	1055	22	1079
3	1034	13	1057	23	1081
4	1037	14	1060	24	1083
5	1039	15	1062	25	1086
6	1041	16	1065	26	1088
7	1044	17	1067	27	1090
8	1046	18	1069	28	1092
9	1049	19	1072	29	1095
10	1051	20	1074	30	1097

Wenn man übrigens berücksichtigt, dafs ein Fehler von 0,1 Sekunde in der Zeitbestimmung schon einen Fehler von über 100 Fufs in der Entfernung zur Folge hat, so wird man erkennen, dafs man sich des Schalles zur Bestimmung der Entfernungen in der praktischen Geometrie nur dann bedienen darf, wenn man sich mit höchst oberflächlichen Resultaten begnügen kann.

§. 286.

Zu einer ungefähren Meſsung von Linien kann endlich auch das Abschreiten angewendet werden, wenn man durch vielfache Uebung die Gröſse eines Schrittes ausgemittelt hat und diesen Schritt immerfort beibehält. Gewöhnlich verlangt man bei Bestimmungen von Entfernungen, daſs man sich einen Schritt eigen gemacht habe, daſs 6 Schritt auf die 16füſsige Ruthe, also 30 Schritt auf 5 Ruthen gehen. Durch Schrittzähler oder Hodometer*) kann man das Zählen der Schritte ersparen. Daſs man aber auch von dieser Methode, Entfernungen zu meſsen, nur dann Gebrauch machen kann, wenn es sich um oberflächliche Resultate handelt, bedarf wohl keiner Erwähnung. Es gewährt indessen das Abschreiten bei der Recognoscierung einer aufzunehmenden Flur dem Geodäten groſsen Nutzen.

Die Zuverläſsigkeit der Kettenmeſsung.

§. 287.

Bei jeder Meſsung einer geraden Linie mittelst der Meſskette von nicht zu geringer Ausdehnung wird man Fehler begehen, deren Gröſse zu bestimmen ist, um sie bei dem gefundenen Resultate, wenn auch nicht in Rechnung zu bringen, doch aber ihren Einfluſs kennen zu lernen, da von einer Eliminierung derselben, wie sie bei der Meſsung der Winkel mittelst eines Winkelmeſsers, durch verschiedene Methoden der Winkelmeſsung, möglich war, hier keine Rede sein kann. Selbstverständlich sind aber nur die s. g. zufälligen Fehlerquellen hier zu beachten, alle übrigen aber auszuschlieſsen, wohin z. B. gehören, daſs Glieder verbogen oder ihre Ringe überschlagen sind, die Kette nicht in der erforderlichen Straffheit angezogen ist, der Stab des hinteren Kettenziehers, durch zu starkes Anziehen der Kette von dem vorderen schief gezogen wird, auf unebenem Boden die Endringe der Kette an den Kettenstäben eine zu hohe oder zu niedrige Lage haben, so daſs die benachbarten Glieder eine Lage annehmen, die von der der anderen abweichend ist u. s. w. Zu den erwähnten zufälligen Fehlern gehören insbesondere folgende:

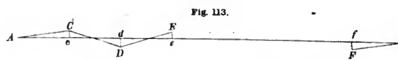
1. Die Endpunkte der einzelnen Kettenzüge liegen nicht genau in der Richtung der zu meſsenden Linie.

Ist AB in Fig. 113 die zu meſsende gerade Linie, $ACDE\ldots FB$ aber die durch die Kettenzüge gemeſsene, nach Links und Rechts abweichende, gebrochene Linie, so ist, wenn die Länge der Kette

$$AC = CD = DE \ldots = FB$$

*) Gehler's physikalisches Wörterbuch, Art. Hodometer.

Fig. 113.



durch a, die Gröfse der hier vorausgesetzten, überall gleichen Abweichung Cc, Dd, Ee... von der Geraden AB durch d und die Zahl der Kettenzüge durch n bezeichnet wird,

$$AB = 2\sqrt{a^2 - d^2} + (n-2)\sqrt{a^2 - 4d^2},$$
$$= 2a\sqrt{1 - \frac{d^2}{a^2}} + (n-2)\,a\sqrt{1 - \frac{4d^2}{a^2}}.$$

Löst man die beiden Wurzelgröfsen in eine Reihe auf, so erhält man

$$\sqrt{1 - \frac{d^2}{a^2}} = 1 - \tfrac{1}{2}\frac{d^2}{a^2} - \tfrac{1}{8}\frac{d^4}{a^4} - \ldots,$$
$$\sqrt{1 - \frac{4d^2}{a^2}} = 1 - 2\frac{d^2}{a^2} - \tfrac{1}{2}\frac{d^4}{a^4} - \ldots;$$

folglich ist, da man die dritten Glieder wegen der Kleinheit von d gegen a vernachläfsigen kann,

$$AB = 2a\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{d^2}{a^2}\right) + (n-2)\,a\left(1 - \frac{2d^2}{a^2}\right),$$
$$= na - \frac{d^2}{a}(2n-3),$$

also der begangene subtractive Fehler

$$f = \frac{d^2}{a}(2n-3),$$

so dafs demnach der Fehler nach dem Quadrat der Abweichnng und der Zahl der Kettenzüge wächst.

Setzt man also bei der 5ruthigen Kette $d = 0^0{,}02$, $n = 20$, so ist $f = \frac{(0{,}02)^2}{5} \cdot 37 = 0^0{,}00296$, so dafs daher der Einflufs des erwähnten Fehlers im Ganzen unbedeutend genannt werden kann.

2. Für die auf einem unebenen Boden möglichst ausgespannte Kette, deren Mitte sich um die Gröfse e senkt, wird Statt des Bogens seine Sehne als Kettenlänge genommen.

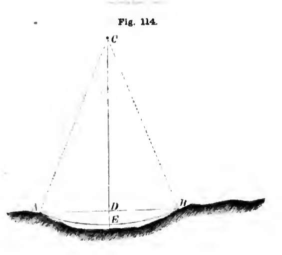
Bezeichnet in Fig. 114 der Bogen AEB die Lage der in A und B gespannten Mefskette, so ist der hier begangene Fehler f_1 dem Unterschiede zwischen der Länge der Sehne s und dem Bogen b gleich, oder $f_1 = b - s$. Setzt man den Halbmefser des Bogens $= r$ und den zugehörigen Winkel ACB im Bogenmafs $= \varphi$, so ist $b = r\varphi$ und $s = 2r\sin\frac{1}{2}\varphi$. Da nun

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{48}\varphi^3 \ldots,$$

so ist durch Substitution von $\varphi = \frac{b}{r}$

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{b}{2r} - \frac{b^3}{48r^3}$$

Fig. 114.



folglich $$s = b - \frac{b^3}{24\,r^2}$$

und daher $$f_1 = \frac{b^3}{24\,r^2}\,,$$

so dafs es daher noch darauf ankommt, r durch e auszudrücken. Da nun

$$e = r - r\cos\tfrac{1}{2}\,\varphi = r\,(1 - \cos\tfrac{1}{2}\,\varphi)$$

und $$\cos\tfrac{1}{2}\,\varphi = 1 - \tfrac{1}{8}\,\varphi^2$$

oder nach Substitution von $\varphi = \frac{b}{r}$

$$\cos\tfrac{1}{2}\,\varphi = 1 - \frac{b^2}{8\,r^2}\,,$$

folglich $$e = \frac{b^2}{8\,r} \quad \text{oder} \quad r = \frac{b^2}{8\,e}\,.$$

Mithin ist $$f_1 = \frac{b^3}{\frac{24\,b^4}{64\,e^2}} = \frac{8\,e^2}{3\,b}\,,$$

so dafs mithin der Fehler nach dem Quadrat der Ketteneinsenkung wächst, mit der Kettenlänge aber sich vermindert.

3. Wird die Länge einer Linie auf einer gegen den Horizont unter dem Winkel α geneigten schiefen Ebene, die aber als Horizontebene angesehen wird, gemefsen, so ist nach §. 279 Statt b nur $b\cos\alpha$ zu nehmen, so dafs also auch in diesem Falle, wie in den vorhergehenden Fällen der begangene Fehler ebenfalls subtractiv ist.

4. In demselben Sinne, wie die erwähnten drei Fehler, wirken auch die vorhin schon angedeuteten, so dafs bei der Mefsung der Linien mittelst der Mefskette im Allgemeinen eine gegenseitige Aufhebung derselben nicht Statt finden kann und daher in diesen Umständen

auch der alleinige Grund zu suchen ist, dafs die Mefskette nicht den Grad der Zuverläfsigkeit gewähren kann, den ihr hin und wieder noch einige Praktiker beilegen. Keineswegs ist man aber bis jetzt über den Grad oder das Mafs der Genauigkeit der Mefskette bei Längenbestimmungen vollständig im Reinen. Zu diesem Zwecke würden mit derselben Längen, wie sie in der Praxis häufig vorkommen, von 20 bis 100 Ruthen, durch eine grofse Anzahl von Mefsungen zu bestimmen sein, um aus dem daraus sich ergebenden arithmetischen Mittel den s. g. mittleren Fehler für jede einzelne dieser Längen berechnen zu können, wozu die Ausgleichungslehre nach der Methode der kleinsten Quadrate Anleitung giebt (§§. 270 u. 272). Die Fehlerprocente, die in den Instructionen für Geometer bei den Mefskettenmefsungen zu gut gethan werden sollen, möchten wohl in den wenigsten Staaten gehörig begründet sein, und beruhen meistens nur auf der Voraussetzung, dafs der mittlere Fehler der Länge der Linie proportional ist.

III. Das Abstecken von Normalen und Parallelen.

Vorbemerkung. Das Abstecken von Normalen und Parallelen gegen gegebene Linien auf dem Felde mit dem Theodolith, der Boussole und den Reflexionsinstrumenten, so wie mit den im 3. Cap. des 2. Abschn. der 1. Abtheilung beschriebenen Instrumenten, nämlich dem Winkelkreuz, der Winkeltrommel, dem Fallon'schen Spiegellineal, dem Winkelspiegel und dem Bauernfeind'schen Prismenkreuz, dürfte sich aus der genauen Kenntnifs dieser Mefsapparate und ihrem Gebrauche ohne Weiteres ergeben. Es soll daher hier nur von der Anwendung der Mefskette bei der Lösung obiger Aufgaben die Rede sein, während die Auflösung derselben mit dem Mefstische in dem folgenden Abschnitt nachfolgen soll.

§. 288.

Aufgabe. In einem Punkte C (Fig. 115) einer Linie MN eine Normale zu errichten.

Ist man nur mit einer Mefskette versehen, so mache man $CA = CB = 1\frac{1}{2}$ Ruthen, schlage in A und B Pfähle, um die man die Endringe der Mefskette hängt, fafse diese in der Mitte und spanne sie bis D aus; bestimmt man auf dieselbe Weise den Punkt E, so legt sich durch DE die Richtung der Normale genügend fest.

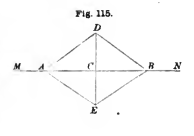
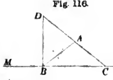


Fig. 115.

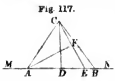
Ist man aber im Besitz zweier Mefsketten, so kann man entweder $AC = 3$ Ruthen, $CD = 4$ Ruthen machen und den Punkt D so bestimmen, dafs $AD = 5$ Ruthen wird. Oder man spanne, wenn in Fig. 116 B der gegebene Punkt ist, von B die Mefskette nach BA (Fig. 116) aus, bestimme in MN den Punkt C, dafs $AC = AB$ ist und mache $AD = AB$, so ist DB normal auf MN.



Die Richtigkeit dieser Methoden ergiebt sich aus planimetrischen Sätzen.

§. 289.

Aufgabe. Aus einem Punkte C aufserhalb einer gegebenen Linie MN (Fig. 117) eine Normale auf sie zu fällen.



Ist der Punkt C weniger als 5 Ruthen von der Linie MN entfernt, so bestimme man in der Linie zwei Punkte A und B, die von C um 5 Ruthen entfernt sind und halbiere dann AB in D, so ist CD die gesuchte Winkelrechte.

Ist die Entfernung aber gröfser, so nehme man in MN den Punkt A beliebig an, mefse AC, mache $AE = AC$, mefse auch CE und mache $ED = \frac{CE^2}{2AE}$, so ist D der Fufspunkt der gesuchten Normale. Denn denkt man sich von A auf CE die Winkelrechte AF gezogen, so ist $CF = FE$ und daher

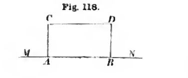
$$ED = \frac{(2FE)^2}{2AE} = \frac{2FE \cdot FE}{AE} = \frac{CE \cdot FE}{AE},$$

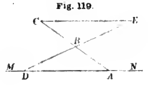
folglich $ED : CE = FE : AE$, woraus aber folgt, dafs $\triangle CDE \sim \triangle AFE$ und demnach $CDE = R$ ist.

§. 290.

Aufgabe. Durch einen Pnnkt C (Fig. 118) aufserhalb einer gegebenen Linie MN eine Parallele mit derselben zu ziehen.

Nach §. 289 fälle man von C die Normale CA auf MN, mefse ihre Länge und errichte nach §. 288 in dem Punkte B die Normale $BD = AC$, so ist $CD \mathrel{\#} MN$.





Oder man mefse von C aus (Fig. 119) eine Linie CA nach MN, bestimme ihre Mitte B; mefse BD und mache $BE = BD$, so ist $CE \ddagger MN$.

Kann man in diesem Falle die Mitte von AC nicht bezeichnen, so nehme man den Punkt B beliebig, mefse CB und BD und mache dann $BE = \frac{BD \cdot CB}{AB}$. Denn es läfst sich leicht zeigen, dafs $\Delta CBE \sim \Delta DBA$ und daher $BDA = BEC$ ist.

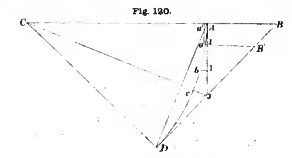
IV. Das Abstecken der Kreisbogen.

§. 291.

Das Abstecken der Kreisbogen geschieht von Berührungslinien aus, die man an bestimmte Punkte des Bogens sich gezogen denkt, indem von dem Punkte aus, in welchem das Abstecken beginnen soll, dem **Anfangspunkte**, die Abscissen abgesteckt werden, um durch die in den Endpunkten der Abscissen errichteten Normalen, die zugehörigen Ordinaten, die verlangten Punkte des Kreisbogens zu erhalten.

Zunächst kömmt es demnach darauf an, aus dem bekannten Halbmefser des Kreises und einer gegebenen Abscisse die zugehörige Ordinate durch Rechnung zu finden. Es sei in Fig. 120 der Anfangspunkt A zugleich der Ursprung der Coordinaten, $A\,1 = x$ die gegebene

Fig. 120.



Abscisse, $1\,a = y$ die zugehörige Ordinate. Man setze die Halbmefser CA und $Ca = r$ und ziehe durch a die Normale aa' auf CA, so ist

$$y = 1\,a = Aa' = CA - Ca'.$$

Ferner ist

$$Ca' = r - y = \sqrt{r^2 - x^2} = r\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)},$$

$$= r\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{r^2} - \frac{1}{8}\,\frac{x^4}{r^4} - \ldots\ldots\right),$$

folglich
$$y = \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{r} + \frac{1}{8}\,\frac{x^4}{r^3} + \ldots\ldots,$$

in welchem Ausdrucke man in den meisten Fällen das zweite Glied wird vernachläfsigen können, da die Abscissen in Bezug auf den Kreishalbmefser meistens sehr klein sein werden.

Gewöhnlich wird man die Abstände zwischen zwei benachbarten Ordinaten einander gleich, also $x_2 = 2x$, $x_3 = 3x$...... machen; dann ist mit Vernachläfsigung des zweiten Gliedes des obigen Ausdruckes für y

$$y_2 = 4\,y,\ y_3 = 9\,y, \ldots\ldots\ldots y\,n = n^2 y.$$

Macht man also $1\,a = y$, $2\,b = y_2$, $3\,c = y_3$........, so sind a, b, c..... Punkte des verlangten Kreisbogens.

Um bei dem Fortgange des Absteckens von dem Punkte 3 aus eine zweite Berührungslinie abzustecken, errichte man in A, oder in einem anderen Endpunkte einer Abscisse auf $A\,3$ die Normale $A\,B$, mache diese, wenn α den Winkel $A\,C\,3$ bezeichnet, und dessen Gröfse sich durch $\operatorname{tg}\,\alpha = \frac{x_3}{r}$ bestimmen läfst, $= x_3 \operatorname{tg}\,2\,\alpha$, so ist die Verbindungslinie zwischen B und 3 die Richtung der zweiten Berührungslinie, von welcher ab man nun, wie vorhin, Punkte der Kreislinie abstecken kann. Es ist nämlich $A\,3\,D = 180^0 - 2\,.\,D\,A\,3 = 180^0 - 2\alpha$, da $D\,A\,3 = A\,C\,D$ ist, mithin $A\,3\,B = 2\,\alpha$ und $\operatorname{tg}\,2\,\alpha = \frac{A\,B}{x_3}$.

Errichtet man, statt in A, die Normale in 1 oder 2, so ergiebt sich leicht, dafs $1\,B' = \frac{2}{3}\,A\,B$, $2\,B'' = \frac{1}{3}\,A\,B$ gemacht werden mufs.

Andere Methoden des Absteckens der Kreisbogen und auch anderer Curven findet man u. a. in Stampfer's Anleitung zum Nivellieren. Wien 1848. Da aber das Abstecken der Curven vorzugsweise von dem Wegbau- und Eisenbahnbau-Ingenieur angewandt wird, die Theorie davon auch eigentlich einen Gegenstand in den Vorträgen über Ingenieurwifsenschaften bildet, so darf dafselbe hier zur Raumersparung füglich übergangen werden und wird der Leser auf Bauernfeind's Elemente der Vermefsungskunde, 2. Aufl. München, 1862. S. 411 u. f., worin dieser Gegenstend sehr ausführlich behandelt ist, verwiesen.

Dritter Abschnitt.

Die Horizontalaufnahme kleinerer Erdstrecken. Die Grundlage der Detailmefsungen.

Erstes Capitel.

Theorie der Horizontalaufnahmen.

§. 292.

Bei jeder Horizontalmefsung kommt es nach §. 3 auf die Bestimmung einer Folge von Punkten an, welche meistens die Winkelpunkte eines auf dem Felde gegebenen oder gebildeten Polygons sein werden, aber auch isolirte Punkte sein können, die dem weiteren Fortgange der Mefsung zum Grunde liegen und auf diese Weise ebenfalls als Winkelpunkte eines Polygons betrachtet werden können. Solche Punkte auf genügende, mathematische Weise zu bestimmen, ist demnach die Aufgabe der Horizontalaufnahme, zu deren Lösung aber die reine Geometrie mehrere Mittel darbietet.

1. Die Umfangsmethode, das Peripherisieren, Umziehen.

§. 293.

Nach der Planimetrie wird ein $n$eck im Allgemeinen durch $2n - 3$ unabhängige Stücke, wenn unter ihnen wenigstens $n - 2$ Seiten sich finden, bestimmt; käme es daher bei der Aufnahme eines $n$ecks nur auf die mathematische Bestimmung defselben an, so würde man zu mefsen haben: alle Seiten und alle Winkel, mit Weglafsung entweder eines Winkels und der ihn einschliefsenden Seiten, oder einer Seite und der anliegenden Winkel. Da aber alle praktischen Mefsungen mehr oder weniger unvermeidlichen Fehlern unterworfen sind (§. 259), so mufs es immer das Bestreben des Geodäten sein, auf verschiedenen Wegen Resultate zu erhalten, oder Probemefsungen anzustellen, um aus der Vergleichung der erhaltenen Resultate den Grad der Genauigkeit der Mefsung beurtheilen und nach Umständen auch verbefsern zu können. Man hat deshalb bei der Umfangsmethode immer alle Winkel und alle Seiten des $n$ecks unmittelbar zu mefsen. Die Summe der Winkel mufs dann $(n - 2)\ 2R$ betragen, und beim Auftragen des Gemefsenen mufs der zweite Schenkel des letzten Winkels den ersten Schenkel des ersten Winkels decken. Man nennt diefs das Schliefsen der Figur.

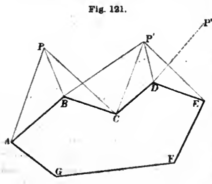
§. 294.

Allein nur bei Figuren von geringem Umfange und kleiner Seitenzahl wird ein Schliefsen stattfinden. Damit aber die, wegen der vielen unmittelbaren Linien- und Winkelmefsungen schon bei der Aufnahme entstehenden, durch das Auftragen sich oft noch vermehrenden Fehler nicht auf alle späteren Winkelpunkte sich übertragen, ist es zweckmäfsiger, sowohl bei der Aufnahme, als beim Auftragen etwa bis zur Hälfte des Umfangs fortzugeben, dann beim ersten Winkelpunkte wieder zu beginnen, um in entgegengesetzter Richtung, wie vorher, bis zu dem Punkte fortzufahren, bei welchem vorher die Mefsung abgebrochen wurde.

§. 295.

Gestattet das um das anfzunehmende Polygon liegende Terrain, über den Polygonseiten nach Aufsen Dreiecke, durch unmittelbare Mefsung der an den Seiten liegenden Winkel zu bestimmen, so dafs die über je zwei benachbarten Seiten liegenden Dreiecke eine gemeinschaftliche Spitze haben, wie z. B. ABP und BCP, Fig. 121, BCP' und DCP' u. s. w., so dienen die von den bereits erwähnten Spitzen P, P', nach den Endpunkten der zweiten, dritten u. s. w. Seite gehenden Linien, PC, $P'D$.... bei der Bestimmung des dritten, vierten .... Winkelpunktes dann, besonders als Proben, wenn die Punkte P, P'.... durch 3 sich in einem Punkte schneidende Linien bestimmt sind. Dasselbe ist der Fall, wenn solche Pnnkte im Innern des Polygons bestimmt werden können, die vor den ersteren dann meistens noch den Vortheil darbieten, dafs sie bei mehreren Polygonpunkten zur Probe benutzt werden können. Vorzugsweise kommt diese Mefsmethode bei der Aufnahme mit dem Mefstische in Betracht.

Fig. 121.



Anmerkung. Die Umfangsmethode ist bei der Aufnahme mit dem Mefstisch, der Boussole und der Mefskette, welche letztere aber zur Winkelmefsung nur bei kleinen, untergeordneten Aufnahmen anzuwenden sein wird, wegen der vielen unmittelbaren Mefsungen der Winkel und Linien, deren genaue Ausführung mit vom Terrain abhängt, von allen nicht allein die am meisten Zeit raubende, sondern auch wegen der sich leicht fortpflanzenden Fehler, die unvollkommenste und daher auch am wenigsten Sicherheit gewährende. Nur bei der Anwendung mit dem Theodolith bietet sie, wie der folgende Abschnitt zeigen wird, die Möglichkeit einer genauen

Ausgleichung der gemefsenen Winkel und Seiten dar. Sie sollte deshalb für die zuerst genannten Mefsapparate bei Flächeninhaltsbestimmungen von Ländereien, Wiesenstücken u. s. w., niemals angewandt werden. Ihrer kann man, unter derselben Voraussetzung, sich bedienen bei der Aufnahme des Umfangs der Dörfer, kleinerer Forsten und überhaupt da, wo die Flur nicht übersehbar ist und keine andere Methode mit Vortheil eine Anwendung zuläfst.

2. Die Dreiecks- oder Triangularmethode.

a. Die eigentliche Dreiecksmethode.

§. 296.

Zerfällt man das gegebene $n$eck durch $n-3$ sich nicht schneidende Diagonalen in $n-2$ Dreiecke, so wird durch unmittelbare Mefsung der Diagonalen und der n Seiten das $n$eck bestimmt. Probemefsungen erhält man durch das Mefsen so vieler anderer Diagonalen, dafs jeder Winkelpunkt sich auf zweifache Art bestimmen läfst, also durch Mefsung von $n-3$ anderen Diagonalen. Indessen bleibt diefs Mefsen vieler Linien, abgesehen von den sich häufig darbietenden Schwierigkeiten und Hindernissen, immer ein sehr beschwerliches und zeitraubendes. Dessen ungeachtet ist diese Methode bei der Aufnahme einzelner Grundstücke oder kleiner Fluren, von denen man zugleich den Flächeninhalt bestimmen und wobei man vielleicht auch Theilungen vornehmen soll, deshalb immer eine beachtenswerthe, weil man den Flächeninhalt schon aus der Aufnahme ohne Auftragen berechnen kann. Nur ist es dann zweckmäfsiger, das $n$eck in an einander hängende Vierecke zu zerlegen, in jedem derselben beide Diagonalen und aufserdem noch andere Diagonalen zur Probe zu mefsen.

b. Die Basierungsmethode.

§. 297.

Nach dieser Methode mifst man in einem $n$ecke die eine Seite, oder eine im Innern oder aufserhalb des Polygons genommene Linie, als Basis, und an jedem Endpunkte, in dem ersten Falle, die $n-2$ Winkel, welche jene Seite mit der daranstofsenden und den möglichen $n-3$ Diagonalen einschliefst, in dem andern aber die n Winkel, welche die Basis mit den Eckpunkten des Polygons bildet. Dadurch bestimmt sich jeder der anderen Winkelpunkte und mithin auch das gegebene $n$eck.

Man wird sich dieser Methode des Aufnehmens hauptsächlich in den Fällen bedienen, wo die unmittelbare Mefsung von Linien, von denen die Flur durchschnitten wird, nicht gestattet oder mit Schwierigkeiten verknüpft ist. Da es hiebei meistens auf eine Verzeichnung des

Gemesfenen ankommen wird, so ist es nicht gleichgültig, auf welche Weise sich jede Winkelspitze des *n*ecks festlegt. Da nämlich ein Punkt, der durch den Durchschnitt zweier Linien sich bestimmt, am schärfsten bestimmt wird, wenn die Richtung der sich schneidenden Linien eine normale ist, so ist bei der Aufnahme besonders dahin zu sehen, dafs jeder Schnitt zweier Linien unter einem Winkel geschieht, der nicht kleiner als 60° — 45° ist. Lafsen sich solche Schnitte durch eine einzige Basis nicht erreichen, so mufs mit ihr eine zweite, dritte u. s. w. verbunden werden, welche eine günstigere Lage für die noch nicht bestimmten Punkte darbietet. Probemefsungen erhält man theils dadurch, dafs man einen dritten Punkt in der Basis oder deren Verlängerung bestimmt und in ihm wieder alle Winkel mifst, welche die Basis mit den nach den Endpunkten des Polygons gehenden Richtungen bildet, oder durch unmittelbare Mefsung der Polygonseiten, wenn zugleich krummlinichte Begränzungen der Flur durch Mefsung von Abscissen und Ordinaten festzulegen sind.

Anmerkung. Dieser Basierungsmethode bedient man sich hauptsächlich bei den Mefstischaufnahmen, kann sie aber auch bei der Boussolenaufnahme anwenden, während sie bei der Aufnahme mit dem Theodolith keinen Vortheil darbietet.

c. Die Polarmethode.

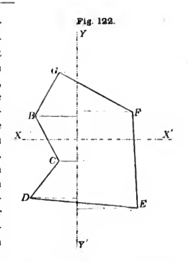
§. 298.

Da ein *n*eck auch dadurch bestimmt wird, dafs man von einem aufserhalb oder innerhalb desselben angenommenen Punkte Linien nach allen Eckpunkten zieht und sowohl die Länge dieser *n* Linien, als auch $n-1$ der von ihnen gebildeten *n* Winkel bestimmt, so läfst sich auch bei der Aufnahme eines *n*ecks diese Methode zur Anwendung bringen. Man pflegt den gewählten Punkt wohl den Pol und die gemefsenen Geraden die Polarlinien zu nennen. Der vielen Linienmefsung wegen aber ist sie zeitraubend und wird nur dadurch anwendbarer, wenn die Polarlinien durch den Distanzmefser bestimmt werden können; in diesem Falle bietet sie für Mefstisch- und Boussolenaufnahmen gleiche Bequemlichkeit dar. Proben erhält man durch die unmittelbare Mefsung der *n*ecks-Seiten und des letzten der *n* Winkel.

3. Die Coordinatenmethode.

§. 299.

Zieht man in der Ebene des *n*ecks $BCD\ldots.$, Fig. 122, zwei sich rechtwinklicht schneidende gerade Linien XX' und YY', die Coordinatenachsen, von denen die erstere die Abscissen-, die



letztere die **Ordinatenachse**, ihr Durchschnitt A der **Anfang** oder **Ursprung der Coordinaten** genannt wird, und fällt von allen Winkelpunkten des $n$ecks auf beide Achsen Normalen, so werden jene Winkelpunkte durch die Längen der Coordinaten bestimmt, indem durch jede zwei zusammengehörige ein rechtwinklichtes Dreieck, dessen Katheten bekannt sind, bestimmt wird. Die Lage der Winkelpunkte wird man dadurch gehörig fixieren, wenn man etwa die rechts vom Ursprunge liegenden Abscissen und die oberhalb der Abscissenachse liegenden Ordinaten positiv, die entgegengesetzt gelegenen Coordinaten aber negativ nimmt.

Diese Methode, die so häufig bei Untersuchungen der reinen Geometrie mit Nutzen angewandt wird, kann demnach auch bei den Horizontalaufnahmen zur Anwendung kommen. Dabei kann man den Ursprung der Coordinaten in einen Winkelpunkt des $n$ecks legen, bei rechtwinklichten Coordinaten auch der Ordinatenachse entbehren und nur die Abscissen auf ihrer Achse abschneiden, bei der Bestimmung der Abscissen auch des Winkelkreuzes u. s. w. sich bedienen. Aber häufig wird bei Anwendung dieser Methode das Terrain der unmittelbaren Meſsung der Coordinaten vielfache Hindernisse in den Weg legen, weshalb man sich ihrer in der Praxis auch gar nicht mehr bedient, sondern sie nur bei der Bestimmung der krummlinichten Gränzen anwendet, wobei die Dreiecks- oder Polygonseiten die Abscissenachsen darstellen.

4. Die Normallinienmethode.

§. 300.

Diese besteht darin, daſs man in der Ebene des $n$ecks eine bestimmte Richtung, die **Normallinie, Normalrichtung**, annimmt und sowohl die Seiten des $n$ecks, als auch die Winkel miſst, welche diese mit der Normallinie bilden, zu welchem Zwecke in jedem Eckpunkte eine Parallele mit der Normallinie gezogen wird. Sie bildet also eigentlich einen besonderen Fall der Umfangsmethode. Man bedient sich dieser Methode nur bei der Aufnahme mit der Boussole und nimmt dann zur Normallinie den Durchschnitt der magnetischen

Meridianebene mit dem Horizonte, indem man voraussetzt, dafs die magnetischen Meridiane in den nicht zu entfernt liegenden Winkelpunkten als parallel angesehen werden dürfen.

Zweites Capitel.

Der Gebrauch des Theodoliths bei der Aufnahme kleiner Fluren.

I. Bestimmung unzugänglicher Linien.

§. 301.

Aufgabe. Die Länge einer Linie zu bestimmen, die zwar an ihren Endpunkten, aber nicht ihrer Richtung nach zugänglich ist.

Man mefse in dem aufserhalb der Linie $AB = c$ angenommenen Standpunkte C den Winkel $ACB = C$ und die ihn einschliefsenden Seiten $CA = b$ und $CB = a$, so ist

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}.$$

Bei grofsen Zahlenwerthen für a und b ist die Anwendung dieser Formel aber unbequem; setzt man

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2} C \sqrt{ab}}{a - b} = \operatorname{tg} x,$$

so ist $c = \frac{a - b}{\cos x}$.

Denn aus der obigen Gleichung erhält man

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab(1 - \cos C) - 2ab,$$
$$= (a - b)^2 + 4ab \sin \tfrac{1}{2} C^2,$$
$$= (a - b)^2 + (a - b)^2 \operatorname{tg} x^2 = (a - b)^2 \sec x^2 = \left(\frac{a - b}{\cos x}\right)^2.$$

Es mufs noch bemerkt werden, dafs wenn von dem Winkel C mehrere Beobachtungen vorliegen, also nach §. 270 die Gröfse desselben zwischen zwei Werthen als Gränzen liegt, alsdann auch für die Seite c kein bestimmter Werth, sondern ein von zwei Gränzen eingeschlofsener gedacht werden mufs. Hierbei ist aber aufserdem noch berücksichtigt, dafs von den eingeschlofsenen Seiten absolut richtige Werthe gegeben sind.

Anmerkung. Die Auflösung der etwa hierher gehörenden Aufgaben: aus der bekannten Entfernung zweier zugänglicher Punkte die Lage eines dritten zugänglichen Punktes zu bestimmen, wenn nur der eine der ersteren oder ein Punkt zwischen denselben oder in der Verlängerung derselben zugänglich ist, dürfte hier deshalb übergangen werden können, da von Probemefsungen in Bezug auf die nothwendig zu mefsenden Winkel keine Rede sein, also von den gesuchten Entfernungen auch kein sicheres Resultat erwartet werden kann.

§. 302.

Aufgabe. Die Entfernung zweier unzugänglicher Punkte A und B (Fig. 123) zu bestimmen, wenn dieselben aus zwei zugänglichen Punkten C und D, deren Entfernung von einander bestimmt werden kann, gesehen werden können.

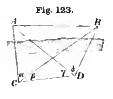


Fig. 123.

Man mefse die Linie $CD = a$ und in C und D die Winkel $ACB = \alpha$, $BCD = \beta$, $ADC = \gamma$ und $ADB = \delta$, so ist

$$AD = b = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}, \quad BD = c = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma + \delta)},$$

folglich, da $AB = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \delta}$ ist,

$$AB = a \sqrt{\left[\left(\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}\right)^2 + \left(\frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma + \delta)}\right)^2 - \frac{2 \sin(\alpha + \beta) \sin \beta \cos \delta}{\sin(\alpha + \beta + \gamma) \sin(\beta + \gamma + \delta)}\right]}.$$

Vortheilhafter ist es aber, wie im §. 301 aus

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \sin \tfrac{1}{2} \delta \sqrt{(bc)}}{b - c}$$

den Winkel x zu berechnen und dann nach $AB = \frac{b - c}{\cos x}$, AB zu bestimmen.

Soll ein möglichst richtiges Resultat für AB erzielt werden, so müssen nicht allein die Winkel α, β, γ und δ, sondern aufserdem noch ACD und CDB gemefsen werden, um aus diesen vermittelnden Beobachtungen (§. 264) nach den in dem folgenden Abschnitt zu entwickelnden Regeln die wahrscheinlichsten Werthe für die ersteren vier Winkel zu erhalten. In Bezug auf die aus ΔADB zu berechnende Seite gilt dann wieder das im vorigen Paragraphen Erwähnte.

§. 303.

Lehrsatz. Wenn die Gröfse jedes Polygonwinkels und aufserdem der Winkel BAM (Fig. 124) bekannt ist, den eine beliebige Seite AB mit einer durch A gehenden Linie AM (welche auch eine Polygonseite sein kann) einschliefst, so erhält man die Neigung jeder folgenden Polygonseite, wenn zur Neigung der vorhergehenden Seite der Polygonwinkel addiert wird, den beide Seite einschliefsen und man von der Summe 180° subtrahiert.

Denn zieht man $BM_1 \neq AM$, so ist 1. $\widehat{CBM_1} = \widehat{CBA} - ABM_1$; da aber $ABM_1 = 180^0 - BAM$, so ist $\widehat{CBM_1} = BAM + \widehat{CBA} - 180^0$.

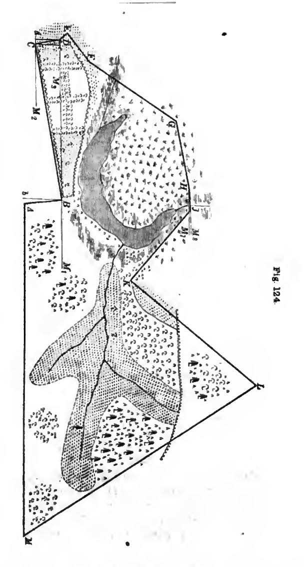


Fig. 124.

2. Zieht man $C M_2 \# A M$, so ist $D C M_2 = D C B + B C M_2$; es ist aber $B C M_2 = 180^0 - C B M_1$ und $C B M_1 = 360^0 - \widehat{C B M_1}$, folglich $D C M_2 = \widehat{C B M_1} + D C B - 180^0$.

3. Man ziehe $DM_3 \mp AM$, so ist $EDM_3 = \widehat{EDC} - CDM_3$; weil aber $CDM_3 = 180^0 - DCM_2$ ist, so ist

$$EDM_3 = DCM_2 + \widehat{EDC} - 180^0 \text{ u. s. f.}$$

4. Zieht man $IM_8 \mp AM$, so ist

$$KIM_8 = 180^0 - HIK - IHM_7;$$

weil aber KIM_8 in Bezug auf die früheren Neigungen negativ gesetzt werden mufs, so ist

$$KIM_8 = IHM_7 + HIK - 180^0 \text{ u. s. f.}$$

Anmerkung. Man pflegt die Winkel $\widehat{CBM_1}$, DCM_2, $EDM_3 \ldots$ die reducierten Winkel (in Bezug auf AM) zu nennen.

§. 304.

Bei dem in 3. des vorigen Paragraphen betrachteten Falle ist die Neigung der Seite IK im entgegengesetzten Sinne als die Neigungen der vorhergehenden Seiten gefunden; da es aber zweckmäfsiger ist, die Neigungen nach derselben Richtung von 0^0 an bis 360^0 zu bestimmen, so erhält man dann

$$\begin{aligned}\widehat{KIM_8} &= 360^0 - (180^0 - HIK + IHM_7) \\ &= 360^0 + HIK + IHM_7 - 180^0.\end{aligned}$$

Ist also bei Zahlenrechnungen zur Bestimmung der Neigung einer Polygonseite die Summe der Neigung der vorhergehenden Seite und des von beiden Seiten eingeschlofsenen Polygonwinkels kleiner als 180^0, so ist zur Vermeidung des negativen Neigungswinkels 180^0 zu addieren. Ist ferner der nach der Subtraction der 180^0 gebliebene Rest gröfser als 360^0, so kann man 360^0 abziehen und den Rest als die Neigung der betreffenden Polygonseite betrachten.

Beispiel. In Fig. 124 seien gegeben die Winkel:

$A = 97^0\,32'\,2''$, $B = 271^0\,6'\,34''$, $C = 92^0\,3'\,13''$,
$D = 201^0\,1'\,53''$, $E = 96^0\,51'\,23''$, $F = 196^0\,20'\,36''$,
$G = 135^0\,35'\,18''$, $H = 170^0\,1'\,3''$, $I = 138^0\,5'\,8''$,
$K = 271^0\,2'\,6''$, $L = 73^0\,50'\,42''$, $M = 56^0\,30'\,2''$,

so erhält man für die Neigung der Seite

$BA = 97^0\,32'\,2''$, $CB = 188^0\,38'\,36''$, $DC = 100^0\,41'\,49''$,
$ED = 121^0\,43'\,42''$, $FE = 38^0\,35'\,5''$, $GF = 54^0\,55'\,41''$,

$$HG = 10^0\,30'\,59'',\quad IH = 0^0\,32'\,2'',\quad KI = \left\{\begin{array}{c} -\;41^0\,22'\,50'' \\ \text{oder} \\ +\;318^0\,37'\,10'', \end{array}\right.$$

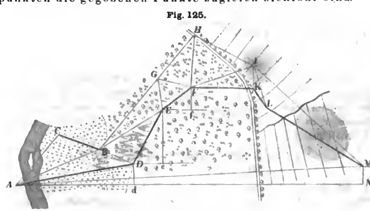
$$LK = 49^0\,39'\,16'',\quad ML = \left\{\begin{array}{c} -\;56^0\,30'\,2'', \\ \text{oder} \\ 303^0\,29'\,58'', \end{array}\right\},\quad MA = \mp 180^0.$$

Der zuletzt gefundene Werth der Neigung der Seite MA zeigt daher, dafs die Neigungen aller Polygonseiten richtig bestimmt worden sind.

§. 305.

Aufgabe. Die Entfernung zweier zugänglicher Punkte A und M (Fig. 125) zu bestimmen, wenn keiner derselben von dem andern gesehen, auch aufserhalb AM keine Standlinie angenommen werden kann, aus deren Endpunkten die gegebenen Punkte zugleich sichtbar sind.

Fig. 125.



Man verbinde die gegebenen Punkte A und M durch eine Reihe an einander hängender Dreiecke ABC, ABD, BDE....., mefse in jedem Winkelpunkte sämmtliche von den Seiten gebildete Winkel und in dem einen Dreiecke auf ebenem Terrain die eine Seite, z. B. BC, mittelst der Mefsstangen. Die bei dem Mefsen der Winkel sich ergebenden Unterschiede mit 180^0, falls sie innerhalb der möglichen Fehlergränzen liegen, gleicht man aus, wozu der folgende Abschnitt das Verfahren angeben wird. Aus der unmittelbar gemefsenen Seite $BC = a$ und den bekannten Winkeln des Dreiecks ABC berechnet man AC und AB nach den Formeln

$$b = \frac{a \sin B}{\sin(B+C)}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin(B+C)},$$

oder durch Hülfe des trigonometrischen Satzes

$$b + c : a = \cos \tfrac{1}{2}(B - C) : \sin \tfrac{1}{2} A,$$

$$b - c : a = \sin \tfrac{1}{2}(B - C) : \cos \tfrac{1}{2} A$$

mittelst der Ausdrücke

$$b + c = \frac{a \cos \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)}, \quad b - c = \frac{a \sin \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{1}{2}(B+C)}.$$

Eben so in den andern Dreiecken.

Wollte man nun die Dreieckspunkte aus den berechneten Seiten auftragen, um die Entfernung der beiden Punkte A und M zu bestimmen, so würden Fehler, die beim Auftragen des einen Winkelpunktes begangen werden, sich auch auf die andern Winkelpunkte fortpflanzen und dadurch eine Verschiebung der Endpunkte des Dreiecksnetzes veranlafsen. Um deshalb die Lage jedes Winkelpunktes unabhängig von den andern zu bestimmen, legt man durch A eine Linie AN (die Hauptlinie oder Achse), die wo möglich ganz aufserhalb des entstehenden Polygons zu liegen kommt, bestimmt den Winkel DAN, den sie mit der einen Dreiecksseite bildet, oder nimmt denselben auch beliebig an und berechnet nach §§. 303 und 304 die Neigungen der äufseren Polygonseiten AD, DE, EF..... Denkt man sich nun durch jeden Winkelpunkt D, E, F..... Parallelen mit AN gezogen und auf die letzteren Normalen von jenen Punkten gefällt, so erhält man lauter rechtwinklichte Dreiecke, in welchen die Hypotenuse und ein schiefer Winkel bekannt ist. Man kann daher die Länge der beiden Katheten als Abscisse und Ordinate in Bezug auf die Parallele berechnen, z. B. Dd und Ad aus dem rechtwinklichten Dreiecke ADd mittelst der Ausdrücke

$$Dd = AD \sin DAd,$$
$$Ad = AD \cos DAd;$$

Ee und De aus dem Dreiecke DEe u. s. f.

Aus diesen berechneten Coordinaten erhält man daher

$$MN = Dd + Ee + Ff + \ldots\ldots$$
$$AN = Ad + De + Ef + \ldots\ldots$$

Dann ist $AM = \sqrt{AN^2 + MN^2}$; kommt es aber auch auf die Gröfse des Winkels DAM an, so berechne man aus $\frac{MN}{AN} = \operatorname{tg} MAN$ die Gröfse des Winkels MAN, dann ist

$$DAM = DAN - MAN$$

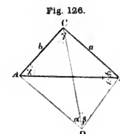
und

$$AM = \frac{MN}{\sin MAN}.$$

§. 306.

Aufgabe. Aus der bekannten Lage dreier auf dem Felde gegebener Punkte A, B, C, die Lage eines vierten zugänglichen Punkts D zu finden (Fig. 126).

Da die gegenseitige Lage der drei Punkte gegeben ist, so sind auch die Seiten $AC = b$, $BC = a$ und der Winkel γ des Dreiecks ABC gegeben oder doch zu berechnen. Man wird daher in dem Vierecke $ACBD$ die Linien DA und DB berechnen, also die Lage des Punktes D bestimmen können, wenn man in D die Winkel $ADC = \alpha$ und



$CDB = \beta$ mifst und aufserdem einer der Winkel CAD oder CBD bekannt wäre. Man setze daher $CAD = \chi$, so ist $CBD = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma + \chi)$, oder wenn man $360^0 - (\alpha + \beta + \gamma) = \varphi$ setzt, $CBD = \varphi - \chi$. Man erhält alsdann

$$DC = \frac{b \sin \chi}{\sin \alpha} = \frac{a \sin (\varphi - \chi)}{\sin \beta},$$

folglich $b \sin \chi \sin \beta = a \sin \alpha \sin (\varphi - \chi)$, oder $b \sin \beta \sin \chi = a \sin \alpha (\sin \varphi \cos \chi - \cos \varphi \sin \chi)$, mithin

$$b \sin \beta = a \sin \alpha \sin \varphi \operatorname{cotg} \chi - a \sin \alpha \cos \varphi,$$

woraus folgt

$$\operatorname{cotg} \chi = \frac{b \sin \beta + a \sin \alpha \cos \varphi}{a \sin \alpha \sin \varphi}$$

$$= \frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha \sin \varphi} + \operatorname{cotg} \varphi.$$

Aus dem bekannten Winkel φ ergiebt sich dann

$$AD = \frac{b \sin (\alpha + \chi)}{\sin \alpha}, \quad CD = \frac{b \sin \chi}{\sin \alpha},$$

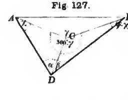
$$BD = \frac{a \sin (\alpha + \gamma + \chi - 180^0)}{\sin \beta}.$$

Anmerkung. Man nennt diese Aufgabe das **trigonometrische Rückwärts-Einschneiden**, auch das **Pothenot'sche** oder **Snell'sche Problem der drei Punkte**, indem **Snellius** sie schon 1614 angab, der französische Mathematiker **Pothenot** aber am Ende des 17. Jahrhunderts eine Auflösung dafür lieferte. Später hat man sehr mannigfaltige Auflosungen dafür gegeben.

§. 307.

1. Ist in der vorigen Aufgabe $\gamma = 180^0$, d. h. liegen die drei Punkte A, B, C in einer geraden Linie, so ist $\varphi = 360^0 - (\alpha + \beta + 180^0) = 180^0 - (\alpha + \beta)$, also $\operatorname{cotg} \varphi = -\operatorname{cotg} (\alpha + \beta)$, $\sin \varphi = \sin (\alpha + \beta)$ und daher

$$\operatorname{cotg} \chi = \frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)} - \operatorname{cotg} (\alpha + \beta).$$



2. Hat das Dreieck ABC gegen den Punkt D die Lage der Fig. 127, so mufs man für γ seinen Implementwinkel $360^0 - \gamma$ nehmen. Es ist alsdann

$$\varphi = 360^0 - (\alpha + \beta + 360^0 - \gamma) = \gamma - \alpha - \beta$$

und daher

$$\operatorname{cotg} \chi = \frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha \sin (\gamma - \alpha - \beta)} + \operatorname{cotg} (\gamma - \alpha - \beta).$$

3. Ist in Fig. 126 $ACB + ADB = 180^0$, d. h. liegt der gesuchte Punkt D mit den drei gegebenen in einer Kreislinie, so ist auch $\varphi = 180^0$ und $\operatorname{cotg} \varphi = \infty$, $\sin \varphi = 0$; man erhält alsdann

$$\cotg\chi = \frac{b \sin\beta}{0} + \infty,$$

d. h. der Ausdruck für $\cotg\chi$ erscheint in einer Form, aus welcher sich der Werth für χ nicht bestimmen läfst. Denkt man sich nun durch die vier Punkte eine Kreislinie gelegt, so leistet jeder andere Punkt, der, wie D, in der Kreislinie liegt, der Aufgabe ebenfalls Genüge, die Auflösung ist also unbestimmt.

4. Durch die Mefsung der Winkel α und β wird nur der mathematischen Lösung der obigen Aufgabe genügt, nicht aber der praktischen Ausführung, indem die unvermeidlichen Fehler nicht ausgeglichen werden können. Dazu wird nicht allein die Mefsung des Winkels ADB, sondern auch die des Winkels CAD, wo möglich auch die des Winkels CBD erfordert. (M. vgl. §. 360, Beisp. 2.) Aufserdem sind die Winkel α und β mit um so gröfserer Schärfe zu bestimmen, je kleiner sie sind, d. h. je weiter der Punkt D vom Dreieck ABC entfernt liegt, weil alsdann schon ein kleiner Fehler einen bedeutenden Einflufs auf die Berechnung der Linien DC, DB und DA ausübt.

Die obige Bemerkuug gilt auch für die folgende Aufgabe, welche man als die Erweiterung des Pothenot'schen Problems ansehen kann.

Ueber das letztere ist noch zu vergleichen: die Pothenot'sche Aufgabe in praktischer Beziehung dargestellt von Chr. L. Gerling. Marburg, 1840.

§. 308.

Aufgabe. Aus der bekannten Lage dreier Punkte A, B und C (Fig. 128) die Lage zweier anderer zugänglicher Punkte P und Q zu bestimmen, wenn von P die Punkte A, C nnd Q und von Q die Punkte P, B und C sichtbar sind.

Fig. 128.

Man mefse in P die Winkel α nnd β, in Q die Winkel γ und δ, so ist, da $ACB = \varepsilon$ bekannt ist, in dem Fünfeck $ACBQP$ die Summe der Winkel CAP und $CBQ = \varphi = 6R - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$; setzt man daher $CAP = \chi$, so ist $CBQ = \varphi - \chi$.

In den Dreiecken ACP, PCQ und QCB erhält man, wenn man $AC = b$ und $CB = a$ setzt,

$$b : CP = \sin\alpha : \sin\chi,$$
$$CP : CQ = \sin\gamma : \sin\beta,$$
$$CQ : a = \sin(\varphi - \chi) : \sin\delta,$$

folglich $\quad b : a = \sin\alpha \sin\gamma \sin(\varphi - \chi) : \sin\chi \sin\beta \sin\delta,$

oder $\quad a \sin\alpha \sin\gamma \sin(\varphi - \chi) = b \sin\chi \sin\beta \sin\delta,$

$$\text{mithin } \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin\chi} = \frac{b \sin\beta \sin\delta}{a \sin\alpha \sin\gamma},$$

$$\text{oder}\quad \frac{\sin\varphi\cos\chi - \cos\varphi\sin\chi}{\sin\chi} = \frac{b\sin\beta\sin\delta}{a\sin\alpha\sin\gamma},$$

$$\text{oder}\ \sin\varphi\operatorname{cotg}\chi - \cos\varphi = \frac{b\sin\beta\sin\delta}{a\sin\alpha\sin\gamma},$$

$$\text{folglich}\ \operatorname{cotg}\chi = \operatorname{cotg}\varphi + \frac{b\sin\beta\sin\delta}{a\sin\alpha\sin\gamma\sin\varphi}.$$

Man erhält daher

$$AP = \frac{b\sin(\alpha+\chi)}{\sin\alpha},\quad CP = \frac{b\sin\chi}{\sin\alpha},$$

$$CQ = \frac{a\sin(\varphi-\chi)}{\sin\delta},\quad BQ = \frac{a\sin(\delta+\varphi-\chi)}{\sin\delta}.$$

II. Aufnahme kleiner Fluren.

§. 309.

Obgleich die winkelmefsenden Werkzeuge und namentlich der Theodolith, wie der folgende Abschnitt angeben wird, in der niedern Geodäsie hauptsächlich nur bei der Netzlegung über eine gröfsere Flur, wobei der Mefstisch allein nicht mehr die erforderliche Genauigkeit darbietet, angewandt werden: so kann ersterer doch auch bei der Aufnahme einzelner Grundstücke oder kleiner Fluren seine Anwendung finden, besonders wenn es auf eine genaue Inhaltsbestimmung, oder überhaupt auf eine möglichst getreue Darstellung des Gemefsenen ankommt. Wenn hierbei nun auch in einzelnen Fällen wohl die Basierungs- oder die Polarmethode (§§. 297 und 298) benutzt werden könnten: so wird man sich doch auf die Umfangsmethode, wie sie bei einer unzugänglichen, nicht übersichtlichen und auch nach Aufsen keine freie Aussicht gestattenden Flur nur angewandt werden kann, deshalb beschränken, weil dann, wie der folgende Abschnitt zeigen wird, eine vollständige Ausgleichung sowohl der unmittelbar gemefsenen Winkel, als der Seiten zuläfsig ist. Man wird deshalb auch auf den Vortheil verzichten, den die Benutzung etwa im Innern der Flur vorhandener fixer Punkte, die man aus allen Winkelpunkten des Polygons sehen kann, gewähren könnte, weil sie zur erwähnten Ausgleichung meistens nicht zu benutzen sind.

Man mifst also sämmtliche Seiten der Figur mit der Mefskette und sämmtliche Umfangswinkel mit dem Theodolith. Mufs oder will man aber auf die vorhin erwähnte Ausgleichung der Winkel und Seiten verzichten, so untersucht man nach der Mefsung der Polygonwinkel, ob deren Summe $(n-2)\,2R$ beträgt. Zeigt sich eine Differenz und liegt dieselbe innerhalb der möglichen Fehlergränze, so wird der gefundene Unterschied durch die Zahl der Winkelpunkte dividiert und jeder Winkel um diesen Quotienten verbefsert.

Man nimmt nun, aus dem im §. 305 angegebenen Grunde, die eine Polygonseite (gewöhnlich die längste) als Hauptlinie oder Achse

an, z. B. AM in Fig. 124 und berechnet zunächst nach den verbefserten Polygonwinkeln die Neigungen aller Polygonseiten gegen die Achse. Die Neigung der letzten Polygonseite MA wird dann nach §. 304 $+ 180^0$ betragen müfsen. Darauf berechnet man nach §. 305 die Ordinaten- und Abscissenstücke Bb, Ab; Cc, Bc; Dd, Cd u. s. w. und bestimmt nach der Gröfse der zugehörigen Neigungswinkel ihre Vorzeichen mittelst der ebenen Trigonometrie. Durch Addition der Ordinaten- und Abscissenstücke erhält man dann successiv die Ordinate und Abscisse jedes Winkelpunkts in Bezug auf die angenommene Achse. Die letzte Summe bei den Ordinatensummierungen müfste dann $= 0$ und die letzte Summe bei den Abscissen der Länge der Achse gleich sein. Der unvermeidlichen Fehler wegen wird diefs aber nicht zutreffen. Es ist daher noch eine Verbefserung sämmtlicher Ordinaten und Abscissen in der Art vorzunehmen, dafs die ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werden.

Wäre z. B. das letzte Ordinatenstück Δy_m zusammengesetzt aus $\Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \Delta y_4$, wobei es gleichgültig ist, ob alle Summanden additiv oder einzelne darunter auch subtractiv sind, und ist der Unterschied zwischen der Ordinate y_m und $\Delta y_m = \pm \alpha$, so ist zu setzen:

$$\text{Statt } \Delta y_1 : \Delta y_1 \mp \frac{\alpha \Delta y_1}{y_m},$$

$$\text{„ } \Delta y_2 : \Delta y_2 \mp \frac{\alpha \Delta y_2}{y_m},$$

$$\text{„ } \Delta y_3 : \Delta y_3 \mp \frac{\alpha \Delta y_3}{y_m}, \text{ u. s. f.}$$

woraus dann die verbefserten y_1, y_2, y_3 ...... sich ergeben. Auf dieselbe Weise werden auch die Abcissen verbefsert.

Die Einzelnheiten der Flur können dann durch hindurchgelegte Bindelinien und hierauf bezogene Ordinaten bestimmt werden. (M. vgl. §. 332, Cap. 4 dieses Abschnitts.)

Fig. 124 stellt ein Zwölfeck vor, von welchem die in der folgenden tabellarischen Zusammenstellung angegebenen Polygonwinkel mit einem kleinen Theodolith durch Ablesung zweier Verniers bestimmt wurden. Bei der Berechnung der Ordinaten ergab sich die zu L gehörige Ordinate $= + 171{,}555^0$, während das zu M gehörige Ordinatenstück $- 171{,}298^0$ betrug; der Unterschied zwischen beiden ist daher $= 0{,}257^0 = + \alpha$. Mithin ist jede der Zahlen 26,569; 17,774 ...... mit $\frac{0{,}257}{171{,}555} = 0{,}0015$ zu multiplicieren und dann um die entstandenen Producte 0,04; 0,027 .... zu vermindern, wodurch die verbefserten Ordinatenstücke 26,529; 17,747 ...... entstehen; aus diesen werden dann endlich die verbefserten Ordinaten gebildet. Die geringe Differenz bei den Abscissen von 0,007 ist nicht weiter verbefsert worden.

Winkelpunkte	Gemessener Polygonwinkel Gr.	M.	S.	Verbesserter Polygonwinkel Gr.	M.	S.	Berechnete Neigungen der Polygonseiten Gr.	M.	S.	Polygonseiten Bez.	Länge Ruthen.	Berechnete Ordinatenstücke Winkelpunkte	Vorz.	Ruthen.	Berechnete Abscissenstücke Vorz.	Ruthen.	Berechnete Ordinaten Vorz.	Ruthen.	Berechnete Abscissen Vorz.	Ruthen.	Verbesserte Ordinatenstücke Vorz.	Ruthen.	Verbesserte Ordinaten Vorz.	Ruthen.
A	97	32	13	97	32	2	97	32	2	BA	26,8	B	+	26,569	—	3,514	+	26,569	—	3,514	+	26,529	+	26,529
B	271	6	45	271	6	34	188	38	36	CB	118,27	C	—	17,774	—	116,927	+	8,795	—	120,441	—	17,747	+	8,782
C	92	3	24	92	3	13	100	41	49	DC	18,56	D	+	18,237	—	3,445	+	27,032	—	123,886	+	18,21	+	26,992
D	201	2	4	201	1	53	121	43	42	ED	6,45	E	+	5,486	—	3,392	+	32,518	—	127,278	+	5,478	+	32,47
E	96	51	34	96	51	23	38	35	5	FE	25,7	F	+	16,029	+	20,089	+	48,547	—	107,189	+	16,005	+	48,475
F	196	20	47	196	20	36	54	55	41	GF	78,73	G	+	64,435	+	45,238	+	112,982	—	61,951	+	64,338	+	112,813
G	135	35	29	135	35	18	10	30	59	HG	49.96	H	+	9,118	+	49,121	+	122,1	—	12,83	+	9,104	+	121,917
H	170	1	14	170	1	3	—	32	2	IH	21,2	I	+	0,197	+	21,199	+	122,297	+	8,369	+	0,197	+	122,114
I	138	5	19	138	5	8	318 oder — 41	37 22	10 50	KI	67,1	K	—	44,357	+	50,347	+	77,94	+	58,716	—	44,291	+	77,823
K	27	2	17	271	2	6	49	39	16	LK	122.83	L	+	93,615	+	79,52	+	171,555	+	138.236	+	93,475	+	171,298
L	73	50	53	73	50	42	303 oder — 56	29 30	58 2	LM	205,42	M	—	171,298	+	113,377	+	0,257	+	251,613	—	171,298		0
M	56	30	13	56	30	2	+ 180	—	—	AM	251,62	A		0	—	251,62	+	0,257	—	0,007		0		0
	1800	2	12	1800	.	.																		

Drittes Capitel.

Der Gebrauch des Mefstisches und der Boussole bei der Aufnahme kleiner Fluren.

I. Construction der Normalen.

§. 310.

Aufgabe. In einem gegebenen Punkte C einer gegebenen Linie AB auf dem Felde eine Normale zu errichten.

1. Mittelst des Mefstisches. Man stelle sich in dem gegebenen Punkte C auf, bestimme nach §. 238 c senkrecht über C und stelle die Mefstischplatte fest. Nun visiere man nach A oder B und ziehe die Projection der Visierlinie (die Richtlinie) ab. Errichtet man dann in c auf ab die Normale cd, so ist die längs cd ausgesteckte Linie CD die verlangte Winkelrechte.

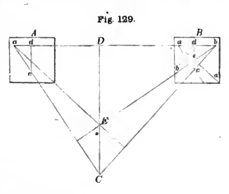
2. Mittelst der Boussole*). Man bestimme in C den Abweichungswinkel der Linie AB vom magnetischen Meridian, drehe die Boussole so weit herum, bis derselbe Pol der Magnetnadel einen Winkel abschneidet, der um 90 Grad von dem abgelesenen verschieden ist und stecke längs der optischen Achse des Fernrohrs die Linie aus.

§. 311.

Aufgabe. Aus einem Punkte C aufserhalb einer Linie AB auf dem Felde eine Normale auf die Linie zu fällen.

1. Mittelst des Mefstisches. Man bestimme in einem beliebigen Punkte der Linie AB (Fig. 129) z. B. in A, auf dem Mefstische den Winkel $bac = BAC$ (§. 239) und fälle von dem beliebig gewählten Punkte c auf ab die Normale cd. Ist nun C zugänglich, so orientiere man daselbst den Mefstisch nach ac, bringe c senkrecht über C und stecke CD längs cd aus.

Fig. 129.



Ist aber C unzugänglich, so stelle man sich in einem zweiten Punkte von AB, etwa in B auf, orientiere daselbst

*) Ueber die Anwendung der Boussole vgl. m. §. 240.

den Meſstisch nach ab und bestimme den Winkel $abc = ABC$. Dann fälle man von a und b Normalen aa' und bb' auf die Gegenseiten des Dreiecks abc oder ihre Verlängerungen, stecke diese aus und bestimme ihren Durchschnittspunkt E, so ist die Verlängerung von CE die verlangte Normale. Denn da ab als die Horizontalprojection von AB angesehen werden kann, also $\Delta abc \sim \Delta ABC$ ist, die Verbindungslinie ce aber normal auf ab steht, so wird auch CE normal auf AB sein.

Man sieht leicht, daſs es hierbei besonders darauf ankommt, daſs die Kippregel genau an die verzeichnete Linie ac gelegt wurde. Deshalb ist es nie zu versäumen, die Richtung einer Linie, wenn danach der Meſstisch später orientiert werden soll, auf den Rändern der Platte zu bezeichnen. In der Nichtbeachtung dieser Regel ist hauptsächlich die Quelle der Fehler zu suchen, die in dem weiteren Fortgange der Aufnahme entstehen.

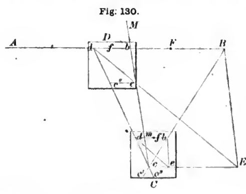
2. Mittelst der Boussole ist das Verfahren dem im vorigen Paragraphen angegebenen ähnlich, sobald der Punkt C zugänglich ist. Gestattet dieſs aber das Terrain nicht, so wird eine Winkelmeſsung und eine Verzeichnung auf dem Papiere erfordert, wozu in Bezug auf die erstere, die Boussole nicht die erforderliche Genauigkeit gewährt.

II. Construction der Parallelen.

§. 312.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt C mit einer ebenfalls gegebenen Linie AB auf dem Felde eine Parallele abzustecken.

1. Mittelst des Meſstisches. Ist die gegebene Linie AB (Fig. 130) zugänglich, so bestimme man in einem beliebigen Punkte D derselben den Winkel $bdc'' = BDC$, ziehe durch den willkürlich gewählten Punkt c, $ce \,\#\, ab$, stelle sich in C auf und orientiere daselbst den Meſstisch nach $c''d$, so ist die längs ce ausgesteckte Linie CE die verlangte Parallele.



Ist aber die gegebene Linie unzugänglich, so kann die Aufgabe nur nach §. 316 gelöst werden.

Anmerkung. Da das Ziehen der Parallelen auf der Mefstischplatte bei dem Mangel eines Winkelhakens umständlich ist, so kann man kürzer folgendes Verfahren anwenden. Man lege an die Linie, mit welcher eine Parallele auf der Mefstischplatte gezogen werden soll, die Kippregel und suche ein entferntes Object auf. Stellt man nun die Mefstischplatte fest, legt an den gegebenen Punkt, durch welchen die Parallele zu ziehen ist, die Kippregel und dreht sie um denselben so lange herum, bis der Durchschnitt des Fadenkreuzes auf das Object gerichtet ist, so ist die längs der Kante des Lineals gezogene Linie die verlangte Parallele.

2. Mittelst der Boussole. Man bestimme in einem beliebigen Punkte D der Linie AB den Abweichungswinkel, drehe in C die Boussole so weit herum, bis derselbe Pol der Magnetnadel den nämlichen Winkel abschneidet und stecke dann längs der optischen Achse des Fernrohrs die Linie aus.

Anmerkung. Die in mehrfacher Hinsicht, z. B. bei dem Durchhauen einer Linie durch einen Forst, gemachte Forderung, mittelst der Boussole von einem gegebenen Punkte eine Linie unter einem bestimmten Abweichungswinkel abzustecken, bedarf ihrer Einfachheit wegen keiner weiteren Auseinandersetzung.

III. Bestimmung unzugänglicher Linien.

§. 313.

Aufgabe. Die Länge einer Linie zu bestimmen, die zwar in ihren Endpunkten, aber nicht ihrer Länge nach zugänglich ist.

1. Mittelst des Mefstisches. In dem gewählten oder gegebenen Standpunkte C, Fig. 130, bestimme man, wenn DB die gegebene Linie ist, den Winkel $dcb = DCB$, mefse die Linien CD und CB und trage die Längen nach dem verjüngten Mafsstabe auf die Schenkel $= cd$ und cb, so ist db das verjüngte Mafs von DB, weil $\Delta dcb \backsim \Delta DCB$ ist. Sowohl der Zweck der Aufnahme, also die zu erreichende Genauigkeit, als auch die Beschaffenheit des Terrains zwischen C und DB wird entscheiden, ob man die geraden Linien CD und CB mit der Mefskette oder mit dem Distanzmefser mefsen kann.

2. Mittelst der Boussole. Man mefse in C die Abweichungswinkel der Linien CD und CB, so wie ihre Längen.

Zur Bestimmung der Länge der Linie DB auf dem Papiere, legt man an den gegebenen oder angenommenen Punkt c die Zulegeplatte mit der einen längeren Seitenkante, dreht sie um diesen Punkt, bis derselbe Pol der Magnetnadel, mit welchem auf dem Felde der Abweichungswinkel bestimmt wurde, den letzteren abschneidet, zieht längs der Kante nach der Seite des Limbus zu, welche auf dem Felde dem Objecte D zugekehrt war, mit der zugeschärften Bleifeder eine Linie und trägt auf sie das verjüngte Mafs CD von c bis d. Auf dieselbe

Weise bestimmt man *cb*; dann ist *db* das verjüngte Mafs von *DB*. Es versteht sich von selbst, dafs während der Verzeichnung der Linien *cd* und *cb* die Papierfläche nicht die geringste Verrückung erlitten haben darf.

Dem Gebrauche der Boussole liegt bekanntlich der physikalische Satz zum Grunde, dafs von nicht zu entfernt liegenden Punkten auf der Erdoberfläche die magnetischen Meridiane als parallel angesehen werden können. Obgleich nun wegen der täglichen regelmäfsigen und unregelmäfsigen Variationen hinsichtlich der Declination der Magnetnadel jener Satz nicht unbedingt für jede Jahrs- und Tageszeit gültig ist, so sind doch die erwähnten Veränderungen in kleineren Zeiträumen im Allgemeinen viel zu unbedeutend, als dafs sie bei der geringen Genauigkeit, welche die Boussole als Winkelmefser gewährt, in Betracht kommen könnten. Dauert aber eine Mefsung längere Zeit, so ist es dennoch zweckmäfsig, an einer auf dem Felde abgesteckten und gehörig fixierten Linie von Zeit zu Zeit zu untersuchen, ob die Declination der Magnetnadel dieselbe geblieben ist und eine etwa erhebliche Verschiedenheit in Rechnung zu bringen. Auch mache man, hinsichtlich des Ziehens der Linien an der Zulegeplatte und der Stellung derselben gegen die zu bestimmenden Projectionen der Punkte, es sich zur Regel, die vorhin angegebenen Vorschriften streng zu befolgen, so wie auch in derselben Tageszeit die Verzeichnung auf dem Papiere vorzunehmen, in welcher die Abweichungswinkel auf dem Felde abgelesen wurden. Befolgt man dann aufserdem bei der Aufnahme noch die Regel, immer mit demselben Pole der Magnetnadel (gewöhnlich dem Nordpole) die Abweichungswinkel auf dem Felde abzulesen und auf dem Papiere zuzulegen, so wie der Zulegeplatte auf dem Papiere dieselbe Stellung gegen die zu bestimmenden Projectionen der Objecte zu geben, welche sie auf dem Felde gegen letztere hat, indem man das mit Nord oder 0⁰ bezeichnete Ende dem Objecte zukehrt, so erscheinen die auf dem Papiere verzeichneten Winkel befreit von dem Excentricitäts- und Theilungsfehler des Werkzeugs und den regelmäfsigen Variationen der Magnetnadel. Zugleich erhellt aber, dafs, wenn die Boussole auf dem Felde nur als winkelmefsendes Werkzeug angewendet wird, ferner die durch die Subtraction zweier Ablesungen erhaltenen Winkel auf dem Papiere nur mit dem Transporteur verzeichnet werden (wie in den meisten mir bekannten Werken über praktische Geometrie die Vorschriften lauten), die Unvollkommenheit des Werkzeugs nicht vermindert, sondern nur erhöht werden kann.

Anmerkung. Die oben angegebene Methode des mittelbaren Mefsens der Linien nennt man das Vorwärts-Visieren und Mefsen.

§. 314.

Aufgabe. **Wenn die Lage und Entfernung zweier zugänglicher Punkte** D **und** C (Fig. 130) **auf dem Felde bekannt ist, die Lage eines dritten unzugänglichen Punktes** B **zu bestimmen.**

1. **Mittelst des Meſstisches.** Man bestimme in D den Winkel $bdc = BDC$ und mache $dc = DC$; stelle sich nun in C auf, bringe c senkrecht über C, orientiere den Meſstisch nach cd und bestimme $dcb = DCB$, so werden db und cb die Lage des Punktes B gegen DC angeben; denn es ist $\Delta\, dcb \sim \Delta\, DCB$.

2. **Mittelst der Boussole.** Man meſse in D und C die Abweichungswinkel der Linien DB und CB und verzeichne dieselben nach dem vorigen Paragraphen auf dem Papiere, so ergiebt sich b.

Anmerkung. Man nennt diese Methode des Meſsens das **Vorwärts-Einschneiden.**

§. 315.

Weil der Punkt b bei beiden Werkzeugen aus dem Durchschnitte zweier Linien cb und db sich ergiebt, diese Bestimmung aber um so unsicherer sein wird, je schiefer der Winkel dbc ist, unter welchem sich die Linien schneiden, so muſs, wenn B gegen DB eine solche ungünstige Lage hat, von DC aus erst ein anderer, sowohl gegen D oder C, als gegen B günstiger gelegener Punkt X bestimmt werden, um dann die Lage von B gegen DX oder CX zu bestimmen.

§. 316.

Durch dafselbe Verfahren läſst sich auch die **Entfernung zweier unzugänglicher Punkte** B **und** E **auf dem Felde** bestimmen, indem man in D die Winkel BDE uud BDC, in C die Winkel DCE und BCE miſst.

2. Auch läſst sich durch die im §. 314 gelöste Aufgabe der im §. 312 unerörtert gebliebene Fall **des Ziehens einer Parallele, wenn die gegebene Linie unzugänglich ist,** zur Lösung bringen. Ist BE die gegebene Linie, C der gegebene Punkt, so bestimme man nach dem Vorhergehenden aus der Standlinie DC die Lage von BE durch be, ziehe durch c, $cm \mathrel{\#} be$ und stecke längs cm die Linie CM aus.

§. 317.

Aufgabe. **Wenn die Lage und Entferuung zweier Punkte** D **und** B (Fig. 130) **bekannt ist, die Lage eines dritten Punktes** C **zu bestimmen, wenn auſser** C **nur noch der eine**

der ersteren Punkte, oder ein Punkt in der Linie DB oder deren Verlängerung zugänglich ist.

1. Mittelst des Meſstisches. 1. Ist D der zugängliche Punkt, so bestimme man daselbst den Winkel $bdc = BDC$ und mache $db = DB$. Nun stelle man sich mit dem Meſstische in C so auf, daſs cd der Entfernung CD entspricht, bringe c senkrecht über C und orientiere den Meſstisch nach cd, lege die Kippregel an b, visiere nach B und ziehe bc rückwärts, so erhält man den Durchschnittspunkt c. Sollte nun die verticale Lage von c gegen C bedeutend abweichen, so verstelle man den Meſstisch so weit, bis die Bedingung erfüllt wird und wiederhole das letzte Einschneiden.

2. Ist Statt des Punktes D ein Punkt F der Linie DB oder deren Verlängerung zugänglich, so bleibt das Verfahren im Wesentlichen das nämliche. Ist c dann bestimmt, so muſs nur untersucht werden, ob das Fadenkreuz der an dc gelegten Kippregel das Object D trifft; zeigt sich eine Abweichung, so entsprach fd oder fb nicht der Entfernung FD oder FB und es ist dann ein nochmaliges Aufstellen erforderlich.

2. Mittelst der Boussole. Man meſse in D die Abweichungswinkel der Linien DB und DC und in C den Abweichungswinkel der Linie BC, so ergiebt sich dadurch nach §. 313, 2. die Lage von c.

§. 318.

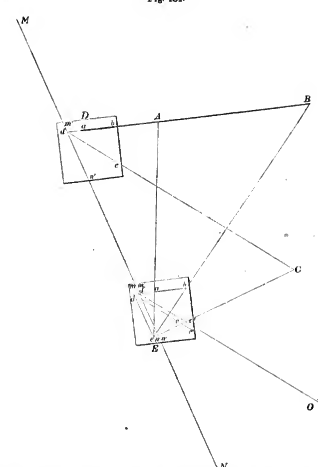
Hat der Punkt C gegen die gegebene Linie DB eine sehr schiefe Lage, so wird die Bestimmung des Punktes c nicht genau. In diesem Falle muſs man von D aus in einem Seitenalignement fortgehen, welches gegen DB beinahe rechtwinklicht, zugleich aber auch günstig gegen den festzulegenden Punkt C liegt, in diesem nun nach dem vorigen Paragraphen einen Punkt bestimmen und durch diesen, sowie durch D den Punkt C durch Vorwärtseinschneiden festlegen.

§. 319.

Aufgabe. Wenn die Lage und Entfernung zweier Punkte A und B, in Fig. 131, bekannt ist, mittelst des Meſstisches die Lage eines dritten Punktes C zu bestimmen, wenn nur ein Punkt in der Verlängerung von AB oder zwischen A und B zugänglich, der Punkt C aber unzugänglich ist.

Man wähle in der Verlängerung von AB den Punkt D so, daſs er in dem Alignement zweier anderer fester Punkte M und N liegt, oder man bezeichne solche durch Baken, wenn keine fixen Punkte vorhanden sein sollten. Man orientiere daselbst den Meſstisch nach ab, bestimme d' senkrecht über D, sowie die Winkel $bd'c' = BDC$, und $bd'n' = BDN$. In dem Alignement MN stelle man sich nun in dem

Fig. 131.



Punkte E, der gegen C und D eine günstige Lage hat, auf, orientiere daselbst den Mefstisch nach $m'n'$, visiere nach A und B und ziehe rückwärts die Visierlinien ae und be, so ist nach §. 317 der Durchschnittspunkt e beider Linien die Projection von E. Legt man demnach an e die Kippregel und visiert nach dem entfernten Punkte M, so ist der Durchschnitt der Richtlinie mn mit $d'b$ oder ihrer Verlängerung, nämlich d, die Projection von D. Zieht man nun noch durch d die Parallele dc'' mit $d'c'$, so ist c die Projection von C. Das Ziehen der letzteren Parallele dc'' kann dadurch leicht geschehen, dafs man an

$d'c'$ die Kippregel legt und untersucht, welches entfernte Object O getroffen wird, darauf an d die Kippregel legt, ebenfalls nach O visiert und die Richtlinie dc'' zieht.

Wird D zwischen A und B angenommen, so ist das Verfahren dasselbe.

§. 320.

Aufgabe. Wenn die Lage und Entfernung zweier Punkte A und B auf dem Felde bekannt ist, mittelst des Mefstisches die Lage eines dritten unzugänglichen Punktes zu bestimmen, wenn weder einer der Endpunkte, noch ein Punkt in der Linie AB oder in ihrer Verlängerung zugänglich ist.

Man stelle den Mefstisch in einem Punkte auf, in welchem C sichtbar ist, in D, Fig. 132, bringe daselbst die Linie ab in eine möglichst parallele Lage mit AB und ziehe rückwärts die Richtlinien Aa und Bb, bis sie sich in d' schneiden. An d' lege man nun die Kippregel, visiere nach C, ziehe die Richtlinie $d'c'$ und bestimme auch $m'n'$ in dem angenommenen Seitenalignement MN. In diesem geht man nun bis E soweit fort, dafs E gegen DC eine günstige Lage hat, orientiert daselbst den Mefstisch nach $m'n'$ und bestimmt in dieser Linie den Durchschnitt e' der nach A gehenden Richtlinie. Legt man alsdann an e' die Kippregel und visiert nach B, so wird die gezogene Richtlinie Be' die Linie $d'b$ in einem andern Punkte als b schneiden, wenn ab in dem ersten Standpunkte D nicht parallel AB war. Dieser Punkt sei b', so ist $ab' \nparallel AB$, weil $ab'd'e' \backsim ABDE$ ist. Man mufs also nun noch ab aus der unrichtigen Lage in die richtige bringen. Zu diesem Zwecke legt man die Kippregel an ab', sucht in der Richtung der optischen Achse des Fernrohrs ein entferntes Object O auf, oder steckt in der genannten Richtung eine Bake aus, legt darauf die Kippregel an ab, bringt durch Drehung der Mefstischplatte die optische Achse des Fernrohrs in das Alignement EO und stellt die Platte fest, so ist $ab \nparallel AB$, also der Mefstisch orientiert. Durch die beiden Richtlinien Aa und Bb erhält man daher den Punkt e, welcher die Projection von E sein wird.

Weil nun in D die Linie ab nicht parallel AB war, so wird sowohl d', als auch $d'c'$ eine unrichtige Lage haben. Zur Verbefserung derselben richte man die an e gelegte Kippregel auf das entfernte Object M und ziehe die Richtlinie mn, so wird in dieser die Projection von D liegen müfsen. Nachdem man nun noch durch e die nach C gehende Richtlinie ec'' gezogen hat, gehe man nach D zurück, bestimme daselbst die Projection d von D und ziehe durch d die nach C gehende Richtlinie dc''', so ist ihr Durchschnitt mit ec'' der gesuchte Punkt c.

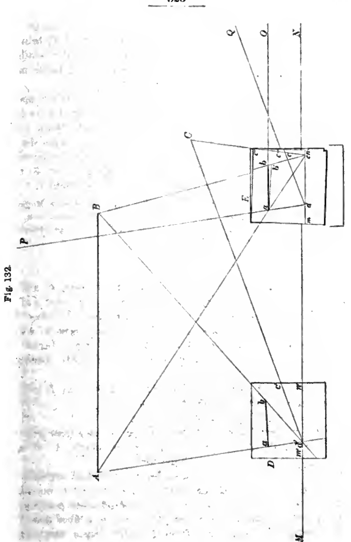


Fig. 132

Aber auch ohne nach D zurückzugehen, läfst sich in E die fehlerhafte Lage von d' und $d'c'$ berichtigen. Man bringe die Mefstischplatte nur wieder in die ursprüngliche unrichtige Lage, indem man die Kippregel an ab' legt; die Platte so weit dreht, bis das Fadenkreuz das Object O deckt und nun die Platte feststellt. Legt man darauf an die

fehlerhafte Linie ad' die Kippregel, bemerkt den in der Richtung der optischen Fernrohrachse liegenden entfernten Gegenstand P, bringt alsdann die Mefstischplatte aus der fehlerhaften Lage in die richtige und zieht die Richtlinie Pa, so erhält man in ihrem Durchschnitte mit mn den Punkt d.

Zur Berichtigung der fehlerhaften Richtlinie $d'c'$ bringt man nun wieder die Mefstischplatte aus der richtigen Lage in die unrichtige, legt an jene Linie die Kippregel nnd bemerkt das entfernt liegende Object Q, worauf das Fadenkreuz gerichtet ist; bringt dann die Mefstischplatte wieder in die richtige Lage, stellt die Platte in dieser Lage fest und zieht durch d die nach Q gehende Richtlinie dc''', so ergiebt sich in dem Durchschnitte der letzteren mit ec'' der Punkt c.

Anmerkung. Man pflegt die in den §§. 317—320 angegebene Methode des mittelbaren Mefsens der Linien das Seitwärtseinschneiden zu nennen. Es ist einleuchtend, dafs von der Ausführung der in den §§. 319 u. 320 angegebenen Methoden mittelst der Boussole keine Rede sein kann.

§. 321.

Aufgabe. Die Lage dreier Punkte A, B und C auf dem Felde ist bekannt und das ähnliche Dreieck abc auf dem Mefstische construiert; man soll daraus mittelst des Mefstisches die Lage eines vierten Punktes D bestimmen, wenn D aufserhalb der Seiten des Dreiecks ABC und deren Verlängerungen liegt und die gegebenen drei Punkte unzugänglich sind.

Hinsichtlich der Lage des zu bestimmenden Punktes D gegen das gegebene Dreieck finden folgende Fälle Statt:

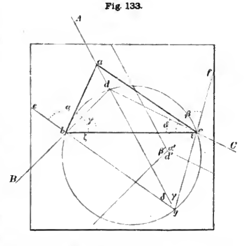
1) Der Punkt D liegt innerhalb des Dreiecks.

2) Der Punkt D liegt aufserhalb des Dreiecks, einer Seite gegenüber.

3) Der Punkt liegt in der Peripherie des durch A, B und C gehenden Kreises oder in dessen Nähe und

4) Der Punkt D liegt aufserhalb des Dreiecks und zugleich innerhalb des Winkels, den zwei rückwärts verlängerte Seiten einschliefsen.

1. Ist in Fig. 133 abc das auf der Mefstischplatte gegebene, dem Dreieck ABC ähnliche Dreieck, so stelle man sich über dem Punkte D, der zunächst innerhalb des Dreiecks ABC liegen mag, auf und bestimme in dem beliebig gewählten Punkt d' die Winkel α' und β', unter welchen die Seiten AC und AB in D erscheinen. Man mache nun $ebc = \alpha'$ und $fcb = \beta'$, verlängere eb und fc bis sie sich in g schneiden, so wird in der Linie ag der gesuchte Punkt d liegen. Um diesen zu bestimmen, mache man $dbc = \gamma$ und $dcb = \delta$, so ist der Durchschnittspunkt d der gesuchte Punkt.



Denn man beschreibe um b, g und c einen Kreis, so wird derselbe auch durch d gehen, da nach der Construction $dbc = \gamma$ ist. Es ist aber $\zeta = gdc$, folglich auch $ebc = \alpha' = adc$. Eben so läfst sich zeigen, dafs $adb = \beta'$ ist.

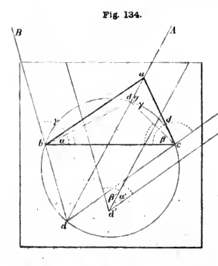
Da nun überhaupt bei der vorliegenden Aufgabe angenommen werden mufs, dafs die Richtpunkte A, B, C in solcher Entfernung von D liegen, dafs es gleichgültig ist, ob die Winkel α' und β' in d' oder d gemefsen, also beziehungsweise den Winkeln ADC und ADB gleich sind, so liegen die Seiten ab und ac gegen d unter denselben Winkeln, unter welchen AB und AC in D erscheinen.

Die Construction der Winkel ebc, fcb, dbc und dcb mittelst Lineals und Zirkels wird immer eine lästige Operation sein; da nun unter der obigen Voraussetzung die auf der Mefstischplatte von nicht zu weit abstehenden Punkten nach denselben Richtobjecten gezogenen Richtlinien als parallel unter einander angesehen werden können, so läfst sich die Construction der genannten Winkel kürzer auf folgende Weise ausführen. Man lege die Kippregel an bc, d. h. an diejenige Linie, dafs deren Endpunkte auf verschiedenen Seiten des dritten Punktes liegen, drehe die Mefstischplatte bis das Fadenkreuz auf C gerichtet ist, stelle nun die Platte fest und drehe um b die Kippregel bis die Visierlinie des Fernrohrs auf A zeigt; dann giebt die rückwärts gezogene Richtlinie die Linie ebg. Auf ähnliche Weise erhält man durch Anlegen an cb, Visieren nach B und A die Linie fcg. Legt man daher nur an ag die Kippregel und richtet durch Horizontalbewegung der Mefstischplatte die Visierlinie des Fernrohrs auf A, so ist der Mefstisch in dieser Lage orientiert. Man wird daher den Punkt d erhalten, wenn man nach Feststellung der Platte, an c die Kippregel legt und die Richtlinie Cc zieht. Eine Probe erhält man, wenn die Richtlinie Bb ebenfalls durch d geht. Diefs wird um so mehr zutreffen, je entfernter die Richtpunkte A, B und C von D liegen.

2. Hat der Standort D eine der anderen vorhin angegebenen Lagen, so bleibt zwar das Verfahren zur Bestimmung seiner Projection d im

Allgemeinen dasselbe, nur ergiebt sich d nicht mit gleicher Sicherheit. Liegt D aufserhalb des Dreiecks ABC, einer Seite BC gegenüber, so erhält g die in Fig. 134 angegebene Lage, woraus folgt, dafs die Orientierung des Mefstisches um so gröfserer Unsicherheit ausgesetzt sein wird, je näher g an a zu liegen kommt. Daher ist dieser Fall in der Praxis möglichst zu vermeiden, oder erst dann auszuführen, wenn man D schon nach 1. oder 4. bestimmt hat.

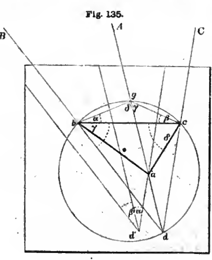
Fig. 134.



3. Fällt a mit g zusammen, d. h. liegt der Standpunkt D mit den drei gegebenen Punkten in der Peripherie eines Kreises, so ist die Bestimmung des ersteren, also die Auflösung der Aufgabe des Rückwärtseinschneidens unmöglich.

4. Liegt der Standpunkt D einer Winkelspitze des Dreiecks ABC gegenüber, Fig. 135, so erhält g eine dem ersten Falle entsprechende Lage, wobei also d mit gehöriger Sicherheit sich ergiebt.

Fig. 135.



In dem Falle, dafs bei 1. oder 4. der Punkt g nicht mehr auf die Mefstischplatte fallen sollte, kann man eine mit bc gezogene Parallele zur Bestimmung desselben benutzen.

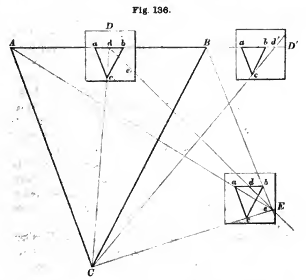
Anmerkung. Aufser der angegebenen Methode, die Lage des vierten Punktes D auf dem Mefstische zu bestimmen, sind noch verschiedene andere von Bessel, Bohnenberger, Netto, Leonhardi u. a. angegeben worden, in welcher Hinsicht zu vergleichen ist: Schumacher's astronom. Nachrichten, Bd. 3, S. 194, Ulrich's

Lehrbuch der prakt. Geometrie II. 236 u. f.; **Netto's** Handbuch der gesammten Vermefsungskunde I. und dessen Lehrbuch des Aufnehmens mit dem Mefstische, Berlin. 1822; **Leonhardi's** Rückwärtsabschneiden bei Menselaufnahmen, Bautzen, 1837; **Bauernfeind's** Elem. der Vermefsungskunde, 2. Aufl., S. 507. Die **Lehmann**'sche Methode mit dem s. g. **fehlerzeigenden Dreieck**, die in früherer Zeit eine grofse Rolle spielte, findet sich vollständig beschrieben in dessen Anleitung zum Gebrauche des Mefstisches, herausgegeben von G. A. **Fischer** (als 2. Theil von **Lehmann's** Lehre der Situationszeichnung, Dresden, 1816). Auch durch die Orientierboussole läfst sich der vierte Standpunkt finden, wenn der Abweichungswinkel einer der drei Linien DA, DB, DC früher bestimmt ist und nun zum Orientieren in D dienen kann, allein selbstverständlich gewährt diese Methode eine zu geringe Genauigkeit.

§. 322.

Wenn der zu bestimmende vierte Punkt in einer der Seiten des Dreiecks ABC oder deren Verlängerungen liegt, wie in D oder D' der Fig. 136, so orientiere man daselbst den Mefstisch nach

Fig. 136.



ab, so wird, da $\Delta abc \backsim \Delta ABC$ ist, $ac \#\!\!\!\!= AC$ und $bc \#\!\!\!\!= BC$ sein. Ist daher C von D oder D' sichtbar, so wird die rückwärts gezogene Richtlinie Cc den Punkt d angeben. Ist aber C nicht sichtbar, so lege man durch den vorläufig nach dem Augenmafse angenommenen Punkt d ein Alignement DE, von dessen einem Punkte E, C gesehen werden kann; bestimme in D die Richtlinie de', stelle sich dann in E auf, orientiere hier den Mefstisch nach de' und lege durch die rück-

wärts gezogenen Richtlinien Aa und Bb den Punkt e fest, der noch durch Cc geprüft werden kann. Dann wird der Punkt d sich wie im §. 319 bestimmen lafsen.

IV. Aufnahme einzelner Grundstücke und kleiner Fluren.

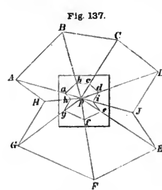
A. Wenn die Flur ganz oder doch gröfstentheils übersehbar und zugänglich ist.

§. 323.

Aufgabe. Nach der Polarmethode eine übersehbare und überall zugängliche Flur mittelst des Mefstisches oder der Boussole aufzunehmen.

1. In dem Umfange der Flur stecke man durch eingeschlagene Pfähle oder Baken ein Polygon $ABC\ldots\ldots$ (Fig. 137) ab, stelle sich mit dem Mefstische in einem der Polygonwinkelpunkte oder in einem Punkte P im Innern oder aufserhalb der Flur auf und bestimme in diesem Pole nach §. 239 sämmtliche Winkel APB, $BPC\ldots\ldots$, welche die Polarlinien mit einander einschliefsen, so wie die Länge der letzteren durch unmittelbares Mefsen mit der Mefskette, den Mefsstäben oder dem Distanzmefser und trage die verjüngten Mafse der Polarlinien auf, so ist das auf der Mefstischplatte entstandene Polygon $abc\ldots hi$ dem gegebenen Polygon ähnlich. Krummlinichte Begränzungen der Polygonseiten bestimmt man nach §. 299, wobei die Längen der Polygonseiten dann zugleich zur Probemefsung dienen. (Vgl. §. 332.)

Fig. 137.



Man bedient sich der Polarmethode auch mit Vortheil bei der Aufnahme des kleinen Details bei topographischen Aufnahmen, bestimmt dann die Länge der Polarlinien aber durch den Distanzmefser.

Ist ein Standpunkt wegen vorhandener Hindernisse zur Bestimmung der Polygonwinkelpunkte nicht ausreichend, so legt man nach einer der in III. angegebenen Methoden noch andere Pole fest, die dann zur Bestimmung der fehlenden Polygonwinkelpunkte dienen.

2. Mit der Boussole ist das Verfahren im Allgemeinen dasselbe, nur mifst man in den angenommenen Polen die Abweichungswinkel der Polarlinien, und bestimmt deren Endpunkte mittelst der gemefsenen Längen durch Zulegen. (§. 313, 2.)

§. 324.

Aufgabe. Nach der Basierungsmethode eine übersehbare Flur mittelst des Mefstisches oder der Boussole aufzunehmen.

1. Nachdem man wie im vorigen Paragraphen den Umfang der Flur durch ein abgestecktes Polygon bezeichnet hat, mifst man im Umfange, oder innerhalb, oder aufserhalb desselben mittelst der Mefskette oder Mefsstangen eine Standlinie, Basis PQ, trägt deren Länge pq auf die Mefstischplatte und bestimmt die Winkelpunkte des Polygons nach §. 314, 1. durch Vorwärtseinschneiden. Da aber hierbei einige der gezogenen Richtlinien sich unter zu schiefen Winkeln schneiden können, so mufs man schon deshalb, zugleich aber auch der Probe wegen, sobald die unmittelbare Mefsung der Polygonseiten unnöthig ist, sich nicht auf zwei Standpunkte beschränken, sondern etwa ein Dreieck PQR unmittelbar mefsen und aus dem dritten Winkelpunkte R desselben die schon vorhandenen Richtlinien nochmals schneiden. Nur bei sich zeigenden geringen Unterschieden, die sich als kleine Dreiecke zu erkennen geben, wird man einen mittleren Punkt als zu bestimmenden Winkelpunkt annehmen können; bei gröfseren Differenzen aber mufs durch eine vierte Richtlinie untersucht werden, welche der drei ersteren unrichtig ist. Diefs wird namentlich dann nothwendig, wenn die zu bestimmenden Punkte zu neuen Standpunkten dienen sollen, wie diefs bei gröfseren Fluren oder topographischen Aufnahmen der Fall sein wird.

Krummlinichte Begränzungen der Polygonseiten bestimmt man wieder nach §. 299, wobei die deshalb unmittelbar gemefsenen Polygonseiten dann zur Probe dienen. (Vgl. §. 332.)

2. Mit der Boussole ist das Verfahren im Allgemeinen das nämliche, nur mifst man in den angenommenen Standpunkten die Abweichungswinkel der von ihnen nach den Polygonwinkelpunkten gehenden Richtungen und bestimmt deren Endpunkte durch Zulegen. Indessen wendet man die Boussole weder bei dieser, noch bei der vorhergehenden Methode häufig an.

Durch die wiederholt angewandte Basierungsmethode kann man daher auch die Ufer eines Flufses, den Lauf einer Strafse u. dgl. bestimmen.

B. Wenn nur der Umfang der Flur zugänglich ist.

§. 325.

Aufgabe. Mittelst des Mefstisches oder der Boussole eine nur nach Aufsen zugängliche, im Innern aber einen oder mehrere fixe Punkte P, P^1 ..... enthaltende Flur $ABCD$ ...... aufzunehmen.

Aus drei festgelegten Standpunkten A, M, B einer in dem Umfange der Flur gemefsenen Basis AB bestimmt man nach §. 314, 1. zunächst die Lage der fixen Punkte P, P^1, P^2.... und zieht die Richtlinie bc. Orientiert man alsdann in C den Mefstisch nach cb, so bestimmt sich nach §. 317, 1. der Punkt c durch Hülfe von p, p^1 oder p^2 und man erhält also dadurch genugsam Proben. Im Falle aber nur ein fixer Punkt P vorhanden ist, bietet die Länge der unmittelbar gemefsenen Linie BC die Probe dar. Auf diese Weise bestimmt sich jeder folgende Winkelpunkt durch das eine oder andere Verfahren auf genügende Weise. Nur wird man denjenigen der fixen Punkte zum ersten Durchschnitte zu wählen haben, der mit der schon vorhandenen Richtlinie den genauesten Schnitt giebt. Wäre die Basis aufserhalb der Flur gemefsen, so würde man aufser p, p^1.... auch noch so viel Polygonpunkte a, b... bestimmen, als sich durch zweckmäfsige Schnitte festlegen lafsen.

2. Auch mit der Boussole läfst sich bei nicht zu ausgedehnten Fluren dasselbe Verfahren anwenden; nur ergiebt sich die Lage aller Punkte erst nach dem Zulegen.

Durch diese Methode des Mefsens läfst sich mittelst eines Thurmes oder sonst überall sichtlicher Objecte der Umfang einer Stadt oder eines andern Wohnorts, im gebirgigen Terrain mittelst der auf den Höhen errichteten Signale der Umfang eines Forstes und überhaupt einer Flur, die über ihre Fläche keine freie Aussicht gestattet, aufnehmen.

§. 326.

Sollte eine unzugängliche und nicht übersichtliche, nach Aufsen aber eine freie Aussicht gestattende Flur nach der Umfangsmethode aufgenommen werden, so würde man zur Bestimmung von Hülfspunkten P, P^1, P^2... (§. 295) wieder das im vorigen Paragraphen angegebene Verfahren anzuwenden haben, um p, p^1, p^2... bei dem Bestimmen der nächstfolgenden Polygonwinkelpunkte benutzen zu können. Indem man so jeden folgenden Winkelpunkt des Polygons durch unmittelbares Mefsen des Winkels und der ihn einschliefsenden Seiten festlegt, dienen die Hülfspunkte zur Probe und bewahren wenigstens vor groben Fehlern. In Hinsicht auf den weiteren Fortgang der Aufnahme befolgt man das im §. 294 angedeutete Verfahren und in Bezug auf das Orientieren des Mefstisches die im §. 311 ausgesprochene Regel.

Mit der Boussole kann man zwar auch dasselbe Verfahren anwenden; man wird indessen meistens auf die Hülfspunkte verzichten, und nur das Verfahren des folgenden Paragraphen zur Anwendung bringen.

§. 327.

Aufgabe. Mittelst des Mefstisches oder der Boussole durch die Umfangsmethode eine unzugängliche, nicht übersichtliche, auch nach Aufsen keine freie Aussicht gestattende Flur aufzunehmen.

Da in diesem Falle auch die im vorigen Paragraphen angenommenen Hülfspunkte nicht benutzt werden können, so bleibt nichts anders übrig, als die Vorsicht und Aufmerksamkeit beim unmittelbaren Mefsen der Polygonseiten und Winkel zu verdoppeln, um die sich einschleichenden Fehler auf ihr Minimum herabzubringen. Bei der Aufnahme von Forsten hat man gewöhnlich noch den Vortheil, durch einige durchgehauene Diagonalen das Polygon in kleinere Theile zerlegen zu können.

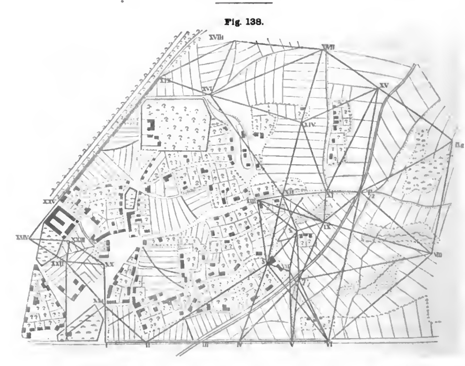
§. 328.

Schlufsbemerkung. Bei der Aufnahme einer aus mehreren Culturarten und Baulichkeiten zusammengesetzten Flur wird man nur selten auf die ausschliefsliche Anwendung der einen oder anderen der im Vorhergehenden angegebenen Methoden sich beschränken können, sondern meistens dieselben verbinden müfsen. Welche der Methoden nun hier oder dort am sichersten zum Ziele führt, kann nur durch die Beschaffenheit des Terrains bedingt und durch die nöthige Umsicht bestimmt werden, welche letztere lediglich nur durch vielfache Uebung erworben werden kann. Um indessen dem Anfänger Gelegenheit zur Beurtheilung, welche der Methoden sich am zweckmäfsigsten anwenden lafse, zu geben, mag hier das Verfahren des Aufnehmens an der in Fig. 138 dargestellten Flur in kurzen Umrissen erläutert werden.

Zunächst kommt es darauf an, theils im Umfange oder aufserhalb der Flur, theils im Innern derselben Hauptpunkte zu bestimmen, die beim weiteren Detailmefsen zum Anhalten dienen; sie sind in der Figur durch römische Ziffern bezeichnet. Nach der unmittelbaren Mefsung der Linie I. VI. mit den Zwischenpunkten II.—V. werden zuerst die an der unteren und rechtsliegenden Seite der Flur liegenden fixen Punkte bestimmt. Der hohe, von vielen Seiten aus sichtbare Schornstein S bestimmt sich nach §. 314 aus II. IV. VI.; der Telegraph T_1 aus IV. V. VI.; der Punkt VII. nach §§. 314 und 315 aus VI. V. und S; VIII. aus V. VI, und VII.; wobei S und T_1 als Probe dienen.

Auf dieselbe Weise legen sich auch die anderen Hauptpunkte theils nach den genannten Paragraphen, theils nach §§. 317 und 321 fest, wie z. B. XVIII. aus XVI. XIV. und XVII.; XV. aus XIV. XII. und T_2 sich bestimmen lafsen würden. Zur Festlegung der Hauptpunkte auf der linken Seite der Flur, wurde I. XX. unmittelbar gemefsen, dadurch

Fig. 138.



auch XXI. bestimmt, welcher zugleich aus II. nach §. 314 seine Bestimmung erhielt. Der Punkt XXV. konnte nur nach §. 313 festgelegt werden und als Probe zur Bestimmung von XIX. diente die auf der Chaussee unmittelbar gemefsene Linie XXV. XIX.

Zur Aufnahme des kleinen Details wird bei der Bestimmung der Begränzungen der unteren, rechtsliegenden und oberen Seite der Flur die Basierungsmethode angewandt; dieselbe Methode konnte bei der Aufnahme der Begränzungen der im Innern liegenden freien Plätze *A*, *B*, *C* . . . . . *I*, *K* angewandt werden, so wie auch bei der Aufnahme der rechts der Eisenbahn liegenden Wiesen-, Acker- und Angerstücke, *L*, *M* . . . . .; in einzelnen Fällen führte die Polarmethode eben so leicht zum Ziele, wie z. B. bei der Bestimmung der Gebäude an der linken Seite des Flurstücks *O* u. s. w. Bei der Aufnahme der einzelnen Gassen und der daran gränzenden Baulichkeiten läfst sich am zweckmäfsigsten die Boussole benutzen, da das häufige Aufstellen des Mefstisches bei der Methode des Umziehens zu bedeutende Fehler hervorbringt und die festgelegten Hauptpunkte nur selten sichtbar sind. Als Anhalt für die Boussolenmefsung dienen theils schon bestimmte

Hauptpunkte, theils Nebenpunkte 1, 2, 3.... die aus jenen nach §§. 313—315 festgelegt worden. Es versteht sich von selbst, dafs in solchen Punkten die Boussolenmefsung beginnt und wo möglich in Hauptpunkten endet. Zur Orientierung der Mefstischplatte wird der Abweichuugswinkel der Linie I. VI. bestimmt.

Viertes Capitel.

Der Gebrauch der Mefskette bei der Aufnahme einzelner Grundstücke und kleiner Fluren.

§. 329.

Bemerkung.

Obgleich die Mefskette ebenfalls die Möglichkeit darbietet, Aufgaben über die mittelbare Bestimmung der Linien auf dem Felde zur Lösung zu bringen, wie z. B. die Lage einer unzugänglichen Linie zu bestimmen, wenn entweder beide Endpunkte derselben zugänglich sind, oder nur der eine zugänglich ist, oder beide unzugänglich sind, wozu die Anwendung der Sätze der reinen Geometrie immer in den Stand setzt: so darf doch nicht übersehen werden, dafs theils die dazu erforderliche unmittelbare Mefsung von Linien oft gar nicht, oft nur sehr schwierig auszuführen ist, theils aber auch die Mefskette nicht den erforderlichen Grad von Genauigkeit gewährt. Der Praktiker wird daher in solchen Fällen sich immer entweder des Theodoliths oder des Mefstisches bedienen, worüber aber die beiden letzten Capitel die nöthige Anleitung gegeben haben.

A. Aufnahme übersichtlicher und zugänglicher Fluren, ohne Rücksicht auf ihre Parcellen.

§. 330.

Bei jeder Aufnahme einer aus mehreren Culturarten zusammengesetzten Flur mufs es das erste Geschäft des Geometers sein, von der Fläche sich ein deutliches Bild zu verschaffen, um über die Art der Aufnahme einen zweckmäfsigen Plan machen zu können. Man umgeht deshalb die Flur, bezeichnet die bemerkenswerthen Endpunkte und Zwischenpunkte verschiedener Culturarten mit Signalen und numerierten Pfählen, bestimmt die Entfernungen derselben von einander theils durch Abschreiten, theils durch Schätzung nach dem Augenmafse und entwirft nach einem ungefähren Mafsstabe ein Bild auf dem Papiere, welches der Faustrifs oder das Manual der Hauptlinien genannt wird,

weil es besonders nur zum Eintragen der Zahlenwerthe der gemefsenen Hauptlinien dienen soll.

Was nun die Art der Aufnahme betrifft, so mufs darüber besonders ihr Zweck, nächstdem aber auch die Gröfse der Flur und die Beschaffenheit des Terrains entscheiden. Bei ökonomischen Aufnahmen, namentlich wenn sie die Mefsung von Ländereien, Wiesenstücken, Gärten u. dgl. enthält, ist nicht nur eine Methode zu wählen, wodurch man am genauesten den Flächeninhalt bestimmen kann, sondern es sind auch bei der Aufnahme die Gränzen der Grundstücke mit der erforderlichen Sorgfalt zu bestimmen. Hinsichtlich der nöthigen Genauigkeit herrschen zwar meistens bestimmte Gesetze, allein leider sind diese häufig so vage, dafs der ausübende Geodät, wenn er nur das Reglement oder Gesetz befolgen will, einen grofsen Spielraum behält, in welchem er, ohne seine Pflicht zu verletzen, sich bewegen kann. Die Gränzen der Aecker, Wiesen und überhaupt werthvoller Grundstücke nur nach Zehntelruthen zu bestimmen, ist sicher eine verwerfliche Vermefsungsmethode zu nennen, wenn sie auch durch bestehende Gesetze erlaubt sein sollte, wenn man berücksichtigt, dafs durch Weglafsung von 5 Hundertstelruthen (5 Decimal-Zoll), als Ordinaten eines 50 Ruthen langen Ackerstücks, ein Flächenunterschied von 2,5 Quadratruthen erwächst. In gleichem Grade verwerflich ist bei ökonomischen Mefsungen die Anwendung einer Methode der Aufnahme, wodurch sich nur mittelst Auftragens der Flächeninhalt der gemefsenen Flur bestimmen läfst, während eine andere Methode zuläfsig war.

Auch die Beschaffenheit des Terrains sollte nicht nur die Methode der Aufnahme, sondern auch die Wahl der Mefswerkzeuge bedingen. Nur auf einem ebenen Terrain kann man bei der alleinigen Anwendung der Mefskette die zu genauen Flächeninhaltsbestimmungen erforderliche Genauigkeit der unmittelbaren Linienmefsung erwarten, während bei einem hügeligen oder coupierten Terrain die Anwendung eines Winkelmefsers die Aufnahme bedeutend erleichtert und oft sogar nothwendig macht.

Hier soll übrigens zunächst vorausgesetzt werden, dafs das aufzunehmende Terrain von der Beschaffenheit sei, um die Mefskette allein oder in Verbindung mit dem Winkelkreuz, dem Winkelspiegel u. s. w. anwenden zu können.

§. 331.

1. Kommt es, wie es bei den meisten s. g. ökonomischen Aufnahmen der Fall ist, auf eine möglichst genaue Flächeninhaltsbestimmung und Theilung an, so sollte man nur die im §. 296 beschriebene Dreiecksmethode anwenden, indem diese gestattet, den Inhalt der Flur unmittelbar aus den durch die Mefsung erhaltenen Datis zu bestimmen.

Bei Fluren, wo mehrere Vierecke und Dreiecke neben einander liegen, ist es wegen des späteren Auftragens vortheilhaft, einige gröfsere Vierecke abzustecken und aufzunehmen, zugleich aber die Durchschnittspunkte ihrer Seiten und Diagonalen mit denen der kleineren Vier- und Dreiecke zu bestimmen. Man sagt dann, die Seiten und Diagonalen der letzteren seien in die gröfseren Vierecke eingebunden und nennt die Durchschnitte Bindepunkte. Jede Seite eines solchen günstig gewählten grofsen Vierecks kann dann den sich weiterhin anschliefsenden Mefsungen als Grundlage dienen. Die Seiten der gröfseren Vierecke werden ausgebakt, indem man, in Entfernungen von etwa 50 Ruthen, Pfähle mit den daran bemerkten Entfernungen in den Boden schlägt. Auch die Bindepunkte werden mit numerierten Pfählen bezeichnet.

2. Alle gemefsenen Längen der Linien, so wie auch die Entfernungen der Bindepunkte vom Anfangspunkte der Linie werden in das Manual der Hauptlinien getragen, da nach diesem die Berechnung des Inhaltes der Vierecke und auch das Auftragen derselben vorgenommen wird.

3. Beim Mefsen der Dreiecksseiten oder der Diagonalen der Vierecke sind dann immer die Durchschnitte derselben mit durchlaufenden Hecken, Wegen, Gräben u. s. w. zu bestimmen. Sollten sich dabei diese Gegenstände noch nicht genügend festlegen, so bindet man von, zu diesem Zwecke bereits festgelegten Punkten, andere Linien ein und bestimmt dadurch die noch fehlenden Begränzungspunkte.

§. 332.

Die äufseren Gränzen der Flur werden meistens krummlinicht sein, daher sie durch rechtwinklichte Coordinaten zu bestimmen sind. Nimmt man nämlich in der Begränzungscurve Punkte an, so dafs die zwischenliegenden Bogen ohne merklichen Fehler als gerade angesehen werden können und fällt von den Punkten Normalen auf die Polygonseiten, so wird man die Lage der Punkte bestimmen können. Zur Mefsung der Ordinaten (Ueberschläge) bedient man sich des im §. 205 erwähnten Mefsstabes, den man von der Mefskette ab rechtwinklicht gegen den zu bestimmenden Punkt der Curve legt. Auch kann man die Richtung der Ordinaten durch eine ausgespannte Schnur bezeichnen. Die Ordinaten selbst werden bei genau bestimmten Gränzen bis auf Hundertstel-Ruthen genommen.

Bei Ordinaten, deren Längen einige Ruthen übersteigen, nimmt man in der Abscissenlinie zwei Punkte an, deren Entfernung man zur Grundlinie eines Dreiecks macht, und bezieht dann auf die beiden andern Dreiecksseiten, als Abscissenlinien, die entfernter liegenden Punkte der Curve.

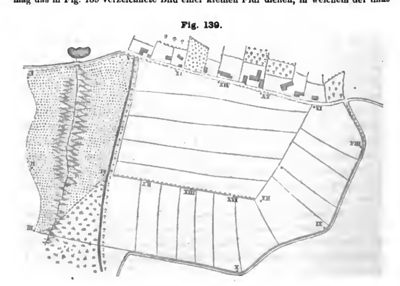
Da man die zwischen den Begränzungscurven und den Polygonseiten liegenden Stücke der Flur ebenfalls sogleich aus der Aufnahme ohne vorheriges Auftragen berechnen kann, so ist es zur Ersparung von Hülfsrechnungen zweckmäfsig, auf dem Felde auch die Durchschnittspunkte der Curven mit den Abscissenlinien zu bestimmen.

§. 333.

Das Aufschreiben der Coordinaten geschieht am zweckmäfsigsten in einem eigenen Manuale. Man verzeichnet nämlich jede der in dem Faustrisse vorhandenen Linien einzeln mit denselben Ziffern oder Buchstaben, wie sie in demselben dargestellt sind, zeichnet die krummlinichten Gränzen, Wege, Verzäunungen, Hecken, Bäche, Gräben u. dgl. neben denselben nach dem Augenmafse in ihrer Lage auf, notiert auf den geraden Linien die Länge der Abcissen und daneben die Länge der Ordinaten nach ihren genommenen Mafsen, nur ist hierbei stets dieselbe Ordnung zu beobachten; an jeden aufgezeichneten Gegenstand schreibt man endlich seinen Namen.

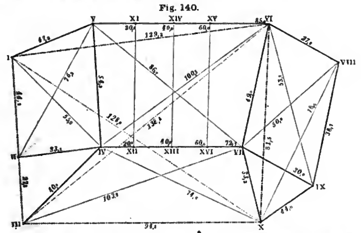
Anmerkung. In diesen Worten sind aber nur die allgemeinsten Regeln enthalten, die man beim Führen des Manuals zu befolgen hat. Erst durch vielfache Uebung und die gehörige Umsicht erwirbt man sich die zu einer zweckmäfsigen Manualführung erforderliche Fertigkeit und Deutlichkeit, so dafs es jedem Andern möglich ist, nach dem Manual die nöthigen Berechnungen und Constructionen vorzunehmen. Zur Erläuterung des im Vorhergehenden angegebenen Verfahrens beim Mefsen mag das in Fig. 139 verzeichnete Bild einer kleinen Flur dienen, in welchem der links

Fig. 139.



liegende Theil Wiesengrund, der andere Ackerstücke mit daran gränzenden Gebäuden, Höfen etc. bezeichnet. Fig. 140 stellt das Manual der Hauptlinien, Fig. 141 aber einen Theil des Manuals für die Coordinaten vor.

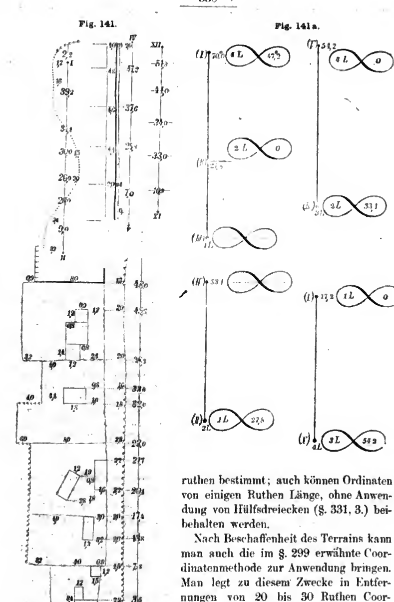
Fig. 140.



Man benennt auch wohl die einzelnen Linien, wie sie allmählich zur Mefsung gelangt sind, mit dem Namen der 1., 2., 3..... Linie und bezeichnet, unter Beibehaltung der Schreibweise von Unten nach Oben, den Anfangs- nnd Endpunkt mit der Ziffer des zugehörigen Nummernpfahls. Geht von einer solchen Linie eine andere seitwärts ab, so schreibt man in die eine Oeffnung der nebengesetzten Doppelklammer die Nummer der Linie nnd in die andere, je nachdem die seitliche Linie in die erstere Linie mündet oder von ihr ausläuft, beziehungsweise die Ruthenzahl der Länge oder 0. Ist die Nummer der schneidenden Linie noch nicht bestimmt, so wird nur der Schnittpunkt bemerkt, die Zahl selbst aber später eingetragen. Wäre z. B. in Bezug auf Fig. 140 III—I die erste Linie, II—IV die zweite, IV—V die dritte, V — 1 die vierte u. s. w., so würde das Manual durch Fig. 141a dargestellt. Ohne Benutzung des Manuals der Hauptlinien kann dasselbe aber leicht zu Irrthümern führen.

§. 334.

Bei Fluren, deren Culturart nicht den ökonomischen Werth besitzt, wie ihn Acker- und Wiesenstücke, Gärten u. dgl. haben, z. B. bei Grasangern, Weiden, Torfmooren u. s. w., kann man in einigen Stücken die Aufnahme vereinfachen. Will man die Dreiecksmethode, wie im §. 331, 1. anwenden, so kann man zu einer leichteren Berechnung des Inhaltes eine der Diagonalen der abgesteckten Vierecke als gemeinschaftliche Basis der darüber liegenden Dreiecke ansehen und mit dem Winkelkreuz die Höhen derselben bestimmen und dann mit der Mefskette mefsen. Nur sind dabei Dreiecke zu vermeiden, die bei einer sehr langen Basis nur eine geringe Höhe haben. Bei dem Mefsen der Umfangslinien des Polygons werden die Ordinaten nur bis auf Zehntel-



ruthen bestimmt; auch können Ordinaten von einigen Ruthen Länge, ohne Anwendung von Hülfsdreiecken (§. 331, 3.) beibehalten werden.

Nach Beschaffenheit des Terrains kann man auch die im §. 299 erwähnte Coordinatenmethode zur Anwendung bringen. Man legt zu diesem Zwecke in Entfernungen von 20 bis 30 Ruthen Coordinatenachsen, oder auch wohl nur Abscissenachsen durch die Flur und be-

stimmt mittelst des Winkelkreuzes u. s. w. und der Mefskette die zu den Polygoneckpunkten oder anderen Punkten in den Begränzungen gehörigen Ordinaten. Diese Methode, welche auch wohl die Perpendicularmethode genannt zu werden pflegt, hat vor der Triangularmethode den Vortheil, dafs sie die Berechnung des Flächeninhaltes erleichtert und auch die bei der Aufnahme unvermeidlichen Irrthümer auf andere Winkel- und Eckpunkte nicht weiter fortpflanzt, also insofern auch das Auftragen erleichtert. Nur wird man beim Festlegen der Achsen darauf zu sehen haben, dafs ihrer unmittelbaren Mefsung keine beträchtlichen Hindernisse entgegen treten.

Unter diesen Umständen kann man auch die schiefwinklichte Coordinatenmethode anwenden, die unter dem Namen der Parallelmethode bei der Detailaufnahme von Dänemark vielfach angewandt wurde. Indessen bietet diese gar keine besonderen Vortheile dar, weshalb sie im Allgemeinen auch wenig Berücksichtigung findet.

B. Aufnahme übersehbarer Fluren mit Rücksicht auf die darin liegenden Parcellen.

§. 335.

Der in den §§. 331 — 333 beschriebenen Dreiecksmethode sollte man sich immer dann bedienen, wenn es auf eine genaue Inhaltsbestimmung der ganzen Flur, nicht aber auf die der einzelnen Parcellen derselben ankommt, da jene Bestimmung schon aus den auf dem Felde gemefsenen Stücken, also unabhängig vom Auftragen des Gemefsenen möglich ist. Liegen aber viele und schmale Vielecke in der aufzunehmenden Flur neben einander, so würde die Bestimmung ihrer Gröfse auf demselben Wege in den meisten Fällen zu zeitraubend sein. Die Aufnahme sowohl, als auch die Berechnung wird dann erleichtert, wenn man die Parcellen nicht aus Dreiecken zusammensetzt, sondern nur die Umfänge derselben durch querüber zu mefsende, in die abgesteckten Hauptlinien einzubindende Linien bestimmt. (Man vergleiche das Viereck IV. V. VI. VII. der Figg. 139 und 140 und Fig. 141.) Die Zahl und Richtung dieser Querlinien richtet sich lediglich nach der Krümmung der Begränzungen der einzelnen Stücke. Sie müfsen so nahe und in der Richtung neben einander liegen, dafs das Stück der Begränzung zwischen je zwei auf einander folgenden ohne merklichen Fehler als gerade angesehen werden kann.

Damit aber diese Querlinien die erforderliche zweckmäfsige Lage erhalten, ist es vor allen Dingen nöthig, dafs schon bei der Recognoscierung der Flur die Lage der Parcellen in den Faustrifs möglichst genau gezeichnet, darnach die Querlinien in dem Faustrifse bestimmt

22*

und beim Abstecken und Meſsen der Hauptlinien die Punkte auf dem Felde bemerklich gemacht werden, welche durch Querlinien verbunden werden sollen, weshalb auch die Entfernungen der Punkte vom Anfangspunkte der Hauptlinien zu bestimmen sind. Beim Meſsen jeder einzelnen Querlinie werden die Ordinaten und Durchschnitte in das zugehörige Manual getragen (§. 333).

Was die Bestimmung der äuſseren Gränzen der Flur anbetrifft, so gelten dafür die in *A* gegebenen Vorschriften.

C. Aufnahme nicht übersichtlicher Fluren.

§. 336.

Aufgabe. Mittelst der Meſskette die Gröſse eines auf dem Felde abgesteckten Winkels zu bestimmen.

Fig. 142.

1. Man meſse auf den Schenkeln des gegebenen Winkels ABC (Fig. 142) gleiche Stücke BD und BE ab, sowie den Abstand DE, so ist

$$\sin {}^1/_2\, B = \frac{{}^1/_2\, DE}{BD} = \frac{DE}{2\,BD},$$

woraus sich ${}^1/_2\, B$ und daher auch B findet.

2. Oder man meſse von den Schenkeln beliebige Stücke BA und BC; sowie den Abstand AC ihrer Endpunkte, so ist

$$\sin {}^1/_2\, B = \sqrt{\left(\frac{({}^1/_2\, s - a)\,({}^1/_2\, s - c)}{ac}\right)},$$

worin s die Summe der 3 Seiten a, b und c bezeichnet.

3. Denkt man sich in dem Dreieck ABC von A auf die Gegenseite oder ihre Verlängerung eine Normale AF gefällt und setzt man die Abschnitte CF und BF bezüglich $= x$ und y, so ist

$$x - y = \frac{(b + c)\,(b - c)}{x + y} = d;$$

da nun $x + y = s$ bekannt ist, so erhält man

$$x = \frac{1}{2}\,(s + d) \text{ und } y = \frac{1}{2}\,(s - d),$$

und hieraus
$$\cos B = \frac{y}{c},$$

eine Formel, die durch ihr Vorzeichen sogleich angiebt, ob der Winkel B spitz oder stumpf ist.

§. 337.

Läſst sich vorhandener Hindernifse wegen die Gegenseite des zu bestimmenden Winkels nicht meſsen, so bestimmt man seinen Scheitel- oder Nebenwinkel. Auch für stumpfe und convexe Winkel nimmt man den spitzen Nebenwinkel oder den Implementwinkel.

Liegen die Winkelschenkel nicht in einer Horizontalebene, so ist der Winkel noch auf den Horizont zu reducieren, wozu die Neigungswinkel der Schenkel gegen den Horizont gemeſsen werden müſsen. Da aber die Reduction die Kenntniſs der sphärischen Trigonometrie voraussetzt, so kann man diese Bestimmungen vermeiden, wenn man den Winkelschenkeln eine horizontale Lage giebt.

§. 338.

Bei der Aufnahme nicht übersichtlicher Fluren kann man sich nur der Umfangsmethode bedienen, aber noch darin einen Unterschied eintreten laſsen, je nachdem der Raum nach Auſsen frei ist oder nicht. In dem ersten Falle kann man um die aufzunehmende Flur eine Kette von Vierecken legen, in denen man sämmtliche Seiten und Diagonalen miſst. Die Gränzen der Flur legen sich bei der Meſsung derjenigen Viereckseiten durch Ordinatenmeſsung fest, welche der Flur entlang liegen.

Auf diese Weise ist demnach ein nach Auſsen freier Forst, der Umfang eines Dorfes, Fleckens u. s. w. in den Grund zu legen. Eben so läſst sich auch der Lauf eines Flusses, Stromes, einer Straſse oder Eisenbahn etc. festlegen.

Zur Aufnahme einzelner Gebäude, Gärten u. s. w. bei einem Dorfe z. B. werden in die Umfangslinien andere Linien einzubinden und meistens die daselbst gebildeten Winkel zu bestimmen sein, wenn sich die Aufnahme derselben nicht schon durch Construction rechter Winkel mittelst des Winkelkreuzes u. s. w. erreichen läſst.

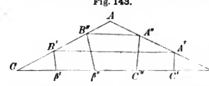
Ist aber die Aussicht nach Auſsen nicht frei, wie dieſs meistens auch bei den Gassen in den Dörfern und Flecken der Fall sein wird, so muſs man die Polygonwinkel mit der Meſskette bestimmen und auſserdem die Längen der Polygonseiten unmittelbar meſsen. Daſs man aber bei dieser Aufnahmemethode nur unter den günstigsten Umständen und bei einer sich nicht weit ausdehnenden Flur ein annähernd richtiges Resultat erwarten dürfe, unter anderen Verhältnissen aber lieber noch ein winkelmeſsendes Werkzeug mit zuziehen wird, bedarf wohl kaum einer Erwähnung.

§. 339.

Von allen Methoden, die Gröſse eines Winkels auf dem Felde zu bestimmen, ist deshalb in den meisten Fällen die mittelst der Meſskette die unvollkommenste, da die genaue Bestimmung lediglich von der richtigen Meſsung der drei Seiten des Dreiecks ABC oder BDE (Fig. 142) abhängt, diese aber wegen etwa nahe liegender Gebäude, Zäune, Hecken oder sonstiger Hindernisse nicht immer mit der erforderlichen Sorgfalt auszuführen steht.

Wie schwankend die Winkelbestimmung schon wird, wenn das Terrain nicht vollkommen eben ist, jedoch nur unbedeutende Unebenheiten enthält, zeigt das folgende Beispiel, in welchem jeder der Winkel des Dreiecks ABC (Fig. 143) auf drei verschiedene Arten bestimmt worden ist.

Fig. 143.



In dem Dreiecke ABC findet man nach §. 336 für $a = 25{,}00^0$, $b = 13{,}24^0$, $c = 14{,}6^0$, $A = 127^0\ 43'\ 22''$, $B = 24^0\ 45'\ 55''$, $C = 27^0\ 30'\ 43''$. Aus den Dreiecken $AB''A''$ und $AB'A'$ erhält man für $a = 6{,}88^0$, $b = 3{,}0^0$, $c = 4{,}6^0$, und für $a = 15{,}84^0$, $b = 5{,}0^0$, $c = 9{,}6^0$: $A = 128^0\ 5'\ 7''$ und $= 128^0\ 18'\ 41''$, so dafs demnach die gröfste Differenz $= 35'\ 19''$ und die kleinste $= 13'\ 34''$ ist.

Auf dieselbe Weise erhält man aus den Dreiecken $BA'C'$ und $BA''C''$ für $a = c = 5{,}00^0$, $b = 2{,}16^0$ und für $a = b = 10{,}0^0$, $c = 4{,}34^0$: $B = 24^0\ 56'\ 54''$ und $= 25^0\ 3'\ 57''$. Es ist daher die gröfste Differenz $= 18'\ 2''$ und die kleinste $= 7'\ 3''$.

Endlich erhält man aus den Dreiecken $CB'\beta'$ und $CB''\beta''$ für $a = 5{,}0^0$, $b = 5{,}24^0$, $c = 2{,}48^0$ und für $a = 10{,}0^0$, $b = 10{,}24^0$, $c = 4{,}84^0$: $C = 27^0\ 30'\ 43''$ und $27^0\ 38'\ 16''$, so dafs daher die gröfste Differenz $= 7'\ 33''$, die kleinste $= 0$ ist. Hätte man aber in dem erst genannten Dreiecke für $c = 2{,}47^0$ Statt $c = 2{,}48^0$ gesetzt, so würde sich $C = 27^0\ 21'\ 33''$, mithin nun als gröfste Differenz $16'\ 43''$ und als kleinste $9'\ 10''$ ergeben haben.

Vierter Abschnitt.

Die Horizontalaufnahme solcher gröfserer Erdstrecken, wobei die Erdoberfläche noch als eben betrachtet werden darf.

§. 340.

Wenn die aufzunehmende Flur eine Gröfse von mehreren Hundert Morgen bis zu einigen Quadratmeilen enthält, so dafs darin eine Menge von Polygonen verschiedener Culturart, Ländereien, Wiesen, Weiden, Wälder, Dörfer u. s. w. sich finden, so kann die Aufnahme derselben nicht in der Art Statt finden, dafs man die specielle Aufnahme des einen Polygons an die der andern reiht, weil dadurch die bei jeder einzelnen Polygonaufnahme gemachten Fehler sich fortpflanzen und da-

durch eine Verschiebung der ganzen Flur veranlafsen würden. Man legt deshalb in diesem Falle über die aufzunehmende Erdstrecke eine Reihe aneinander hängender Dreiecke, ein **Dreiecksnetz**, dessen Winkelpunkte feste, durch das Netz selbst genau gefundene Punkte sind und an welches sich dann die Aufnahme des Details anschliefsen mufs.

Erstes Capitel.

Die Aufnahme und Berechnung des Dreiecksnetzes.

§. 341.

Das erste Geschäft, dem sich der Geodät bei der Aufnahme einer gröfseren Flur zu unterwerfen hat, wird wieder in der **Recognoscierung** derselben, d. h. darin bestehen, dafs er sich mit der Beschaffenheit des aufzunehmenden Terrains möglichst genau bekannt macht und sich namentlich die Winkelpunkte des Dreiecksnetzes, die Namen und Gestalten der wichtigsten fixen Objecte, die Lage der Berge oder Hügel, der bewohnten Oerter oder einzeln liegender Häuser u. s. w. bemerkt und sich von der ganzen Flur einen rohen Entwurf, ein **Brouillon**, verschafft.

Bei der Festlegung der Dreieckspunkte ist darauf zu sehen:

1) Dafs man von ihnen aus wenigstens nach den zunächst liegenden eine freie Aussicht hat.

2) Dafs sie wo möglich Gränzpunkte an einander hängender kleinerer Fluren oder andere merkwürdige Punkte sind, deren Lage in der zu entwerfenden Karte doch angegeben werden mufs.

3) Dafs sich in ihnen der Winkelmefser bequem aufstellen läfst, oder, falls diefs nicht möglich ist, die zum Centrieren nöthigen Data bestimmt werden können. (§. 236.)

4) Dafs wo möglich 2 Paare von Punkten in den entgegengesetzten Gegenden der Flur so gewählt werden, dafs die zwischen ihnen liegende Linie mittelst der Mefsstangen mit der erforderlichen Schärfe bestimmt werden kann. Wenigstens ist aber die Wahl **eines** Paares solcher Punkte erforderlich.

§. 342.

Die Zahl der zu bestimmenden Dreieckspunkte richtet sich lediglich nach der Beschaffenheit des Terrains.

Eine je geringere freie Aussicht das Terrain gestattet und je unebener und coupierter dasselbe ist, desto gröfser mufs die Zahl der Dreieckspunkte sein. Hinsichtlich der Wahl des Mefswerkzeugs ist zu bemerken, dafs man dazu nur ein Universalinstrument oder einen gröfseren Theodolith anwendet, während selbst von einem gut construierten Mefstische keine Rede sein kann. Von den Reflexionswerkeugen,

wenn etwa der Scheitelpunkt des zu meſsenden Winkels das Aufstellen eines Stativs nicht gestattet, kann nur der Spiegel-Prismenkreis von Pistor und Martins oder der Steinheil'sche Prismenkreis benutzt werden.

Sind die Dreieckspunkte festgelegt, so werden sie, wenn sie nicht schon natürliche Signale enthalten, mit gröſseren Signalen versehen und entweder mit fortlaufenden Nummern, oder mit den entsprechenden Namen bezeichnet.

§. 343.

Die Basis oder Grundlinie des Netzes ist so zu wählen, daſs das Terrain zwischen ihren Endpunkten eben und wo möglich horizontal ist. Sie wird mit Meſsstangen mehrere Male gemeſsen, wobei die Resultate nur höchstens um $^1/_{5000}$—$^1/_{6000}$ ihrer Länge von einander verschieden sein dürfen, wenn von ihnen das arithmetische Mittel genommen werden soll.

Bei einem sehr coupierten Terrain bestimmt man die eigentliche gröſsere Basis aus einer kleineren, auf einem passenden Terrain gemeſsenen, durch ein Netz von Dreiecken auf trigonometrischem Wege nach §. 305.

§. 344.

Aufgabe. Mittelst eines Azimuthalinstruments die Richtung des Meridians*) durch einen gegebenen Punkt auf der Erdoberfläche zu bestimmen.

Die Bestimmung beruht auf dem sphärisch-astronomischen Satze, daſs auf beiden Seiten des Meridians zu gleichen Stundenwinkeln**) eines Gestirns auch gleiche Höhen gehören.

Beobachtet man demnach mit dem Fernrohre eines Azimuthalinstrumentes irgend einen Fixstern in einer und derselben Höhe vor und nach seiner Culmination***) und liest bei beiden Einstellungen zugleich den Stand des Azimuthalkreises ab, so ist das arithmetische Mittel beider Ablesungen der Punkt des Azimuthalkreises, welcher dem Nullpunkte des Azimuths †) entspricht und wird daher der Mittel-

*) Der Meridian eines Beobachtungsortes ist derjenige Verticalkreis der Himmelskugel desselben, der zugleich durch die Weltachse geht. Der Durchschnitt desselben mit der Erde ist der Erdmeridian des Ortes.

**) Der Stundenwinkel eines Gestirns ist derjenige sphärische Winkel, welchen der durch das Gestirn und die Weltachse gelegte Stunden- oder Declinationskreis mit dem Meridiane nach Westen zu einschlieſst und dessen Maſs daher im Aequator liegt.

***) Der Durchgang eines Gestirns durch den Meridian wird seine Culmination genannt.

†) Das Azimuth eines Gestirns ist der sphärische Winkel, welchen der durch dasselbe gelegte Verticalkreis mit dem Meridian, als dem Anfangs-Verticalkreise bildet und auf dem Horizonte, meistens vom Südpunkte aus nach Westen, durch Norden und Osten hin gemeſsen wird.

faden des darauf eingestellten Fernrohrs die Richtung des Meridians angeben, den man alsdann durch eine aufgestellte Marke bezeichnen kann. Diese Bestimmung ist indessen nur bei der Beobachtung der Gestirne richtig, deren Declination*) sich während beider Beobachtungen nicht ändert; bei der Beobachtung der Sonne dagegen, wobei man den oberen oder unteren Rand derselben mit dem Horizontalfaden des Fadennetzes zur Berührung bringt, bedarf die gefundene Richtung noch einer kleinen Correction, worüber zu vergleichen ist: H. g. I. §. 240. Will man letztere vermeiden, so ist zur Beobachtung die Zeit des Sommer- oder Wintersolstitiums zu wählen.

Selbstverständlich sind entweder an mehreren auf einander folgenden Tagen oder an mehreren Gestirnen solche Beobachtungen anzustellen und ist aus allen das Mittel zu nehmen. In praktischer Beziehung ist aber noch zu bemerken, dafs jede in dem Meridiane oder aufserhalb desselben anzustellende Beobachtung eines Gestirns immer die vorläufige Einstellung des Fernrohrs auf die Höhe fordert, welche das Gestirn im Augenblicke der Beobachtung hat. Dazu ist aber wieder die Lage des Zenith- oder Horizontpunktes (§. 247) in Bezug auf den einen Vernier oder das eine Schraubenmikrofkop des Verticalkreises erforderlich, an welchem die Einstellung geschehen soll. Aufserdem mufs auch noch die Culminationszeit des Gestirns berechnet werden.

Hierüber findet der Leser die nöthige Anleitung in H. g. I. S. 216.

§. 345.

In dem einen Endpunkte der Basis oder einem andern, gewöhnlich fixen Punkte der Flur bestimmt man nach dem vorigen Paragraphen den Meridian, mifst das Azimuth desselben und bestimmt aufserdem auch in allen anderen Dreieckspunkten die Richtungen, welche die nach den sichtbaren Richtpunkten gehenden Linien rund im Horizonte herum einschliefsen, welches nach den im §. 225 gegebenen Regeln geschieht.

Ist man genöthigt, aufserhalb des Scheitelpunktes des zu mefsenden Winkels sich aufzustellen, so mifst man gleich anfangs die zum Centrieren erforderlichen Data (§. 236). Sollte man gezwungen sein, mit einem Spiegelwerkzeuge in einem Standpunkte die schiefliegenden Winkel zu mefsen, so müfsen aufserdem zur Reduction derselben auf den Horizont des Standortes (§. 258) die dazu erforderlichen Verticalwinkel bestimmt werden (§§. 256 und 257). Zur etwaigen Bestimmung der Höhenunterschiede der einzelnen Dreieckspunkte endlich mifst man auch noch die Zenithdistanzen für jede einzelne Seite. (§. 245 u. f.)

*) Die Declination eines Gestirns ist der sphärische Abstand desselben im zugehörigen Stundenkreise vom Aequator ab, in nördlicher oder südlicher Richtung.

Da aber die ausgeführten Beobachtungen noch mit den zufälligen Fehlern behaftet sind, es aber darauf ankommt, für sie die wahrscheinlichsten Werthe zu erhalten: so bedürfen noch alle der Ausgleichung, und zwar der Ausgleichung sowohl vermittelnder, als bedingter Beobachtungen, wozu das folgende Capitel die erforderlichen Sätze enthält.

Zweites Capitel.

Die Ausgleichung vermittelnder und bedingter Beobachtungen.

I. Die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen*).

§. 346.

Aufgabe. Die wahrscheinlichsten Werthe m gleichartiger von einander unabhängiger Beobachtungsgröfsen zu bestimmen, wenn für jede derselben eine die Zahl m übersteigende Anzahl gleich genauer Beobachtungen gegeben ist.

Sind a, b, c.... die von einander unabhängigen Beobachtungsgröfsen; A, B, C..... deren wahrscheinlichste Werthe, ist also

$$F\,(A,\ B,\ C\ldots:\ a,\ b,\ c\ldots)$$

gegeben, so werden A, B, C..... bestimmt sein, sobald man m durch Beobachtungen gefundene Werthe von F kennt, welche beliebigen Werthen von a, b, c... entsprechen. Wären die m von einander unabhängigen Werthe von F, nämlich F_1, F_2, F_3.. welche respective den Werthen a_1, b_1, c_1...; a_2, b_2, c_2...; a_3, b_3, c_3... der unabhängig Veränderlichen a, b, c... zugehören, bekannt, so würde man aus m zu bildenden Gleichungen

$$F_1 = F(A,\ B,\ C\ldots\ a_1,\ b_1,\ c_1\ldots)$$
$$F_2 = F(A,\ B,\ C\ldots\ a_2,\ b_2,\ c_2\ldots)$$
$$F_3 = F(A,\ B,\ C\ldots\ a_3,\ b_3,\ c_3\ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

die m Unbekannten berechnen können.

Da aber überschüssige Beobachtungen vorliegen, so werden diejenigen Werthe von A, B, C... die wahrscheinlichsten sein, welche (xx) (§. 265) zu einem Minimum machen.

Da die Ausgleichungen vermittelnder Beobachtungen in der praktischen Geometrie immer auf Winkel- und Linien-Mefsungen anzuwenden sind, und für die Winkelmefsung eine bestimmte Richtung, für die Linienmefsung aber ein bestimmter Punkt gedacht werden kann, von welchem ab beziehungsweise die anderen Richtungen oder Linien ge-

*) Auch hier sollen, der Einfachheit wegen, nur Beobachtungen von gleicher Genauigkeit vorausgesetzt werden.

zählt werden, so wird die erste der Beobachtungen entweder $= 0$ zu setzen, oder doch darauf zurückzuführen sein, indem man von allen Werthen a, b, $c \ldots$ den Werth der ersten subtrahiert.

Es seien nun in der ersten Beobachtungsreihe

die beobachteten Werthe von der Zahl n: $\begin{cases} 0 \; a \; b \; c \ldots, \; m \text{ deren Zahl} \\ 0 \; a_1 \; b_1 \; c_1 \ldots, \\ 0 \; a_2 \; b_2 \; c_2 \ldots, \end{cases}$

. . . .

die wahrscheinlichsten Werthe $0 \; A \; B \; C \ldots,$

der hierbei Statt findende Beobachtungsfehler x,

also $\quad 0 = x, \; a - A = x, \; b - B = x,$ u. s. w.

so erhält man die Gleichungen

$$0 = x; \; 0 = x + A - a; \; 0 = x + B - b; \; 0 = x + C - c$$
$$0 = x; \; 0 = x + A - a_1; \; 0 = x + B - b_1; \; 0 = x + C - c_1$$

u. s. w.

also

$$nx = 0; \; nx + nA = (a + a_1 + \ldots); \; nx + nB = (b + b_1 + \ldots);$$
$$nx + nC = (c + c_1 + \ldots). \qquad \text{N. 9.}$$

In einer zweiten Beobachtungsreihe seien

die beobachteten Werthe von der Zahl n_1: $\begin{cases} 0 \; \alpha \; \beta \ldots \; m_1 \text{ deren Zahl} \\ 0 \; \alpha_1 \; \beta_1 \ldots \\ 0 \; \alpha_2 \; \beta_2 \ldots \end{cases}$

. . . .

und der Beobachtungsfehler zwischen ihnen und den wahrscheinlichsten Werthen $A \; B \ldots = x_1$, so erhält man für diese Reihe, wie vorhin

$$n_1 x_1 = 0; \; n_1 x_1 + n_1 A = (\alpha + \alpha_1 + \ldots); \; n_1 x_1 + n_1 B$$
$$= (\beta + \beta_1 + \ldots) \qquad \text{N. 10.}$$

und würde ähnliche Gleichungen auch für eine dritte Beobachtungsreihe erhalten.

Wird nun die Summe der Quadrate der obigen einzelnen Gleichungen durch 2Σ bezeichnet, so ist

$$2\Sigma = x^2 + (x + A - a)^2 + (x + B - b)^2 + (x + C - c)^2 + \ldots$$
$$+ x^2 + (x + A - a_1)^2 + (x + B - b_1)^2 + (x + C - c_1)^2 + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots$$
$$+ x_1^2 + (x_1 + A - \alpha)^2 + (x_1 + B - \beta)^2 + \ldots$$
$$+ x_1^2 + (x_1 + A - \alpha_1)^2 + (x_1 + B - \beta_1)^2 + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Differenziiert man diese Gleichungen zuerst nach x und x_1, darauf nach A, B, C, bestimmt die erste Abgeleitete und setzt diese $= 0$, so erhält man

$$\frac{d\Sigma}{dx} = 0 = mnx + n(A + B + C) - (a + a_1 + \ldots b + b_1 + \ldots$$
$$+ c + c_1 + \ldots) \qquad \text{N. 11.}$$

$$\frac{d\Sigma}{dx_1} = 0 = m_1 n_1 x_1 + n_1 (A+B) - (\alpha + \alpha_1 + \ldots + \beta + \beta_1 + \ldots) \quad \text{N. 12.}$$

$$\frac{d\Sigma}{dA} = 0 = nA - (a + a_1 + \ldots) + nx + n_1 A - (\alpha + \alpha_1 + \ldots) + n_1 x_1. \quad \text{N. 13.}$$

$$\frac{d\Sigma}{dB} = 0 = nB - (b + b_1 + \ldots) + nx + n_1 B - (\beta + \beta_1 + \ldots) + n_1 x_1. \quad \text{N. 14.}$$

$$\frac{d\Sigma}{dC} = 0 = nC - (c + c_1 + \ldots) + nx. \quad \text{N. 15.}$$

Da die letzteren 3 Gleichungen aufser den Unbekannten A, B, C auch noch x und x_1 enthalten, so müfsen diese weggeschafft werden. Man erhält aus N. 11 und N. 12

$$nx = \frac{a + a_1 + \ldots b + b_1 + \ldots c + c_1 + \ldots}{m} - \frac{n}{m}(A + B + C). \quad \text{N. 16.}$$

$$n_1 x_1 = \frac{\alpha + \alpha_1 + \ldots + \beta + \beta_1 + \ldots}{m_1} - \frac{n_1}{m_1}(A + B). \quad \text{N. 17.}$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in N. 13:

$$0 = nA - (a + a_1 + \ldots) + \frac{1}{m}(a + a_1 + \ldots + b + b_1 + \ldots + c + c_1 + \ldots)$$
$$- \frac{n}{m} A - \frac{n}{m} B - \frac{n}{m} C + n_1 A - (\alpha + \alpha_1 + \ldots)$$
$$+ \frac{1}{m_1}(\alpha + \alpha_1 + \ldots + \beta + \beta_1 + \ldots) - \frac{n_1}{m_1} A - \frac{n_1}{m_1} B. \quad \text{N. 18.}$$

Bringt man nun in dieser Gleichung die Gröfsen a, $a_1 \ldots \alpha$, $\alpha_1 \ldots$ auf die eine Seite, bezeichnet ihre Summe durch (an), die Summe der Coefficienten von A, B und C beziehungsweise durch (aa), (ab) und (ac); substituiert ferner die Wertho von nx und $n_1 x_1$ aus N. 11 und N. 12 wieder in N. 14 und N. 15 und bezeichnet dann in den dadurch entstehenden Gleichungen die Summen von b, $b_1 \ldots \beta$, $\beta_1 \ldots c$, $c_1 \ldots$ und die der Coefficienten von A, B, C auf analoge Weise wie vorhin, so erhält man, ohne Rücksicht auf Vorzeichen:

$$\left.\begin{aligned} (an) &= (aa)\,A + (ab)\,B + (ac)\,C \ldots \\ (bn) &= (ab)\,A + (bb)\,B + (bc)\,C + \ldots \\ (cn) &= (ac)\,A + (bc)\,B + (cc)\,C + \ldots \end{aligned}\right\} \quad \text{N. 19.}$$

u. s. w.

also eben so viele Gleichungen, als Unbekannte, deren Auflösung daher die wahrscheinlichsten Werthe für A, B, C giebt.

§. 347.

Diese Gleichungen, so wie alle nach der Methode der kleinsten Quadrate gebildeten, haben die Eigenthümlichkeit, dafs sämmtliche Coefficienten von A, B, $C \ldots$, mit Ausnahme der quadratischen aa, bb, cc, doppelt und zwar so vorkommen, dafs die in den horizontalen Reihen den quadratischen folgenden, sich unter denselben in den ver-

ticalen Reihen wiederholen, wodurch man bei Zahlenrechnungen eine Probe oder eine Erleichterung erhält.

§. 348.

Aufgabe. Die Normalgleichungen N. 19 für die Unbekannten A, B, C aufzulösen.

Nach der Vorschrift von Gaufs multipliciert man die erste der Gleichungen successiv mit $\frac{ab}{aa}$ und $\frac{ac}{aa}$ und subtrahiert die daraus entstehenden Producte beziehungsweise von der zweiten und dritten; man erhält dann

$$bn - an\frac{ab}{aa} = \left(bb - ab\frac{ab}{aa}\right)B + \left(bc - ac\frac{ab}{aa}\right)C$$

$$cn - an\frac{ac}{aa} = \left(bc - ab\frac{ac}{aa}\right)B + \left(cc - ac\frac{ac}{aa}\right)C$$

oder nach der von Gaufs eingeführten Schreibart

$$\left.\begin{aligned} bn.1 &= bb.1\,B + bc.1\,C \\ cn.1 &= bc.1\,B + cc.1\,C \end{aligned}\right\} \qquad \text{N. 20.}$$

Multipliciert man nun wieder die erste dieser Gleichungen mit $\frac{bc.1}{bb.1}$ und subtrahiert das entstehende Product von der zweiten, so erhält man

$$cn.1 - bn.1\,\frac{bc.1}{bb.1} = cc.1 - bc.1\,\frac{bc.1}{bb.1}\,C,$$

oder nach der Gaufs'schen Schreibweise

$$cn.2 = cc.2\,C, \qquad \text{N. 21.}$$

woraus dann

$$C = \frac{cn.2}{cc.2} \qquad \text{N. 22.}$$

folgt.

Dann findet man aus N. 20:

$$B = \frac{bn.1}{bb.1} - \frac{bc.1}{bb.1} \quad \text{oder} = \frac{cn.1}{bc.1} - \frac{cc.1}{bc.1}. \qquad \text{N. 23.}$$

und aus N. 19:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{an}{aa} - \frac{ab}{aa}B - \frac{ac}{aa}C \\ \text{oder} \quad &= \frac{bn}{ab} - \frac{bb}{ab}B - \frac{bc}{ab}C \\ \text{oder} \quad &= \frac{cn}{ac} - \frac{bc}{ac}B - \frac{cc}{ac}C \end{aligned}\right\} \qquad \text{N. 24.}$$

§. 349.

Aufgabe. Den mittleren Fehler m gleich genauer vermittelnder Beobachtungen annäherungsweise zu bestimmen, wenn die Zahl der Beobachtungen $= n$ und die Zahl der Unbekannten $= \nu$ gegeben ist.

Man bestimme aus den gefundenen Werthen A, B, C und den gegebenen Beobachtungen a, a_1, a_2 .... die Fehler x und daraus (xx). Wäre nun eine Unbekannte zu bestimmen, so würde nach §. 268

$$n \,.\, mm = (xx) + mm$$

also für ν Unbekannte $n \, . \, m\,m = (r\,r) + \nu \, . \, m\,m$ sein, woraus dann

$$m = \pm \sqrt{\frac{(r\,r)}{n - \nu}} \qquad \text{N. 25.}$$

folgt.

Anmerkung. Der wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen vermittelnden Beobachtung ist dann nach §. 271 $w = 0{,}674489 \, . \, m$.

§. 350.

Rechnungsbeispiele.

1. Ausgleichung der Richtungen, die von einem Punkte aus nach den vier Objecten 1, 2, 3, 4 mit einem Theodolith gruppenweise genommen sind, wobei aber die Einstellung nach allen vier Objecten nicht immer möglich war. Dabei wurde von allen abgelesenen Richtungen die nach dem Object 1 abgezogen. Die Beobachtungen bilden 3 Gruppen, in welchen einzeln dieselben Objecte einvisiert werden konnten.

In den Gruppen ist daher $1 = 0$

$$2 = 43^0\,30'\,30'' + A$$
$$3 = 247^0\,14'\,10'' + B$$
$$4 = 306^0\,24'\,10'' + C$$

Beobachtungen	Richt-Object 1.	2.	3.	4.	Bildung der Gleichungen N. 9, N. 10 ....
1	0⁰ 0′ 0″	43⁰ 30′ 36,″25	247⁰ 14′ 11,″00	306⁰ 24′ 18,″38	
2	0	37, 50	14, 51	18, 12	$9\,x = 0$
3	0	36, 00	12, 47	18, 00	$9\,x + 9\,A = 42{,}77$
4	0	34, 77	13, 77	16, 52	$9\,x + 9\,B = 25{,}50$
5	0	33, 75	11, 75	19, 74	$9\,x + 9\,C = 75{,}00$
6	0	30, 25	13, 00	16, 49	
7	0	34, 75	13, 75	20, 50	$36\,x + 9\,(A + B + C) = 143{,}27$
8	0	34, 25	13, 75	18, 75	$9\,x = 35{,}8175 - 2{,}25\,(A + B + C)$
9	0	35, 25	11, 50	18, 50	
.		+ 42, 77	+ 25, 50	+ 75, 00	
1	0	33, 70	14, 14	—	
2	0	36, 14	13, 45	—	$6\,x = 0$
3	0	34, 04	14, 05	—	$6\,x + 6\,A = 28{,}57$
4	0	36, 96	17, 12	—	$6\,x + 6\,B = 30{,}76$
5	0	33, 16	16, 11	—	$18\,x + 6\,(A + B) = 59{,}33$
6	0	34, 57	15, 89	—	$6\,x = 19{,}777 - 2\,(A + B)$
.		+ 28, 57	+ 30, 76	—	
1	0	34, 75	—	19, 63	$3\,x = 0$
2	0	36, 50	—	19, 38	$3\,x + 3\,A = 16{,}25$
3	0	35, 00	—	18, 87	$3\,x + 3\,C = 27{,}88$
.		+ 16, 25	—	+ 27, 88	$9\,x + 3\,(A + C) = 44{,}13$
					$3\,x = 14{,}71 - (A + C)$

Bildung der Gleichungen 13, 14, 15.

$$\begin{aligned}
42{,}77 &= 35{,}8175 + 6{,}75\,A - 2{,}25\,B - 2{,}25\,C \\
28{,}57 &= 19{,}7770 + 4{,}00\,A - 2{,}00\,B \\
16{,}25 &= 14{,}7100 + 2{,}00\,A \qquad\qquad - 1{,}00\,C \\
\hline
89{,}59 &= 70{,}3045 + 12{,}75\,A - 4{,}25\,B - 3{,}25\,C
\end{aligned}$$

oder

$$17{,}2855 = 12{,}75\,A - 4{,}25\,B - 3{,}25\,C.$$

Eben so erhält man:

$$\begin{aligned}
0{,}6655 &= -4{,}25\,A + 10{,}75\,B - 2{,}25\,C \\
52{,}3525 &= -3{,}25\,A - 2{,}25\,B + 8{,}75\,C.
\end{aligned}$$

so dafs letztere 3 Gleichungen den Gleichungen N. 19 entsprechen, deren Auflösung am einfachsten mittelst Logarithmen nach dem nachfolgenden Schema auszuführen ist. Dabei werden die Hülfsformeln

$$bn - an\,\frac{ab}{aa} = bn\,.\,1$$

$$bb - ab\,\frac{ab}{aa} = bb\,.\,1$$

$$bc - ac\,\frac{ab}{aa} = bc\,.\,1$$

$$cn - an\,\frac{ac}{aa} = cn\,.\,1$$

$$cc - ac\,\frac{ac}{aa} = cc\,.\,1$$

$$cn\,.\,1 - bn\,.\,1\,\frac{bc\,.\,1}{bb\,.\,1} = cn\,.\,2$$

$$cc\,.\,1 - bc\,.\,1\,\frac{bc\,.\,1}{bb\,.\,1} = cc\,.\,2$$

und die Auflösungsformeln

$$C = \frac{cn\,.\,2}{cc\,.\,2}$$

$$B = \frac{bn\,.\,1}{bb\,.\,1} - \frac{bc\,.\,1}{bb\,.\,1}\,C$$

$$A = \frac{an}{aa} - \frac{ab}{aa}\,B - \frac{ac}{aa}\,C$$

zum Grunde gelegt.

an + 17,2855	aa + 12,75	ab − 4,25	ac − 3,25	bn + 0,6655	bb + 10,75	bc − 2,25	cn + 52,3525	cc + 8,75
$\lg an = 1{,}23768$	$\lg aa = 1{,}10551$	$\lg ab = 0{,}62839\,n$ $\lg \frac{ab}{aa} = 0{,}52288 - 1\,n$ $\lg ab \frac{ab}{aa} = 0{,}15127$ $\lg an \frac{ab}{aa} = 0{,}76056\,n$	$\lg ac = 0{,}51188\,n$ $\lg ac \frac{ab}{aa} = 0{,}03476$ $\lg \frac{ac}{aa} = 0{,}40637 - 1\,n$ $\lg an \frac{ac}{aa} = 0{,}64405\,n$ $\lg ac \frac{ac}{aa} = 0{,}91825 - 1$	$an \frac{ab}{aa} = -5{,}7619$ $bn.1 = 6{,}4374$	$ab \frac{ab}{aa} = 1{,}4167$ $bb.1 = 9{,}3333$	$ac \frac{ab}{aa} = 1{,}0833$ $bc.1 = -3{,}3333$	$an \frac{ac}{aa} = -4{,}4061$ $cn.1 = 56{,}7586$	$ac \frac{ac}{aa} = 0{,}8284$ $cc.1 = 7{,}9216$
				$\lg bn.1 = 0{,}80871$	$\lg bb.1 = 0{,}97004$	$\lg bc.1 = 0{,}52288\,n$ $\lg \frac{bc.1}{bb.1} = 0{,}55284 - 1n$ $\lg bc.1 \frac{bc.1}{bb.1} = 0{,}07572$ $\lg bn.1 \frac{bc.1}{bb.1} = 0{,}36155\,n$	$bn.1 \frac{bc.1}{bb.1} = -2{,}2990$ $cn.2 = 59{,}0576$	$bc.1 \frac{bc.1}{bb.1} = 1{,}1905$ $cc.2 = 6{,}7311$
$\lg \frac{an}{aa} = 0{,}13217$ $\frac{an}{aa} = 1{,}3557$ $-3{,}5107$ $A = 4{,}8664$		$\lg B = 0{,}58241$ $\lg \frac{ab}{aa} B = -0{,}10529\,n$ $\frac{ab}{aa} B = -1{,}2743$ $\frac{ac}{aa} C = -2{,}2364$ $-3{,}5107$	$\lg C = 0{,}94318$ $\lg \frac{ac}{aa} C = 0{,}34955\,n$	$\lg \frac{bn.1}{bb.1} = 0{,}83867 - 1$ $\frac{bn.1}{bb.1} = 0{,}6897$		$\lg \frac{bc.1}{bb.1} C = 0{,}49602\,n$ $\frac{bc.1}{bb.1} C = -3{,}1834$ $B = 3{,}8231$	$\lg cn.2 = 1{,}77127$ $\lg C = 0{,}94818$ $C = 8{,}7736$	$\lg cc.2 = 0{,}82809$

Es sind demnach die ausgeglichenen Richtungen:

$$1 = 0^0\ 0'\ 0''$$
$$2 = 43^0\ 30'\ 34,''87$$
$$3 = 247^0\ 14'\ 13,''82$$
$$4 = 306^0\ 24'\ 18,''77$$

woraus also leicht die Winkel zwischen 1. 2, 2. 3, 3. 4 und 4. 1 sich ergeben.

Von der Richtigkeit der für A, B, C gefundenen Werthe überzeugt man sich daher, wenn die obigen Gleichungen

$$17{,}2855 = 12{,}75\,A - 4{,}25\,B - 3{,}25\,C \text{ u. s. w.}$$

nachdem die berechneten Werthe substituiert sind, zu identischen werden.

2. Zu einer Höhenmefsung wurde die Bestimmung der Standlinie $A\,C\,B$ durch folgende Mefsungen ausgeführt.

$A\,C = 39{,}^m0740$,	$C\,B = 46{,}^m0770$,	$A\,B = 86{,}^m0508$,
739,	776,	505,
735,	800,	492,
735,	790,	560.

Man sucht die wahrscheinlichsten Werthe für die beiden Theile $A\,C$ und $C\,B$.

Setzt man $A\,C = 39{,}^m0730 + A$
$C\,B = 46,\ 770 + B$

so ist $A\,B = 86,\ 500 + (A + B)$.

Da in den Gleichungen N. 19 hier $C = 0$ ist, so hat man nur die Gleichungen

$$(a\,n) = (a\,a)\,A + (a\,b)\,B$$
$$(b\,n) = (a\,b)\,A + (b\,b)\,B$$

zu berücksichtigen und in denselben hier die Zahlenwerthe für $(a\,n)$, $(b\,n)$, $(a\,a)$, $(a\,b)$ und $(b\,b)$ zu bestimmen.

Aus der Vergleichung der angenommenen Werthe für $A\,C$, $C\,B$ und $A\,B$ mit den gemefsenen Gröfsen gelangt man hier auf folgendem kürzeren Wege zur Kenntnifs der Bekannten $(a\,n)$, $(b\,n)$ und der Coefficienten von A und B. Es ist hier:

$$A = +\,10,\ +\,9,\ +\ 5,\ +\ 5,$$
$$B = \ \ 0,\ +\,6,\ +\,30,\ +\,20,$$
$$A + B = +\ 8,\ +\,5,\ -\ 8,\ +\,60,$$

Man erhält daher

$$(a\,n) = 10 + 9 + 5 + 5 + 8 + 5 - 8 + 60 = +\ 94,$$
$$(b\,n) = 0 + 6 + 30 + 20 + 8 + 5 - 8 + 60 = +\,121,$$

und da $(a\,a) = 8$, $(a\,b) = 4$ und $(b\,b) = 8$ ist, so erhält man die Gleichungen

$$94 = 8\,A + 4\,B,$$
$$121 = 4\,A + 8\,B.$$

woraus sich ergiebt $A = 5{,}5833$

und $B = 12{,}3333.$

Es ist daher der wahrscheinlichste Werth für

$$\text{das Stück } AC = 39{,}07356,$$
$$\text{„ „ } CB = 46{,}7823,$$

und daher für $AB = 86{,}5179$.

II. Die Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

§. 351.

Aufgabe. Es sind $a, b, c \ldots.$ als unmittelbare, gleich genaue Beobachtungen, die in einem gegebenen Zusammenhange zu einander stehen, gegeben. Man soll bei der Kenntnifs der Abhängigkeit derselben von einander die wahrscheinlichsten Werthe $A, B, C \ldots.$ derselben finden.

Ist die Zahl der zu bestimmenden Gröfsen $A, B, C \ldots. = n$ und sind die Bedingungen bekannt, welchen die unmittelbaren Beobachtungen genügen sollen, so werden sich immer Gleichungen zwischen den Gröfsen $A, B, C \ldots.$ und gewissen Constanten bilden lafsen, wie z. B. dafs die Summe der drei unmittelbar gemefsenen Winkel eines ebenen Dreiecks 180^0 betragen mufs, u. s. w. Sind also $u, u_1, u_2 \ldots.$ Functionen von $A, B, C \ldots.$, so werden die aufzustellenden μ Bedingungsgleichungen die Form

$$u = F(A, B, C \ldots.)$$
$$u_1 = F_1(A, B, C \ldots.)$$
$$u_2 = F_2(A, B, C \ldots.)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

haben, von denen jede Gleichung auch $= 0$ und wobei $n > \mu$ sein mufs.

Da aber die beobachteten Werthe $a, b, c \ldots.$ mit unvermeidlichen Fehlern $x, x_1, x_2 \ldots.$ behaftet sind, so wird jede der obigen Gleichungen Statt $= 0$ zu sein, durch eine andere sehr kleine Gröfse $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \ldots.$ sich darstellen, also die Form

$$\mathfrak{A} = F(a, b, c \ldots.)$$
$$\mathfrak{B} = F_1(a, b, c \ldots.)$$
$$\mathfrak{C} = F_2(a, b, c \ldots.)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

annehmen. Nennt man nun die ersten Abgeleiteten dieser Gleichungen beziehungsweise $\alpha, \alpha_1 \ldots., \beta, \beta_1 \ldots.$, nämlich

$$\frac{dF(a, b, c \ldots.)}{da} = \alpha, \quad \frac{dF(a, b, c \ldots.)}{db} = \alpha_1 \ldots.$$
$$\frac{dF_1(a, b, c \ldots.)}{da} = \beta \quad \text{u. s. w.}$$

so sind die μ Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} = \alpha x + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots . \\ \mathfrak{B} = \beta x + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots . \\ \mathfrak{C} = \gamma x + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \text{N. 26.}$$

für welche nur zu bemerken ist, dafs die Zahl der Glieder jeder einzelnen Gleichung von den jedesmaligen Bedingungen der Aufgabe abhängt, also wenn ein x fehlt, sein Coefficient $= 0$ ist. Auch ist nicht zu übersehen, dafs, obgleich auch hier $(x\,x)$ ein Minimum werden mufs, dasselbe doch kein absolutes Minimum sein kann, sondern dafs zugleich die Gleichungen N. 26 erfüllt werden müfsen. Mit diesen müfsen daher auch noch die Gleichungen

$$\begin{array}{l} \alpha\,d\,x + \alpha_1\,d\,x_1 + \alpha_2\,d\,x_2 + \ldots . = 0 \\ \beta\,d\,x + \beta_1\,d\,x_1 + \beta_2\,d\,x_2 + \ldots . = 0 \\ \gamma\,d\,x + \gamma_1\,d\,x_1 + \gamma_2\,d\,x_2 + \ldots . = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

so wie $$x\,d\,x + x_1\,d\,x_1 + x_2\,d\,x_2 + \ldots . = 0 \quad \text{N. 27.}$$

Statt finden.

Multipliciert man nun die erste der Gleichungen N. 26 mit dem fingierten Coefficienten I, die zweite mit II u. s. w., welche man die **Correlaten** der Bedingungsgleichungen nennt, und stellt durch Addition der multiplicierten Gleichungen die Bedingung des Minimums der Gleichung N. 27 her, so erhält man eben so viel **Correlatengleichungen**

$$\left.\begin{array}{l} x\; = \alpha\ \mathrm{I} + \beta\ \mathrm{II} + \gamma\ \mathrm{III} + \ldots . \\ x_1 = \alpha_1\,\mathrm{I} + \beta_1\,\mathrm{II} + \gamma_1\,\mathrm{III} + \ldots . \\ x_2 = \alpha_2\,\mathrm{I} + \beta_2\,\mathrm{II} + \gamma_2\,\mathrm{III} + \ldots . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \text{N. 28.}$$

als Verbefserungen der Beobachtungsgröfsen zu bestimmen sind.

Substituiert man nun ferner die Werthe der x der Correlatengleichungen N. 28 in den Bedingungsgleichungen N. 26, so erhält man die μ **Normalgleichungen**

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} = (a\,a)\,\mathrm{I} + (a\,b)\,\mathrm{II} + (a\,c)\,\mathrm{III} + \ldots . \\ \mathfrak{B} = (a\,b)\,\mathrm{I} + (b\,b)\,\mathrm{II} + (b\,c)\,\mathrm{III} + \ldots . \\ \mathfrak{C} = (a\,c)\,\mathrm{I} + (b\,c)\,\mathrm{II} + (c\,c)\,\mathrm{III} + \ldots . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \text{N. 29.}$$

woraus die Correlaten berechnet werden können.

Werden also die Werthe für I, II, III .... in die Gleichungen N. 28 gesetzt, so erhält man die Werthe der Verbefserungen $x\ x_1\ x_2 \ldots .$ und daraus dann, da

$$A = a + x,\quad B = b + x_1,\quad C = c + x_2 \ldots .$$

ist, die wahrscheinlichsten Werthe $A,\ B,\ C \ldots .$

§. 352.

Aufgabe. Aus den berechneten (xx) den mittleren Fehler der bedingten Beobachtungen zu finden, wenn die Zahl der letzteren $= n$ und die Zahl der Bedingungsgleichungen $= \mu$ gegeben ist.

Da man aus n gegebenen Beobachtungen μ Beobachtungen als überschüfsig ausscheiden kann, also dann $n - \mu$ erhält, so wird man in der Gleichung N. 25 $m = \pm \sqrt{\frac{(xx)}{n - \nu}}$, worin n die Zahl der Beobachtungen und ν die Zahl der Unbekannten bezeichnet, nur $\nu = n - \mu$ zu setzen haben, woraus dann

$$m = \pm \sqrt{\frac{(xx)}{\mu}} \qquad \text{N. 30.}$$

sich ergiebt.

§. 353.

Es wird nun noch darauf ankommen, zu zeigen, wie bei einer vorliegenden Aufgabe die erforderlichen Bedingungsgleichungen aufzustellen sind. Dafür können aber nur allgemeine Principe angegeben werden, nach denen zu verfahren ist, während bei jedem einzelnen Falle zu überlegen sein wird, wie man dieselben, den vorliegenden Umständen der Aufgabe gemäfs, anzuwenden hat. Es sind hierbei indessen Aufgaben zu unterscheiden, wobei entweder nur Winkelmefsungen vorkommen, oder solche, wo Winkel- und Linienmefsungen mit einander verbunden sind, oder solche, worin nur Linienmefsungen vorkommen. Da die letzteren meistens aber auf directe oder vermittelnde Beobachtungen zurückgeführt werden können, so soll hier nur von den beiden ersteren die Rede sein.

A. Der Ansatz der Bedingungsgleichungen für Aufgaben, welche nur Winkelbeobachtungen enthalten.

§. 354.

Aufgaben dieser Art kommen nur bei einem über eine gröfsere oder kleinere Flur gelegten Dreiecksnetze vor. Hierbei werden aufser der in I abgehandelten Ausgleichung der auf allen Dreieckspunkten nach den anderen beobachteten Richtungen, noch erfordert die Ausgleichungen, die sich auf die Möglichkeit des Dreiecksnetzes selbst beziehen. Bei einem Netze von ebenen Dreiecken mufs daher die Summe der Winkel eines jeden $= 180^0$ und bei einem sphärischen $= 180^0 + \varepsilon$ sein, wenn unter ε der sphärische Excess verstanden wird. Die aus diesen Bedingungen hervorgehenden Gleichungen nennt man Winkelgleichungen oder Bedingungsgleichungen zweiter Classe nach

Gaufs. Aufserdem müssen alle in einem Dreieckspunkte von anderen Stationspunkten aus einvisierte Richtungen sich genau in einem Punkte schneiden. Die hieraus entstehenden Gleichungen heifsen **Seitengleichungen** oder **Bedingungsgleichungen dritter Classe nach Gaufs.**

§. 355.

Aufgabe. **Die Winkelgleichungen eines durch Beobachtungen gegebenen Dreiecksnetzes anzusetzen.**

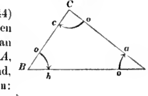


Fig. 144.

1. Sind in dem Dreiecke ABC (Fig. 144) in den drei Winkelpunkten alle möglichen Richtungen beobachtet und bezeichnet man die Verbefserungen derselben, wie sie in A, B und C nach der Reihe genommen sind, nach **Bessel** durch (1), (2), (3), so erhält man:

in A: die Richtung $B = 0$
„ „ $C = a + (1)$;
in B: „ „ $C = 0$
„ „ $A = b + (2)$;
in C: „ „ $A = 0$
„ „ $B = c + (3)$.

Die geforderte Winkelgleichung ist demnach

$$0 = a + (1) + b + (2) + c + (3) - 180^0.$$

2. Auf ähnliche Weise erhält man in dem Vierecke $ABCD$ (Fig. 145)

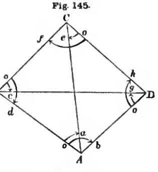


Fig. 145.

in A: die Richtung $B = 0$
„ „ $C = a + (1)$
„ „ $D = b + (2)$;
in B: „ „ $C = 0$
„ „ $D = c + (3)$
„ „ $A = d + (4)$;
in C: „ „ $D = 0$
„ „ $A = e + (5)$
„ „ $B = f + (6)$;
in D: „ „ $A = 0$
„ „ $B = g + (7)$
„ „ $C = h + (8)$.

Geht man nun bei der Feststellung der Bedingungsgleichungen von AB aus, so erhält man für $\Delta\ ABC$ die Winkelgleichung

$$0 = a + (1) + d + (4) + (f - e) + (6) - (5) - 180^0.$$

Auf dieselbe Weise bestimmen sich die Winkelgleichungen für die Dreiecke ACD, ABD und BCD; da aber die Winkel des einen der-

selben sich aus denen der drei anderen ergeben, so erhält man nur noch 2 Gleichungen, etwa für die Dreiecke ACD und ABD:

$$0 = (b - a) + (2) - (1) + e + (5) + h + (8) - 180^0,$$
$$0 = b + (2) + (d - c) + (4) - (3) + g + (7) - 180^0.$$

u. s. w.

§. 356.

Aufgabe. Die Seitengleichungen eines durch Beobachtungen gegebenen Dreiecksnetzes anzusetzen.

Hierbei geht man unter Anwendung des trigonometrischen Satzes, dafs in einem ebenen Dreiecke die Seiten, in einem sphärischen die Sinus derselben sich verhalten, wie die Sinus der Gegenwinkel, von einer beliebigen Seite, z. B. AB in Fig. 145 aus und rechnet durch eine fortlaufende Proportion auf dem kürzesten Wege bis zu dieser wieder zurück, nämlich

$$AB : AD = \sin g + (7) : \sin (d - c) + (4) - (3)$$
$$AD : AC = \sin e + (5) : \sin h + (8)$$
$$AC : AB = \sin d + (4) : \sin (f - e) + (6) - (5).$$

Dann erhält man

$$1 = \frac{\sin g + (7) \,.\, \sin e + (5) \,.\, \sin d + (4)}{\sin (d - c) + (4) - (3) \,.\, \sin h + (8) \,.\, \sin (f - e) + (6) - (5)}.$$

Zur Bestimmung der einzelnen Winkel mit ihren Verbefserungen wendet man am einfachsten die trigonometrischen Tafeln an, indem man z. B. bei $\log \sin g + (7)$, $\log \sin g$ in den Tafeln aufschlägt und der Verbefserungszahl (7) die daselbst bei $\log \sin g$ stehende Log. Diff. für 1 Sekunde als Coefficient beisetzt. Bezeichnet man diese Differenzen beziehungsweise mit $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots\ldots$, so ist die gesuchte Seitengleichung:

$$0 = \log \sin g + \Delta_7 (7) + \log \sin e + \Delta_5 (5) + \log \sin d + \Delta_4 (4)$$
$$- (\log \sin (d - c) + \Delta_4 [(4) - (3)] + \log \sin h + \Delta_8 (8) + \log \sin (f - e)$$
$$+ \Delta_6 [(6) - (5)]).$$

Anmerkung. Selbstverständlich ist bei einem Dreiecke von keiner Seitengleichung die Rede, sondern das Viereck dazu das einfachste Polygon.

§. 357.

Fig. 146.



Wären, wie es bei der Aufnahme eines Dorfes der Fall sein kann, an dem Umfange des um dasselbe gelegten Polygons, die W[illegible]nkel der Seiten gegen den im Innern [illegible] Kirchthurm als vermittelnde Be[illegible]en gemefsen und nach I aus- [illegible] so würde die Seitengleichung

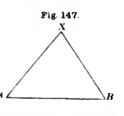
$$[illegible] \frac{\sin \beta \sin \delta \sin \zeta \sin \vartheta \sin \varkappa}{\sin \alpha \sin \gamma \sin \varepsilon \sin \eta \sin \iota}$$

§. 358.

Aufgabe. **Die Zahl der Winkel- und Seitengleichungen für ein gegebenes Dreiecksnetz zu bestimmen.**

1. Zur Bestimmung des dritten Punktes X (Fig. 147) aus zwei anderen A und B reicht zwar die Bestimmung der Richtungen AX und BX gegen AB aus, allein ein überschüfsiges Stück erhält man erst durch die Mefsung der beiden Richtungen XA und XB gegen einander, woraus dann die eine Winkelgleichung als Bedingungsgleichung hervorgeht.

Fig. 147.



2. Ist in Fig. 148 der Punkt X von 3 schon bestimmten Punkten A, B und C, und sind in X alle 3 Richtungen XA, XB, XC beobachtet, oder die beiden Winkel AXC und BXC gemefsen, so kommen zu der Winkelgleichung des Dreiecks, für ein Viereck noch 2 d. h. $3-1$ Winkelgleichungen, aber nach §. 356 aufserdem noch 1 d. h. $3-2$ Seitengleichungen hinzu.

Fig. 148.

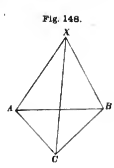
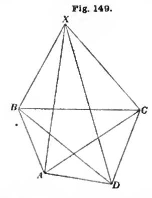


Fig. 149.



3. Eben so kommen, wenn in Fig. 149 der Punkt X nicht allein von 4 schon bestimmten Punkten A, B, C, D beobachtet ist, sondern auch in X alle vier Richtungen XA, XB, XC und XD beobachtet, oder 3 Winkel BXA, AXD und DXC gemefsen sind, zu den 3 Winkelgleichungen des Vierecks $ABCD$ noch $3 = 4 - 1$ hinzu. Da nun ferner aufser dem letzteren noch die beiden Vierecke $XBAC$ und $XCDA$, oder Statt dieser, $XADC$ und $XDAB$ entstehen, so treten zu der Seitengleichung des Vierecks $ABCD$ noch $2 = 4 - 2$ Seitengleichungen hinzu.

4. Allgemein, ist ein Punkt X von m bereits bestimmten Punkten, und sind in X zugleich alle m Richtungen beobachtet, oder $m - 1$

Winkel gemefsen, so ist die Zahl der hinzukommenden Winkelgleichungen $= m - 1$ und die der hinzutretenden Seitengleichungen $= m - 2$. Selbstverständlich fallen aber die ersteren hinweg, wenn in X keine Beobachtungen angestellt waren.

5. Indem man also von einer beliebigen Seite eines Dreiecksnetzes ausgeht und nach und nach alle übrigen Punkte desselben zu bestimmten Punkten macht, erhält man alle Winkel- und Seitengleichungen als Bedingungsgleichungen. Dabei bleibt es der Willkür überlafsen, welche Wahl man treffen will, da die Kenntnifs der Zahl der Bedingungsgleichungen vor Wiederholung und vor Auslafsung schützt.

Folgende Tabelle stellt die Zahl der einzelnen Bedingungsgleichungen in den Polygonen von auf einander folgender Seitenzahl dar.

Polygon von Seiten	Zahl der Winkel- Gleichungen	Zahl der Seiten- Gleichungen	Zahl der Bedingungs- Gleichungen
3	1	—	1
4	3	1	4
5	6	3	9
6	10	6	16
7	15	10	25
8	21	15	36
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
n	w	s	$(n-2)^2$
$n+1$	$w+n-1$	$s+n-2$	$(n-1)^2$

§. 359.

In gröfserer Allgemeinheit sind über die Zahl der Winkel- und Seitengleichungen eines Polygons von Gaufs folgende beiden Sätze aufgestellt:

1. Wenn p Punkte durch l beiderseitig beobachtete Linien verbunden sind, so ist die Zahl der daraus abzuleitenden Winkelgleichungen

$$l - p + 1.$$

2. Wenn p Punkte durch l ihrer Richtung nach einseitig oder doppelt gegen andere Linien festgelegte Linien trigonometrisch verbunden sind, so ist die Zahl der daraus entstehenden Seitengleichungen

$$l - 2p + 3.$$

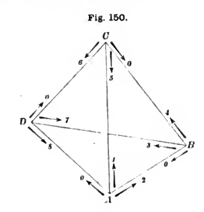
Ueber den Beweis dieser Sätze vgl. m. Gerling, die Ausgleichungsrechnungen u. s. w. S. 271 u. f.

§. 360.

Rechnungsbeispiele.

1. In dem Vierecke $ABCD$ (Fig. 150) sind alle Richtungen der Seiten und Diagonalen desselben durch folgende, um die Verbesserungen vermehrte, Beobachtungen bestimmt:

Fig. 150.



in A:	die Richtung	$D = 0$
	„ „	$C = 24^0\ 23'\ 31,''5 + (1)$
	„ „	$B = 93^0\ 6'\ 48,''81 + (2)$,
in B:	„ „	$A = 0$
	„ „	$D = 51^0\ 18'\ 38,''13 + (3)$
	„ „	$C = 73^0\ 39'\ 48,''44 + (4)$,
in C:	„ „	$B = 0$
	„ „	$A = 37^0\ 36'\ 40,''00 + (5)$
	„ „	$D = 95^0\ 19'\ 18,''13 + (6)$,
in D:	„ „	$C = 0$
	„ „	$B = 62^0\ 19'\ 41,''88 + (7)$
	„ „	$A = 97^0\ 54'\ 9,''63 + (8)$,

welche Zahlenwerthe als die mittleren Werthe verschiedener Beobachtungsreihen, mithin insofern als die ausgeglichenen Beobachtungen der Richtungen im Horizonte angesehen werden dürfen. Man soll die wahrscheinlichsten Werthe derselben bestimmen.

Da sämmtliche Richtungen beiderseitig beobachtet sind, so sind hier nach §. 358 drei Winkelgleichungen und eine Seitengleichung als Bedingungsgleichungen zu entwickeln.

1. ΔABC.

$$
\begin{aligned}
A &= 68^0\ 43'\ 17,''31 + (2) - (1) \\
B &= 73^0\ 39'\ 48,''44 + (4) \\
C &= 37^0\ 36'\ 40,''00 + (5) \\
\hline
\text{Summe} &= 179^0\ 59'\ 45,''75 - (1) + (2) + (4) + (5).
\end{aligned}
$$

2. ΔBCD.

$$
\begin{aligned}
B &= 22^0\ 21'\ 10,''31 + (4) - (3) \\
C &= 95^0\ 19'\ 18,''13 + (6) \\
D &= 62^0\ 19'\ 41,''88 + (7) \\
\hline
\text{Summe} &= 180^0\ \ 0'\ 10,''32 - (3) + (4) + (6) + (7).
\end{aligned}
$$

3. ΔABD.

$$
\begin{aligned}
A &= 93^0\ \ 6'\ 48,''81 + (2) \\
B &= 51^0\ 18'\ 38,''13 + (3) \\
D &= 35^0\ 34'\ 27,''75 + (8) - (7) \\
\hline
\text{Summe} &= 179^0\ 59'\ 54,''69 + (2) + (3) - (7) + (8).
\end{aligned}
$$

4. Viereck $ABCD$.

$$
\begin{aligned}
AB : BC &= \sin ACB : \sin BAC \\
BC : BD &= \sin BDC : \sin BCD \\
BD : AB &= \sin BAD : \sin ADB
\end{aligned}
$$

folglich $$1 = \frac{\sin ACB \,.\, \sin BDC \,.\, \sin BAD}{\sin BAC \,.\, \sin BCD \,.\, \sin ADB}$$

$ACB = 37^0\ 36'\ 40'',00 + (5)$, $BAC = 68^0\ 43'\ 17'',31 + (2) - (1)$

$BDC = 62^0\ 19'\ 41'',88 + (7)$, $BCD = 95^0\ 19'\ 18'',13 + (6)$

$BAD = 93^0\ \ 6'\ 48'',81 + (2)$, $ADB = 35^0\ 34'\ 27'',75 + (8) - (7)$

$$
\begin{aligned}
\log\sin ACB &= 9{,}7855425 + 27{,}33\,(5) \\
\text{„}\ \ \text{„}\ \ BDC &= 9{,}9472489 + 11{,}04\,(7) \\
\text{„}\ \ \text{„}\ \ BAD &= 9{,}9993584 + \ \ 1{,}10\,(2) \\
\hline
& \ \ \ 9{,}7321498 + \ \ 1{,}10\,(2) + 27{,}33\,(5) + 11{,}04\,(7).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log\sin BAC &= 9{,}9693354 + 8{,}20\,(2) - 8{,}20\,(1) \\
\text{„}\ \ \text{„}\ \ BCD &= 9{,}9981240 + 2{,}00\,(6) \\
\text{„}\ \ \text{„}\ \ ADB &= 9{,}7647433 + 29{,}44\,(8) - 29{,}44\,(7) \\
\hline
& \ \ \ 9{,}7322027 - 8{,}20\,(1) + 8{,}20\,(2) + 2{,}00\,(6) - 29{,}44\,(7) \\
& \qquad + 29{,}44\,(8).
\end{aligned}
$$

Man erhält daher die den Gleichungen N. 26 (§. 351) entsprechenden Bedingungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
+\ 14{,}25 &= -(1) + (2) + (4) + (5). \\
-\ 10{,}32 &= -(3) + (4) + (6) + (7). \\
+\ \ 5{,}31 &= +(2) + (3) - (7) + (8). \\
+\ 529{,}0 &= +8{,}20\,(1) - 7{,}10\,(2) + 27{,}33\,(5) - 2{,}00\,(6) + 40{,}48\,(7) \\
&\qquad - 29{,}44\,(8).
\end{aligned}
$$

Hieraus ergeben sich dann nach N. 28 (§. 351) die Correlatengleichungen:

$$(1) = -\mathrm{I} + 8{,}20\,\mathrm{IV}.$$
$$(2) = \mathrm{I} + \mathrm{III} - 7{,}10\,\mathrm{IV}.$$
$$(3) = -\mathrm{II} + \mathrm{III}.$$
$$(4) = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$
$$(5) = \mathrm{I} + 27{,}33\,\mathrm{IV}.$$
$$(6) = \mathrm{II} - 2{,}00\,\mathrm{IV}.$$
$$(7) = \mathrm{II} - \mathrm{III} + 40{,}48\,\mathrm{IV}.$$
$$(8) = \mathrm{III} - 29{,}44\,\mathrm{IV}.$$

Durch Substitution dieser Werthe für (1), (2) ..... in den obigen Bedingungsgleichungen ergeben sich endlich die den Gleichungen N. 29 (§. 351) entsprechenden Normalgleichungen:

$$+\ 14{,}25 = 4\,\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + 12{,}03\,\mathrm{IV}.$$
$$-\ 10{,}32 = \mathrm{I} + 4\,\mathrm{II} - 2\,\mathrm{III} + 38{,}48\,\mathrm{IV}.$$
$$+\ 5{,}31 = \mathrm{I} - 2\,\mathrm{II} + 4\,\mathrm{III} - 77{,}02\,\mathrm{IV}.$$
$$+\ 529{,}00 = 12{,}03\,\mathrm{I} + 38{,}48\,\mathrm{II} - 77{,}02\,\mathrm{III} + 3373{,}9229\,\mathrm{IV}.$$

welche nach dem im §. 348 angegebenen Verfahren aufgelöst werden können.

Setzt man daselbst für (an), (bn), (cn) ..., $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ und für A, B, C..., I, II, III, IV, so erhält man zunächst als Hülfsausdrücke

$$bb.1 = bb - ab\,\frac{ab}{aa},\quad bc.1 = bc - ac\,\frac{ab}{aa},$$
$$bd.1 = bd - ad\,\frac{ab}{aa},\quad cc.1 = cc - ac\,\frac{ac}{aa},$$
$$cd.1 = cd - ad\,\frac{ac}{aa},\quad dd.1 = dd - ad\,\frac{ad}{aa},$$
$$cc.2 = cc.1 - bc.1\,\frac{bc.1}{bb.1},\quad cd.2 = cd.1 - bd.1\,\frac{bc.1}{bb.1},$$
$$dd.2 = dd.1 - bd.1\,\frac{bd.1}{bb.1},$$
$$dd.3 = dd.2 - cd.2\,\frac{cd.2}{cc.2},\quad \mathfrak{B}.1 = \mathfrak{B} - \mathfrak{A}\,\frac{ab}{aa},$$
$$\mathfrak{C}.1 = \mathfrak{C} - \mathfrak{A}\,\frac{ac}{aa},\quad \mathfrak{D}.1 = \mathfrak{D} - \mathfrak{A}\,\frac{ad}{aa},$$
$$\mathfrak{C}.2 = \mathfrak{C}.1 - \mathfrak{B}.1\,\frac{bc.1}{bb.1},\ \mathfrak{D}.2 = \mathfrak{D}.1 - \mathfrak{B}.1\,\frac{bd.1}{bb.1},$$
$$\mathfrak{D}.3 = \mathfrak{D}.2 - \mathfrak{C}.2\,\frac{cd.2}{cc.2}$$

und hieraus dann die den Gleichungen N. 22 bis 24 (§. 348) entsprechenden Ausdrücke

$$\mathrm{IV} = \frac{\mathfrak{D}.3}{dd.3}$$
$$\mathrm{III} = \frac{\mathfrak{C}.2}{cc.2} - \frac{cd.2}{cc.2}\,\mathrm{IV}.$$
$$\mathrm{II} = \frac{\mathfrak{B}.1}{bb.1} - \frac{bc.1}{bb.1}\,\mathrm{III} - \frac{bd.1}{bb.1}\,\mathrm{IV}.$$
$$\mathrm{I} = \frac{\mathfrak{A}}{aa} - \frac{ab}{aa}\,\mathrm{II} - \frac{ac}{aa}\,\mathrm{III} - \frac{ad}{aa}\,\mathrm{IV}.$$

Die Berechnung selbst geschieht am zweckmäſsigsten nach folgendem Schema:

$\mathfrak{A}$ + 14,25	aa + 4	ab + 1	ac + 1	ad + 12,03	$\mathfrak{B}$ − 10,32
		$\frac{ab}{aa} = 0{,}25$ $\mathfrak{A}\frac{ab}{aa} = 3{,}5625$	$\frac{ac}{aa} = 0{,}25$ $\mathfrak{A}\frac{ac}{aa} = 3{,}5625$	$\frac{ad}{aa} = 3{,}0075$ $ad\frac{ad}{aa} = 36{,}1802$ $\mathfrak{A}\frac{ad}{aa} = 42{,}8569$	$\mathfrak{A}\frac{ab}{aa} = 3{,}5625$ $\mathfrak{B}.1 = -13{,}8825$
					$\lg \mathfrak{B}.1 = 1{,}14247n$
$\frac{\mathfrak{A}}{aa} = 3{,}5625$ $I = 2{,}5413$		$\lg\frac{ab}{aa} = 0{,}39794-1$ $\lg II = 0{,}58237n$ $\lg\frac{ab}{aa}\,II = 0{,}98031-1n$ $\frac{ab}{aa}\,II = -0{,}95568$	$\lg\frac{ac}{aa} = 0{,}39794-1$ $\lg III = 0{,}64325$ $\lg\frac{ac}{aa}\,III = 0{,}04119$ $\frac{ac}{aa}\,III = 1{,}09949$	$\lg\frac{ad}{aa} = 0{,}47821$ $\lg IV = 0{,}46497-1$ $\lg\frac{ad}{aa}\,IV = 0{,}94318$ $\frac{ad}{aa}\,IV = 0{,}87736$	$\lg\frac{\mathfrak{B}.1}{bb.1} = 0{,}56844n$ $\frac{\mathfrak{B}.1}{bb.1} = -3{,}7020$ $II = -3{,}8227$
			+ 1,02117		

bb + 4	bc − 2	bd + 38,48	$\mathfrak{C}$ + 5,31
$ab\frac{ab}{aa} = 0{,}25$ $bb.1 = 3{,}75$	$ac\frac{ab}{aa} = 0{,}25$ $bc.1 = -2{,}25$	$ad\frac{ab}{aa} = 3{,}0075$ $bd.1 = +35{,}4725$	$\mathfrak{A}\frac{ac}{aa} = 3{,}5625$ $\mathfrak{C}.1 = 1{,}7475$
$\lg bb.1 = 0{,}57403$	$\lg bc.1 = 0{,}35218n$ $\lg\frac{bc.1}{bb.1} = 0{,}77815-1n$ $\lg bc.1\frac{bc.1}{bb.1} = 0{,}13033$	$\lg bd.1 = 1{,}54989$ $\lg bd.1\frac{bc.1}{bb.1} = 1{,}32804n$ $\lg\frac{bd.1}{bb.1} = 0{,}97586$ $\lg bd.1\frac{bd.1}{bb.1} = 2{,}52575$	
	$\lg \mathfrak{B}.1\frac{bc.1}{bb.1} = 0{,}92062$	$\lg \mathfrak{B}.1\frac{bd.1}{bb.1} = 2{,}11833n$	$\mathfrak{B}.1\frac{bc.1}{bb.1} = 8{,}3295$ $\mathfrak{C}.2 = -6{,}582$ $\lg \mathfrak{C}.2 = 0{,}81836n$
	$\lg III = 0{,}64325$ $\lg\frac{bc.1}{bb.1}\,III = 0{,}42140n$ $\frac{bc.1}{bb.1}\,III = -2{,}6388$	$\lg IV = 0{,}46497-1$ $\lg\frac{bd.1}{bb.1}\,IV = 0{,}44083$ $\frac{bd.1}{bb.1}\,IV = 2{,}7595$	$\lg\frac{\mathfrak{C}.2}{cc.2} = 0{,}43815n$ $\frac{\mathfrak{C}.2}{cc.2} = -2{,}7425$ $\frac{cd.2}{cc.2}\,IV = -7{,}1405$ $III = 4{,}3980$
	+ 0,1207		

cc $+ 4$	cd $- 77{,}02$	$\mathfrak{D}$ $+ 529{,}00$	dd $3373{,}9229$
$ac \frac{ac}{aa} = 0{,}25$ $cc.1 = 3{,}75$	$ad \frac{ac}{aa} = \quad 3{,}0075$ $cd.1 = - 80{,}0275$	$\mathfrak{A} \frac{ad}{aa} = \quad 42{,}8569$ $\mathfrak{D}.1 = 486{,}1431$	$ad \frac{ad}{aa} = \quad 36{,}1802$ $dd.1 = 3337{,}7427$
$bc.1 \frac{bc.1}{bb.1} = 1{,}35$ $cc.2 = 2{,}40$ $\lg cc.2 = 0{,}38021$	$bd.1 \frac{bc.1}{bb.1} = - 21{,}2835$ $cd.2 = - 58{,}7440$ $\lg cd.2 = 1{,}76896\,n$ $\lg \frac{cd.2}{cc.2} = 1{,}38875\,n$ $\lg cd.2 \frac{cd.2}{cc.2} = 3{,}15771$		$bd.1 \frac{bd.1}{bb.1} = \quad 335{,}5462$ $dd.2 = 3002{,}1965$ $cd.2 \frac{cd.2}{cc.2} = 1437{,}857$ $dd.3 = 1564{,}3395$
	$\lg \mathfrak{C}.2 \frac{cd.2}{cc.2} = 2{,}20711$	$\mathfrak{B}.1 \frac{bd.1}{bb.1} = - 131{,}3192$ $\mathfrak{D}.2 = \quad 617{,}4623$ $\mathfrak{C}.2 \frac{cd.2}{cc.2} = \quad 161{,}1054$ $\mathfrak{D}.3 = \quad 456{,}3569$	
	$\lg \mathrm{IV} \frac{cd.2}{cc.2} = 0{,}85373\,n$		$\lg dd.3 = 3{,}19433$ $\lg \mathfrak{D}.3 = 2{,}65930$ $\lg \mathrm{IV} = 0{,}46497 - 1$ $\mathrm{IV} = 0{,}2917$

Setzt man die für I, II, III und IV gefundenen Werthe in die obigen Normalgleichungen, so erhält man durch deren Uebereinstimmung mit den Werthen 14,25, — 10,32, + 5,31 und 529,00 die Ueberzeugung von der Richtigkeit der berechneten Correlaten.

Durch Substitution derselben in den obigen Correlatengleichungen ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
(1) &= - \quad 0{,}1492. \\
(2) &= \quad 4{,}8680. \\
(3) &= \quad 8{,}2207. \\
(4) &= - \quad 1{,}2814. \\
(5) &= \quad 10{,}5142. \\
(6) &= - \quad 4{,}4062. \\
(7) &= \quad 3{,}5883. \\
(8) &= - \quad 4{,}1904.
\end{aligned}
$$

Setzt man endlich diese Werthe in die oben mit den Verbefserungen verbundenen Beobachtungsgröfsen, so ergeben sich daraus dann die verbefserten Winkel der Dreieeke.

1. ABC.	$A =$	$68^0\ 43'\ 22,''327$
	$B =$	$73^0\ 39'\ 47,''159$
	$C =$	$37^0\ 36'\ 50,''514$
	Summe $=$	$180^0\ 0'\ 0''$.
2. BCD.	$B =$	$22^0\ 21'\ 0,''808$
	$C =$	$95^0\ 19'\ 13,''724$
	$D =$	$62^0\ 19'\ 45,''468$
	Summe $=$	$180^0\ 0'\ 0''$.
3. ABD.	$A =$	$93^0\ 6'\ 53,''678$
	$B =$	$51^0\ 18'\ 46,''351$
	$D =$	$35^0\ 34'\ 19,''972$
	Summe $=$	$180^0\ 0'\ 0,''001$
4. ACD.	$A =$	$24^0\ 23'\ 31,''351$
	$C =$	$57^0\ 42'\ 23,''21$
	$D =$	$97^0\ 54'\ 5,''44$
	Summe $=$	$180^0\ 0'\ 0,''001$.

2. Für das Pothenot'sche Problem (§. 306) sind in Fig. 151 für die gegebenen 3 Punkte A, B, C die Winkel

$$A = 68^0\ 43'\ 24''$$
$$B = 73^0\ 39'\ 50''$$
$$C = 37^0\ 36'\ 46''$$

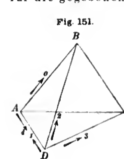


Fig. 151.

als bereits verbefserte Winkel gegeben; in dem Punkte D seien die Winkel

$$ADB = 35^0\ 34'\ 28'',$$
$$BDC = 62^0\ 19'\ 42''$$

und in dem Punkte A der Winkel

$$BAD = 93^0\ 6'\ 49''$$

gemefsen, man sucht die wahrscheinlichsten Werthe der Winkel des Vierecks.

Da in C nur der Winkel ACB bekannt und in B nicht die Richtung BD beobachtet ist, so ergiebt sich aus §. 358, dafs hier keine Winkelgleichungen als Bedingungsgleichungen aufgestellt werden können, sondern dafs nur eine Seitengleichung zu bilden ist. Man erhält dann

$$1 = \frac{\sin ADB \cdot \sin BCD \cdot \sin BAC}{\sin BAD \cdot \sin BDC \cdot \sin BCA}.$$

Es sind dann mit den hinzugefügten Verbefserungsgröfsen die Winkel

$$ADB = 35^0\ 34'\ 28'' + (2) - (1)$$
$$BAD = 93^0\ 6'\ 49'' + (4)$$
$$BDC = 62^0\ 19'\ 42'' + (3) - (2)$$

Ferner ergiebt sich aus den Winkeln ABC, BAD, ADB und BDC

$$BCD = 95^0\ 19'\ 11'' + (1) - (3) - (4).$$

$$\begin{array}{ll} \log \sin ADB = 9{,}7647440 + 29{,}44\,[(2) - (1)] \\ \ BCD = 9{,}9981254 + \ \ 2{,}00\,[(1) - (3) - (4)] \\ \ BAC = 9{,}9693409 \\ \hline \ 9{,}7322103 - 27{,}44(1) + 29{,}44\,(2) - 2{,}00\,(3) - 2{,}00\,(4). \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \log \sin BAD = 9{,}9993584 + \ \ 1{,}10\,(4) \\ \ BDC = 9{,}9472491 + 11{,}04\,[(3) - (2)] \\ \ BCA = 9{,}7855589 \\ \hline \ 9{,}7321664 - 11{,}04\,(2) + 11{,}04\,(3) + 1{,}10\,(4). \end{array}$$

Die gesuchte Seitengleichung ist daher

$$-439 = -27{,}44\,(1) + 40{,}48\,(2) - 13{,}04\,(3) - 3{,}10\,(4).$$

Die Correlatengleichungen demnach:

$$\begin{aligned} (1) &= -27{,}44\,\mathrm{I}, \\ (2) &= +40{,}38\,\mathrm{I}, \\ (3) &= -13{,}04\,\mathrm{I}, \\ (4) &= -\ \ 3{,}10\,\mathrm{I}, \end{aligned}$$

woraus dann die Normalgleichung

$$-439 = 2571{,}22\,\mathrm{I},$$

und hieraus dann

$$\mathrm{I} = -0{,}1668$$

folgt. Es ist demnach

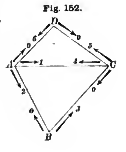
$(1) = +4'',58$, $(2) = -6'',96$, $(3) = +2'',18$ und $(4) = +0',52$,

so dafs die ausgeglichenen Winkel des Vierecks sind:

$$\begin{array}{rl} ABC = & 73^0\ 39'\ 50'' \\ BAD = & 93^0\ \ 6'\ 49'',52 \\ ADB = & 35^0\ 34'\ 16'',46 \\ BDC = & 62^0\ 19'\ 51'',14 \\ BCD = & 95^0\ 19'\ 12'',88 \\ \hline \text{Summe} = & 360^0\ \ 0'\ \ 0'' \end{array}$$

3. In Fig. 152 sind in den an einander hängenden Dreiecken ABC und ADC die Richtungen der Schenkel durch Beobachtungsreihen (mit den hinzugefügten Verbefserungen), nämlich:

Fig. 152.



in A: die Richtung $D = 0$

 $C = 24^0\ 23'\ 31'',50 + (1)$

 $B = 93^0\ \ 6'\ 48'',81 + (2)$

in B: $A = 0$

 $C = 73^0\ 39'\ 48'',44 + (3)$

in C: die Richtung $B = 0$

„ „ $A = 37^0\ 36'\ 40'' \quad + (4)$

„ „ $D = 95^0\ 19'\ 18,''13 + (5)$

und in D: „ „ $C = 0$

„ „ $A = 97^0\ 54'\ \ 9,''63 + (6)$

gegeben. Man soll die wahrscheinlichsten Werthe derselben bestimmen.

Stellt man wie in Beisp. 1 die Winkel der beiden Dreiecke dar, so erhält man für

$$\Delta ABC:\quad A = 68^0\ 43'\ 17,''31 + (2) - (1)$$
$$B = 73^0\ 39'\ 48,''44 + (3)$$
$$C = 37^0\ 36'\ 40,''00 + (4)$$
$$\Delta ADC:\quad A = 24^0\ 23'\ 31,''50 + (1)$$
$$C = 57^0\ 42'\ 38,''13 + (5) - (4)$$
$$D = 97^0\ 54'\ \ 9,''63 + (6).$$

Daraus ergeben sich dann die beiden Winkelgleichungen;

$$14,''25 = -(1) + (2) + (3) + (4)$$
$$-19,''26 = (1) - (4) + (5) + (6);$$

hieraus dann die Correlatengleichungen:

$$(1) = -\mathrm{I} + \mathrm{II}.$$
$$(2) = (3) = \mathrm{I}.$$
$$(4) = \mathrm{I} - \mathrm{II}.$$
$$(5) = (6) = \mathrm{II}.$$

Dann bilden sich die beiden Normalgleichungen:

$$14{,}25 = 4\,\mathrm{I} - 2\,\mathrm{II},$$
$$-19{,}26 = -2\,\mathrm{I} + 4\,\mathrm{II},$$

aus deren Auflösung folgt:

$$\mathrm{I} = 1{,}54,\quad \mathrm{II} = -4{,}045,$$

Hieraus ergeben sich nun die Verbefserungen:

$$(1) = -5{,}585,\ (2) = 1{,}54,\ (3) = 1{,}54,$$
$$(4) = +5{,}585,\ (5) = -4{,}045,\ (6) = -4{,}045,$$

woraus schliefslich die ausgeglichenen Winkel der beiden Dreiecke leicht abgeleitet werden können.

4. Sind in einem ebenen Dreiecke alle 3 Winkel mit gleicher Genauigkeit gemefsen, so ergiebt sich aus den in den vorigen Beispielen eingeschlagenen Wegen leicht, dafs der gefundene Unterschied zwischen der Winkelsumme und 180^0 unter die 3 Winkel gleichmäfsig zu vertheilen ist.

Die nämliche Regel gilt auch für die Ausgleichung der mit gleicher Genauigkeit gemefsenen Winkel eines beliebigen Polygons, sowie auch für die rund um einen Punkt mit derselben Genauigkeit gemefsenen Winkel, deren Summe $= 360^0$ sein mufs.

B. Der Ansatz der Bedingungsgleichungen für Aufgaben, in welchen Winkel- und Linienmefsungen vorkommen.

§. 361.

Die hierher gehörigen Aufgaben betreffen hauptsächlich nur Polygone und Dreiecke, in welchen Winkel und Seiten gemefsen sind; erstere besonders bei der Aufnahme des Details mittelst des Theodoliths, wenn möglichste Genauigkeit beansprucht wird, letztere, wenn sie die Grundlage anderer damit in Verbindung gesetzter Horizontal- und Verticalmefsungen abgeben, mithin ebenfalls möglichst genaue Resultate erzielt werden sollen.

In beiden Figurenarten kommen bei den zu bestimmenden Bedingungsgleichungen Winkel- und Seitengleichungen in Betracht. In dieser Beziehung bieten hinsichtlich der Zahl derselben die im §. 359 angegebenen Ausdrücke von Gaufs $l - p + 1$ und $l - 2p + 3$ gröfsere Bequemlichkeit dar; nur ist bei dem zweiten zu bemerken, dafs hier die Zahl l sowohl für Längenbestimmungen, als für Richtungen, mit dem Theodolith gemefsen, genommen werden mufs. Werden die ersteren mit l_l, die letzteren mit l_r bezeichnet, so würde dann die Anzahl der Seitengleichungen mittelst des Ausdrucks

$$l_l + l_r - 2p + 3$$

zu bestimmen sein, indem bei Polygonmefsungen, blofs einseitige Richtungen in Winkelpunkten genommen, hier nicht weiter in Betracht kommen sollen, da der Praktiker sie immer vermeiden wird. Aus demselben Grunde soll im Nachfolgenden bei Polygonen nur der Fall betrachtet werden, dafs sämmtliche Seiten und Winkel, also 3 überschüfsige Stücke, gemefsen sind, während die anderen 5 Fälle, wobei $n - 2$ Seiten und n Winkel, oder wo $n - 1$ Seiten und zugleich entweder n oder $n - 1$ Winkel, oder endlich wo n Seiten und zugleich $n - 1$ oder $n - 2$ Winkel, also theils 2 überschüfsige Stücke, theils nur eins gemefsen sind und welche demnach zur Ausgleichung benutzt werden könnten, hier übergangen werden sollen.

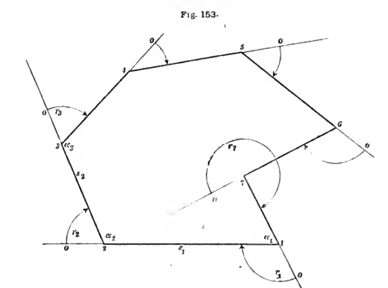
§. 362.

In dem Nachfolgenden soll folgende Bezeichnung zum Grunde gelegt werden.

1. Die Winkelpunkte des Polygons werden so durch die auf einander folgenden Ziffern von 1 an bezeichnet, dafs bei den wachsenden Zahlen das Innere des Polygons rechts liegen bleibt, wie Fig. 153 zeigt.

2. Die Seiten werden mit s und demjenigen Index bezeichnet, welcher dem nächstniedrigeren Endpunkte angehört, also die Seite 1. 2, durch s_1, 2. 3, durch s_2 .... 7. 1 durch s_7.

Fig. 153.



3. Die Polygonwinkel sollen durch α mit dem, dem Scheitelpunkte des Winkels entsprechenden Index bezeichnet werden.

4. Die Richtungsunterschiede der Seiten werden durch r mit dem Index bezeichnet, welcher dem gemeinschaftlichen Scheitelpunkte zugehört, also der Richtungsunterschied zwischen s_7 und s_1 durch r_1, der zwischen s_1 und s_2 durch r_2 u. s. w. Dabei soll aber zur Vermeidung von Irrthümern bei der Winkelbeschreibung der Nullpunkt der Zählung in der Verlängerung der nächstniedrigeren Seite genommen werden, wie diefs die Figur zeigt.

Es ist daher

$$r_1 = 180^0 - \alpha_1,$$
$$r_2 = 180^0 - \alpha_2.$$
u. s. w.

Ist α ein convexer Winkel, wie bei dem Winkelpunkte 7, so ist, da $r_7 = 180^0 + (360^0 - \alpha_7)$ (dem Implementswinkel von α_7)

$$r_7 = 540^0 - \alpha_7.$$

Da nun bei einer vollständigen Beobachtung aller Winkel der Unterschied der letzten Seite schon von selbst gegeben ist, so wird in dem Ausdrucke des vorigen Paragraphen $l_l + l_r - 2p + 3$ das l_r um 1 zu vermindern sein, also die Anzahl der Seitengleichungen $= l_l + l_{r-1} - 2p + 3$ d. h. unter der obigen Voraussetzung $= 2$ sein.

5. Die Winkel, welche die Seiten eines $n$ecks mit einer beliebig zur Abscissenachse angenommenen Linie bilden (die Neigungs- oder reducierten Winkel des §. 303, oder die Azimuthe des §. 344) sollen durch A mit dem der Seite zugehörenden Index bezeichnet werden. Wird also in Fig. 153 s_1 zur Abscissenachse und 1 zum Anfangspunkt der Coordinaten angenommen, so ist bei der Zählung nach vorwärts

$$A_1 = 0$$
$$A_2 = A_1 + r_2 = r_2$$
$$A_3 = A_2 + r_3 = r_2 + r_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_7 = A_6 + r_7 = r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7$$

wobei nur zu bemerken ist, dafs wenn die Summe auf der rechten Seite 360° übersteigt, diese Zahl abzuziehen ist.

Es ergiebt sich also auch leicht der Richtungsunterschied zweier beliebiger Seiten, z. B. s_7 gegen s_3 beim Vorwärtszählen durch den Ausdruck

$$A_7 - A_3 = r_4 + r_5 + r_6 + r_7$$

oder allgemein $A_n - A_m = r_{m+1} + r_{m+2} + \ldots + r_{n-1} + r_n$.

Beim Rückwärtszählen erhält man demnach

$$A_3 - A_7 = 360^0 - (A_7 - A_3)$$
$$360^0 - (r_4 + r_5 \ldots + r_7)$$

und allgemein $A_m - A_n = 360^0 - (A_n - A_m)$

$$= r_{n+1} + r_{n+2} + \ldots + r_{m-1} + r_m.$$

§. 363.

Aufgabe. In einem $n$ecke sind sämmtliche Winkel $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ und sämmtliche Seiten $s_1, s_2 \ldots s_n$ gemefsen, man soll ihre wahrscheinlichsten Werthe bestimmen.

1. Die Verbefserungen, welche bei den Winkeln anzubringen sind, sollen wie bisher durch (1), (2) .... (n) bezeichnet werden, so dafs also (1) die Verbefserung des Winkels α_1 .... (n) die des Winkels α_n darstellt. Die Verbefserungen der Seiten aber sollen durch [1], [2] .... [n] bezeichnet werden, so dafs die Verbefserungszahl mit dem Index der Seite übereinstimmt.

2. Auch hier werden zunächst die erforderlichen Bedingungsgleichungen zu bestimmen sein. Aus §. 361 ergiebt sich, dafs hier nur eine Winkelgleichung Statt findet, die also nach N. 26 (§. 351) durch

$$0 = \mathfrak{A} + (1) + (2) + \ldots + (n) \qquad \text{N. 31.}$$

dargestellt werden kann.

Aufserdem sind nach §. 362, 4. noch 2 Seitengleichungen zu bilden, die aber nicht nach dem im §. 356 angegebenen Verfahren, sondern

nach folgender Methode anzusetzen sind. Da nämlich unter den gegebenen $2n$ Stücken des $n$ecks, 3 als überschüfsig betrachtet werden können, welche hier s_n und die ihr anliegenden Winkel α_n und α_{n+1} sein mögen, so kann man sich s_{n+1} als Abscissenachse und $n+1$ als Anfangspunkt der Coordinaten denken, wobei also nach §. 362, 5. $A_{n+1} = 0$ ist, und aus den zu bestimmenden anderen Azimuthen A_{n+2}, A_{n+3} .... und den bekannten Seiten auf bekannte Weise die Coordinaten aller folgenden Winkelpunkte von $n+3$ an bis einschliefslich n, beim Vorwärtszählen berechnen. Man hat also für die obige Abscissenachse durch Addition der berechneten Abscissen- und Ordinatenstücke Δx .... und Δy .... auch die Abscisse x_n und Ordinate y_n und erhält dann mittelst des Ausdrucks

$$\operatorname{tg} \alpha_{n+1} = \frac{y_n}{x_n}$$

einen Werth für α_{n+1} durch Rechnung. Subtrahiert man nun diesen berechneten Werth von dem beobachteten gegebenen Werthe für α_{n+1}, so erhält man den Ausdruck für $\mathfrak{B}$ der Bedingungsgleichungen N. 26 und daher die Gleichung

$$0 = \mathfrak{B} + (n+1). \qquad \text{N. 32.}$$

Da man nun ferner aus dem berechteten α_{n+1} und y_n mittelst des Ausdrucks

$$s_n = \frac{y_n}{\sin \alpha_{n+1}}$$

den Werth s_n durch Rechnung findet, so erhält man wieder durch Subtraction dieses berechneten s_n von dem gegebenen s_n den Ausdruck für $\mathfrak{C}$ der Gleichungen N. 26 und daher die Gleichung

$$0 = \mathfrak{C} + [n]. \qquad \text{N. 33.}$$

3. Nimmt man jetzt s_n zur Abscissenachse und n zum Anfangspunkt der Coordinaten an, berücksichtigt hierbei aber den berechneten Winkel α_{n+1} und die berechnete Seite s_n, so werden dadurch nicht allein die Coordinaten jedes Winkelpunkts, sondern auch die übrigen Polygonwinkel eine Veränderung erleiden, so dafs es nun darauf ankommt, zu bestimmen, welche Veränderungen dadurch den in den Gleichungen N. 32 u. 33 enthaltenen Verbefserungen $(n+1)$ und $[n]$ zukommen. Dann erst ergeben sich die gesuchten Seitengleichungen mit allen den, den Winkeln und Seiten hinzuzufügenden Verbefserungen, aus welchen nun die numerische Bestimmung dieser letzteren mittelst der Gleichungen N. 28 und N. 29 (§. 351) möglich ist.

Die Berechnung der erwähnten Veränderungen wird aber durch folgenden Lehrsatz bestimmt.

4. Lehrsatz. Wenn aus den gegebenen Stücken eines polygonometrischen Zuges 3 überschüfsige Stücke, z. B. α_n,

α_{n+1} und s_n, berechnet sind, und nun entweder eine beliebige andere Seite s_m oder ein beliebiger anderer Polygonwinkel α_m eine unendlich kleine Veränderung erleidet, so ist die Abhängigkeit dieser Veränderungen von denen der berechneten Seite s_n und des berechneten Winkels α_{n+1} durch die Gleichungen gegeben:

$$d s_n = - \cos (A_m - A_n) \, d s_m. \qquad \text{N. 34.}$$

$$d s_n = \frac{y_m \, d \alpha_m}{206265''}. \qquad \text{N. 35.}$$

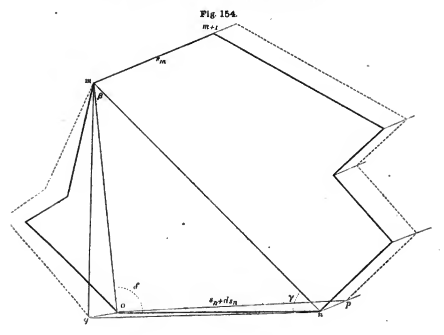
$$d \alpha_{n+1} = - \frac{\sin (A_m - A_n) \, d s^m \; 206265''}{s_n}. \qquad \text{N. 36.}$$

$$d \alpha_{n+1} = - \frac{x_m \, d \alpha_m}{s_n}. \qquad \text{N. 37.}$$

Beweis. 1) Denkt man sich in Fig. 154 die Seite s_m über $m + 1$ hinaus um ein unendlich kleines Stück $d s_m$, das aber hier als endlich genommen werden mag, verlängert, so verschiebt sich jeder folgende Winkelpunkt von $m + 2$ an bis n einschliefslich parallel und gleich jener Verlängerung. Es kommt dann n nach p und es ist in dem Dreiecke $n o p$, worin $o p = s_n + d s_n$ ist,

$$(s_n + d s_n)^2 = s_n^2 + d s_m^2 - 2 s_n d s_m \cos (A_m - A_n)$$

Fig. 154.



woraus, wenn man die linke Seite quadriert und berücksichtigt, dafs $d s_n^2$ und $d s_m^2 = 0$ gesetzt werden können, sogleich N. 34 sich ergiebt.

2) Denkt man sich den Winkel α_m um einen unendlich kleinen, hier aber als endlich angenommenen Winkel $d \alpha_m$ vergröfsert und von m aus nach n und $n + 1$ oder o die Diagonalen $m n$ und $m o$ gezogen, so bleibt der eine Theil des Polygons zwischen m und n, hier der rechts von $m n$ liegende, unverändert, während der links von $m o$ liegende Theil, um den Punkt m herum, um den Winkel $d \alpha_m$ gedreht wird, so dafs dann o nach q und $m o$ nach $m q$ rückt. Es ist alsdann in dem $\Delta\, m n q$, worin $q n = s_n + d s_n$ ist,

$$(s_n + d s_n)^2 = m n^2 + m q^2 - 2 m n \,.\, m q \,.\, \cos (\beta + d \alpha_m)$$

oder

$$s_n^2 + 2 s_n d s_n + d s_n^2 = m n^2 + m q^2 - 2 m n \,.\, m q \,.\, \cos \beta \cos d \alpha_m$$
$$+ 2 m n \,.\, m q \,.\, \sin \beta \sin d \alpha_m.$$

Da aber $d s_n^2 = 0$, $\cos d \alpha_m = 1$ und $\sin d \alpha_m = \frac{d \alpha_m}{206265}$ gesetzt werden kann, und in dem $\Delta\, m o n$, worin $m o = m q$ ist,

$$s_n^2 = m n^2 + m q^2 - 2 m n \,.\, m q \cos \beta$$

ist, so erhält man nach vollzogener Substitution und Subtraction

$$d s_n = \frac{m n \,.\, m o \,.\, \sin \beta \,.\, d \alpha_m}{s_n\, 206265}.$$

Ferner ist in dem $\Delta\, m n o$

$$s_n : m o = \sin \beta : \sin \gamma,$$

folglich

$$\frac{\sin \beta}{s_n} = \frac{\sin \gamma}{m o};$$

mithin erhält man, da $m n \sin \gamma = y_m$ ist, unmittelbar die Gleichung N. 35.

3) In dem $\Delta\, o n p$, in welchem $\sphericalangle p o n = d r_n$ und $\sphericalangle o p n = (A_n - A_m) + d r_n$ ist, hat man

$$d s_m : s_n = \sin d r_n : \sin [(A_n - A_m) + d r_n],$$

folglich

$$\sin d r_n = \frac{d s_m}{s_n} [\sin (A_n - A_m) \cos d r_n + \cos (A_n - A_m) \sin d r_n].$$

Da aber auf der rechten Seite $\cos d r_n = 1$ und $\sin d r_n = 0$ gesetzt werden, kann und auf der linken

$$\sin d r_n = \frac{d r_n}{206265},$$

so ist

$$d r_n = 206265 \frac{d s_m}{s_n} \sin (A_n - A_m),$$

oder, da $d r_n = - d r_{n+1} = - d \alpha_n = d \alpha_{n+1}$ ist,

$$d \alpha_{n+1} = - 206265 \frac{d s_m}{d s_n} \sin (A_m - A_n).$$

4) Es folgt zunächst, dafs

$$d\,\alpha_m = d\,r_n + d\,r_{n+1}$$

ist. Ferner folgt aus dem $\Delta\,m\,o\,n$

$$m\,n\,.\,\sin(\gamma - d\,r_n) = m\,o\,.\,\sin(\delta - d\,r_{n+1})$$

oder

$$m\,n\,(\sin\gamma\cos d\,r_n - \cos\gamma\sin d\,r_n) = m\,o\,(\sin\delta\cos d\,r_{n+1} - \cos\delta\sin d\,r_{n+1}),$$

oder

$$m\,n\,.\,\sin\gamma - \frac{m\,n\,.\,\cos\gamma\;d\,r_n}{206265} = m\,o\,.\,\sin\delta - \frac{m\,o\,.\,\cos\delta\;d\,r_{n+1}}{206265},$$

oder, da

$$m\,n\,.\,\sin\gamma = m\,o\,.\,\sin\delta,$$

$$m\,n\cos\gamma\,.\,d\,r_n = m\,o\,.\,\cos\delta\,.\,d\,r_{n+1},$$

und

$$d\,\alpha_m = d\,r_n + d\,r_{n+1}$$

$$(m\,o\,.\,\cos\delta + m\,n\,.\,\cos\gamma)\,d\,r_{n+1} = m\,n\,.\,\cos\gamma\,.\,d\,\alpha_m.$$

Da nun $m\,o\,.\,\cos\delta + m\,n\,.\,\cos\gamma = s_n$

und $m\,n\,.\,\cos\gamma = x_m$ ist,

so ist $s_n\,d\,r_{n+1} = x_m\,d\,\alpha_m$,

woraus alsdann, da $d\,r_{n+1} = -\,d\,\alpha_{n+1}$ ist,

die Gleichung N. 37 folgt.

5. Um nun die in **3.** angedeuteten Veränderungen der in den Gleichungen N. 32 und 33 enthaltenen Verbefserungen zu bestimmen, mufs man berücksichtigen, dafs durch die in den Gleichungen N. 34—37 enthaltenen Differenziale $d\,s_n$, $d\,s_m$, $d\,\alpha_m$ und $d\,\alpha_{n+1}$ nichts weiter als Verbefserungen ausgedrückt sind und daher jene Gleichungen, da bei dem Anfangspunkt n der Coordinaten $A_n = 0$ ist, in folgende übergehen:

$$[n] = -\cos A_m\,[m]. \qquad \text{N. 38.}$$

$$[n] = +\frac{y_m\,(m)}{206265}. \qquad \text{N. 39.}$$

$$(n+1) = -\frac{\sin A_m\;206265\;[m]}{s_n}. \qquad \text{N. 40.}$$

$$(n+1) = -\frac{x_m}{s_n}\,(m). \qquad \text{N. 41.}$$

Setzt man also für m alle Zahlen der Polygonwinkelpunkte, die in **2.** gebraucht wurden, also in den Gleichungen N. 41 und 39 alle Zahlen von $n+2$ an bis $n-1$ einschliefslich, in den beiden anderen aber alle Zahlen von $n+1$ an bis $n-1$ einschliefslich und verbindet die erhaltenen Werthe aus N. 41 und 40 mit N. 32, die aus N. 39 und 38 mit N. 33, so entstehen die geforderten Seitengleichungen, die dann mit N. 31 nach dem Früheren behandelt werden.

§. 364.

Rechnungsbeispiele.

1. In Bezug auf Fig. 124 (§. 304 u. 309) ist durch unmittelbare Meſsung gefunden:

$$
\begin{array}{llll}
\alpha_1 = 56^0\ 30'\ 13'' & s_1 = 251,^0\ 62 \\
\alpha_2 = 97^0\ 32'\ 13'' & s_2 = 26,^0\ 80 \\
\alpha_3 = 271^0\ 6'\ 45'' & s_3 = 118,^0\ 27 \\
\alpha_4 = 92^0\ 3'\ 24'' & s_4 = 18,^0\ 56 \\
\alpha_5 = 201^0\ 2'\ 4'' & s_5 = 6,^0\ 45 \\
\alpha_6 = 96^0\ 51'\ 34'' & s_6 = 25,^0\ 70 \\
\alpha_7 = 196^0\ 20'\ 47'' & s_7 = 78,^0\ 73 \\
\alpha_8 = 135^0\ 35'\ 29'' & s_8 = 49,^0\ 96 \\
\alpha_9 = 170^0\ 1'\ 14'' & s_9 = 21,^0\ 20 \\
\alpha_{10} = 138^0\ 5'\ 19'' & s_{10} = 67,^0\ 10 \\
\alpha_{11} = 271^0\ 2'\ 17'' & s_{11} = 122,^0\ 83 \\
\alpha_{12} = 73^0\ 50'\ 53'' & s_{12} = 205,^0\ 42 \\
\hline
\text{Summe } 1800^0\ 2'\ 12'' &
\end{array}
$$

Die Winkelgleichung ist daher

$$-132'' = (1) + (2) + (3) + \ldots\ldots + (11) + (12)$$

1. Bestimmung der Zahlenwerthe für die Gleichungen N. 32 und 33.

α_{12}, α_1 und s_{12} sollen als überschüſsig betrachtet werden, s_1 ist daher die Abscissenachse, 1 der Anfangspunkt der Coordinaten.

Winkelpunkt	r			A			log sin A	log cos A
	°	'	"	°	'	"		
2	82	27	47	82	27	47	9,9962316	9,1178191
3	268	53	15	351	21	2	9,1772148 n	9,9950324
4	87	56	36	79	17	38	9,9923736	9,2689787
5	338	57	56	58	15	34	9,9296432	9,7210466
6	83	8	26	141	24	—	9,7951008	9,8929404 n
7	343	39	13	125	3	13	9,9130797	9,7591711 n
8	44	24	31	169	27	44	9,2621752	9,9926129 n
9	9	58	46	179	26	30	9,9887641	9,9999794 n
10	41	54	41	221	21	11	9,8200024 n	9,8754390 n
11	268	57	43	130	18	54	9,8822392	9,8108972 n
Probe								
12	106	9	7	236	28	1		
1	123	29	47	359	57	48		

Winkel-punkt	log s	log Δy	log Δx
2	1,4281348		
3	2,0728746	1,4243664 *)	0,5459539
4	1,2685780	1,2500894 n	2,0679070
5	0,8095597	1,2609516	0,5375567
6	1,4099331	0,7392029	0,5306063
7	1,8961403	1,2050339	1,3028735 n
8	1,6986224	1,8092200	1,6553114 n
9	1,3263359	0,9607976	1,6912353 n
10	1,8267225	0,3151000—1	1,3263153 n
11	2,0893045	1,6467249 n	1,7021615 n
12		1,9715437	1,9002017 n

Winkel-punkt	Δy	Δx	y	x
1			+ 0	+ 0
2			+ 0	+ 251,62000
3	+ 26,56846	+ 3,51523	+ 26,56846	+ 255,13523
4	— 17,78645	+ 116,92490	+ 8,78201	+ 372,06013
5	+ 18,23692	+ 3,44792	+ 27,01893	+ 375,50805
6	+ 5,48533	+ 3,39318	+ 32,50426	+ 378,90123
7	+ 16,03370	— 20,08508	+ 48,53796	+ 358,81615
8	+ 64,44956	— 45,21801	+ 112,98752	+ 313,59814
9	+ 9,13687	— 49,11740	+ 122,12439	+ 264,48074
10	+ 0,20659	— 21,19900	+ 122,33098	+ 243,28174
11	— 44,33277	— 50,36880	+ 77,99821	+ 192,91294
12	+ 93,65774	— 79,46972	+ 171,65595	+ 113,44322

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_{12}}{x_{12}}.$$

$$\log y_{12} = 2{,}2346589.$$
$$\log x_{12} = 2{,}0547786.$$
$$\log \operatorname{tg} \alpha_1 = 0{,}1798803.$$
$$\alpha_1 = 56^0\ 32'\ 24{,}''923.$$

Da nun der beobachtete Winkel $\alpha_1 = 56^0\ 30'\ 13''$ ist, so ist der Unterschied zwischen beiden (23) $= -131{,}''923$.

$$s_{12} = \frac{y_{12}}{\sin \alpha_1}.$$

$$\log y_{12} = 2{,}2346589$$
$$\log \sin \alpha_1 = 9{,}9213084 - 10$$
$$\log s_{12} = 2{,}3133505$$
$$s_{12} = 205{,}^0\ 755.$$

*) Die Berechnung der logg. Δy und Δx beruht bekanntlich auf den Formeln: $y_{n+1} = s_n \sin A_n$, $x_{n+1} = s_n \cos A_n$.

Da nun die gemefsene Seite $s_{12} = 205,^{0}42$ ist, so ist $\mathfrak{C} = -0,^{0}335$.
Bei einem angenommenen Winkelfehler von 10 Sekunden und einem Linienfehler von 1 Hundertstel Ruthe sind daher die den Gleichungen N. 31, 32, 33 entsprechenden Gleichungen:

$$-13,2 = (1) + (2) + \ldots + (12).$$
$$13,1923 = (1).$$
$$33,5 \quad = [12].$$

2. Berechnung der Coordinaten der Winkelpunkte für die Abscissenachse s_{12} und 12 als Anfangspunkt.

Winkelpunkt	r			A			log sin A	log cos A
	°	′	″	°	′	″		
1	123	27	35	123	27	35	9,92131	9,74143 *n*
2	82	27	47	205	55	22	9,64064 *n*	9,95395 *n*
3	268	53	15	114	48	37	9,95791	9,62285 *n*
4	87	56	36	202	45	13	9,58745 *n*	9,96481 *n*
5	338	57	56	181	43	9	8,47713 *n*	9,99980 *n*
6	83	8	26	264	51	35	9,99825 *n*	8,95228 *n*
7	343	39	13	248	30	48	9,96872 *n*	9,56382 *n*
8	44	24	31	292	55	19	9,96428 *n*	9,59048
9	9	58	46	302	54	5	9,92408 *n*	9,73496
10	41	54	41	344	48	46	9,41826 *n*	9,98456
11	268	57	43	253	46	29	9,98235 *n*	9,44625 *n*
	1693	46	29					
also 12	106	13	31	0	0	0		

Winkelpunkt	log s	log Δy	log Δx
1	4,40074	—	
2	3,42813	4,32205	4,14217 *n*
3	4,07287	3,06877 *n*	3,38208 *n*
4	3,26858	4,03082	3,69572 *n*
5	2,80956	2,85603 *n*	3,23339 *n*
6	3,40993	1,28669 *n*	2,80936 *n*
7	3,89614	3,40818 *n*	2,36221 *n*
8	3,69862	3,86486 *n*	3,45996 *n*
9	3,32634	3,66290 *n*	3,28910
10	3,82672	3,25041 *n*	3,06129
11	4,08930	3,24498 *n*	3,81128
12		4,07165 *n*	3,53555 *n*

Winkel-punkt	Δy	Δx	y	x
1			0	+ 20575,50
2	+ 20992,00	— 13873,10	+ 20992,00	+ 6702,40
3	— 1171,50	— 2410,30	+ 19820,50	+ 4292,10
4	+ 10735,40	— 4962,80	+ 30555,90	— 670,70
5	— 717,85	— 1711,60	+ 29838,05	— 2382,30
6	— 19,35	— 644,70	+ 29818,70	— 3027,00
7	— 2559,70	— 230,25	+ 27259,00	— 3257,25
8	— 7325,90	— 2883,80	+ 19933,10	— 6141,05
9	— 4601,50	+ 1945,80	+ 15331,60	— 4195,25
10	— 1779,90	+ 1151,60	+ 13551,70	— 3043,65
11	— 1757,80	+ 6475,70	+ 11793,90	+ 3432,05
12	— 11793,80	— 3432,10	+ 0,10	— 0,05

3. Berechnung der Coefficienten der in den obigen Gleichungen

$$+13{,}1923 = (1)$$
$$-33{,}5 \quad = [12]$$

noch hinzuzusetzenden Verbefserungen.

a) Nach Gleichung N. 41

$$0 = (n+1) + \frac{x_m}{s_n}(m),$$

indem man für x_m alle Werthe von x_2 an bis x_{11} einschliefslich aus der letzten Spalte der vorigen Tabelle und für s_n den Werth 20575,5 setzt.

$\log s_{12} = 4{,}31335$ $\log \frac{1}{s_{12}} =$	m $=$	$\log x_m$	$\log \frac{x_m}{s_{12}}$	$\frac{x_m}{s_{12}}(m)$
	2	3,82623	0,51288 — 1	+ 0,3258 (2)
	3	3,63267	0,31932 — 1	+ 0,2086 (3)
	4	2,82653 *n*	0,51318 — 2 *n*	— 0,0326 (4)
0,68665 — 5	5	3,37700 *n*	0,06365 — 1 *n*	— 0,1158 (5)
	6	3,48101 *n*	0,16766 — 1 *n*	— 0,1471 (6)
	7	3,51285 *n*	0,19950 — 1 *n*	— 0,1583 (7)
	8	3,78824 *n*	0,47489 — 1 *n*	— 0,2985 (8)
	9	3,62276 *n*	0,30941 — 1 *n*	— 0,2039 (9)
	10	3,48338 *n*	0,17003 — 1 *n*	— 0,1479 (10)
	11	3,53555	0,22220 — 1	+ 0,1668 (11)

b) Nach Gleichung N. 40

$$0 = (n+1) + \frac{206265 \,.\, \sin A_m}{s_n}[m],$$

indem man aus 2. Berechnung der Coordinaten u. s. w. alle Werthe

aus der Spalte für sin A_m, von A_1 an bis A_{11}, $s_n = s_{12}$ und für 206265 $\frac{206265}{10} = 20626{,}5$ setzt.

$$\log 20626{,}5 = 4{,}31443$$
$$\log s_{12} = 4{,}31335$$
$$\log \frac{26526{,}5}{s_{12}} = 0{,}00108$$

m =	$\log \frac{20626{,}5}{s_{12}} \sin A_m$	$\frac{206265{,}8}{s_{12}} \sin A_m$ [m]
1	0,99239 — 1	+ 0,9826 [1]
2	0,64172 — 1 n	— 0,4383 [2]
3	0,95902 — 1	+ 0,9100 [3]
4	0,58853 — 1 n	— 0,3877 [4]
5	0,47821 — 2 n	— 0,0301 [5]
6	0,99933 — 1 n	— 0,9985 [6]
7	0,96980 — 1 n	— 0,9328 [7]
8	0,96536 — 1 n	— 0,9233 [8]
9	0,92516 — 1 n	— 0,8417 [9]
10	0,41934 — 1 n	— 0,2626 [10]
11	0,98343 — 1 n	— 0,9626 [11]

c) Nach Gleichung N. 39

$$0 = [n] - \frac{y_m}{209265}(m),$$

indem man für y_m alle Werthe von y_2 an bis y_{11} und Statt 206265 den Werth 20626,5 setzt.

$\log \frac{1}{20626{,}5}$ =	m =	$\log y_m$	$\log \frac{y_m}{20626{,}5}$	$\frac{y_m}{20626{,}5}$ (m)
	2	4,32205	0,00762	1,0177 (2)
	3	4,29711	0,98268 — 1	0,9609 (3)
0,68557 — 5	4	4,48510	0,17067	1,4814 (4)
	5	4,47477	0,16032	1,4465 (5)
	6	4,47449	0,16006	1,4456 (6)
	7	4,43551	0,12108	1,3215 (7)
	8	4,29957	0,98514 — 1	0,9664 (8)
	9	4,18559	0,87116 — 1	0,7433 (9)
	10	4,13199	0,81756 — 1	0,6570 (10)
	11	4,07166	0,75723 — 1	0,5718 (11)

d) Nach Gleichung N. 38

$$0 = [n] + \cos A_m [m]$$

m	$\cos A_m$ [m]
1	− 0,5514 [1]
2	− 0,8994 [2]
3	− 0,4196 [3]
4	− 0,9222 [4]
5	− 0,9995 [5]
6	− 0,0896 [6]
7	− 0,3663 [7]
8	+ 0,3895 [8]
9	+ 0,5432 [9]
10	+ 0,9651 [10]
11	− 0,2794 [11]

4. Die in 1. angegebenen Bedingungsgleichungen erhalten daher folgende Gestalt:

$$-13{,}2 = (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8) + (9) + (10) + (11) + (12).$$

$$\begin{aligned} +13{,}1923 = {} & (1) + 0{,}3258\,(2) + 0{,}2086\,(3) - 0{,}0326\,(4) - 0{,}1158\,(5) \\ & - 0{,}1471\,(6) - 0{,}1583\,(7) - 0{,}2985\,(8) - 0{,}2039\,(9) \\ & - 0{,}1479\,(10) + 0{,}1668\,(11) \\ & + 0{,}9826\,[1] - 0{,}4383\,[2] + 0{,}9100\,[3] - 0{,}3877\,[4] \\ & - 0{,}0301\,[5] - 0{,}9985\,[6] - 0{,}9328\,[7] - 0{,}9233\,[8] \\ & - 0{,}8417\,[9] - 0{,}2626\,[10] - 0{,}9626\,[11]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +33{,}5 = {} & - 1{,}0177\,(2) - 0{,}9609\,(3) - 1{,}4814\,(4) - 1{,}4465\,(5) \\ & - 1{,}4456\,(6) - 1{,}3215\,(7) - 0{,}9664\,(8) - 0{,}7433\,(9) \\ & - 0{,}6570\,(10) - 0{,}5718\,(11) \\ & - 0{,}5514\,[1] - 0{,}8994\,[2] - 0{,}4196\,[3] - 0{,}9222\,[4] \\ & - 0{,}9995\,[5] - 0{,}0896\,[6] - 0{,}3663\,[7] + 0{,}3895\,[8] \\ & + 0{,}5432\,[9] + 0{,}9651\,[10] - 0{,}2794\,[11] + [12]. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich dann die Correlatengleichungen:

$$\begin{aligned} (1) &= \mathrm{I} + 1{,}000\ \mathrm{II} \\ (2) &= \mathrm{I} + 0{,}3258\ \mathrm{II} - 1{,}0177\ \mathrm{III}. \\ (3) &= \mathrm{I} + 0{,}2086\ \mathrm{II} - 0{,}9609\ \mathrm{III}. \\ (4) &= \mathrm{I} - 0{,}0326\ \mathrm{II} - 1{,}4814\ \mathrm{III}. \\ (5) &= \mathrm{I} - 0{,}1158\ \mathrm{II} - 1{,}4465\ \mathrm{III}. \\ (6) &= \mathrm{I} - 0{,}1471\ \mathrm{II} - 1{,}4456\ \mathrm{III}. \\ (7) &= \mathrm{I} - 0{,}1583\ \mathrm{II} - 1{,}3215\ \mathrm{III}. \\ (8) &= \mathrm{I} - 0{,}2985\ \mathrm{II} - 0{,}9664\ \mathrm{III}. \\ (9) &= \mathrm{I} - 0{,}2039\ \mathrm{II} - 0{,}7433\ \mathrm{III}. \\ (10) &= \mathrm{I} - 0{,}1479\ \mathrm{II} - 0{,}6570\ \mathrm{III}. \\ (11) &= \mathrm{I} + 0{,}1668\ \mathrm{II} - 0{,}5718\ \mathrm{III}. \\ (12) &= \mathrm{I}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[1] &= +0{,}9826\ \mathrm{II} - 0{,}5514\ \mathrm{III}.\\
[2] &= -0{,}4383\ \mathrm{II} - 0{,}8994\ \mathrm{III}.\\
[3] &= +0{,}9100\ \mathrm{II} - 0{,}4196\ \mathrm{III}.\\
[4] &= -0{,}3877\ \mathrm{II} - 0{,}9222\ \mathrm{III}.\\
[5] &= -0{,}0301\ \mathrm{II} - 0{,}9995\ \mathrm{III}.\\
[6] &= -0{,}9985\ \mathrm{II} - 0{,}0896\ \mathrm{III}.\\
[7] &= -0{,}9328\ \mathrm{II} - 0{,}3663\ \mathrm{III}.\\
[8] &= -0{,}9233\ \mathrm{II} + 0{,}3895\ \mathrm{III}.\\
[9] &= -0{,}8417\ \mathrm{II} + 0{,}5432\ \mathrm{III}.\\
[10] &= -0{,}2626\ \mathrm{II} + 0{,}9651\ \mathrm{III}.\\
[11] &= -0{,}9626\ \mathrm{II} - 0{,}2794\ \mathrm{III}.\\
[12] &= \qquad\qquad\quad + 1{,}0000\ \mathrm{III}.
\end{aligned}
$$

Endlich erhält man durch Substitution der Werthe für (1), (2).... (12), [1], [2].... [12] in den obigen Bedingungsgleichungen die Normalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
-13{,}2 &= 12{,}0000\ \mathrm{I} + 0{,}5971\ \mathrm{II} - 10{,}6121\ \mathrm{III}\\
+13{,}1923 &= 0{,}5971\ \mathrm{I} + 7{,}9518\ \mathrm{II} + 0{,}0306\ \mathrm{III}\\
+33{,}5 &= -10{,}6121\ \mathrm{I} + 0{,}0306\ \mathrm{II} + 18{,}0642\ \mathrm{III},
\end{aligned}
$$

welche den bekannten allgemeinen Formen

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= (aa)\ \mathrm{I} + (ab)\ \mathrm{II} + (ac)\ \mathrm{III}\\
\mathfrak{B} &= (ab)\ \mathrm{I} + (bb)\ \mathrm{II} + (bc)\ \mathrm{III}\\
\mathfrak{C} &= (ac)\ \mathrm{I} + (bc)\ \mathrm{II} + (cc)\ \mathrm{III}
\end{aligned}
$$

entsprechen.

Für die Auflösung der obigen 3 Normalgleichungen sind die Hülfsformeln:

$$
\begin{aligned}
bb\,.\,1 &= bb - ab\,\frac{ab}{aa}.\\
bc\,.\,1 &= bc - ac\,\frac{ab}{aa}.\\
cc\,.\,1 &= cc - ac\,\frac{ac}{aa}.\\
cc\,.\,2 &= cc\,.\,1 - bc\,.\,1\,\frac{bc\,.\,1}{bb\,.\,1}.\\
\mathfrak{B}\,.\,1 &= \mathfrak{B} - \mathfrak{A}\,\frac{ab}{aa}.\\
\mathfrak{C}\,.\,1 &= \mathfrak{C} - \mathfrak{A}\,\frac{ac}{aa}.\\
\mathfrak{C}\,.\,2 &= \mathfrak{C}\,.\,1 - \mathfrak{B}\,.\,1\,\frac{bc\,.\,1}{bb\,.\,1},
\end{aligned}
$$

so wie die Auflösungsformeln:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{III} &= \frac{\mathfrak{C}\,.\,2}{cc\,.\,2},\\
\mathrm{II} &= \frac{\mathfrak{B}\,.\,1}{bb\,.\,1} - \frac{bc\,.\,1}{bb\,.\,1}\,\mathrm{III},\\
\mathrm{I} &= \frac{\mathfrak{A}}{aa} - \frac{ab}{aa}\,\mathrm{II} - \frac{ac}{aa}\,\mathrm{III}.
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{A}$ $-13{,}2$	aa $+12$	ab $+0{,}5971$	ac $-10{,}6121$	$\mathfrak{B}$ $+13{,}1923$	bb $+7{,}9518$	bc $-0{,}0306$	$\mathfrak{C}$ $+33{,}5$	cc $+18{,}0642$
$\lg \mathfrak{A} = 1{,}12057\, n$	$\lg aa = 1{,}07918$	$\lg ab = 0{,}77605 - 1$ $\lg \frac{ab}{aa} = 0{,}69687 - 2$ $\lg ab \frac{ab}{aa} = 0{,}47292 - 2$ $\lg ac \frac{ab}{aa} = 0{,}72267 - 1\, n$ $\lg \mathfrak{A} \frac{ab}{aa} = 0{,}81744 - 1\, n$	$\lg ac = 1{,}02580\, n$ $\lg \frac{ac}{aa} = 0{,}94662 - 1\, n$ $\lg ac \frac{ac}{aa} = 0{,}97242$ $\lg \mathfrak{A} \frac{ac}{aa} = 1{,}06719$	$\mathfrak{A} \frac{ab}{aa} = -0{,}6568$ $\mathfrak{B}.1 = 13{,}8491$	$ab \frac{ab}{aa} = 0{,}0297$ $bb.1 = 7{,}9221$	$ac \frac{ab}{aa} = -0{,}5280$ $bc.1 = 0{,}5586$	$\mathfrak{A} \frac{ac}{aa} = 11{,}673$ $\mathfrak{C}.1 = 21{,}827$	$ac \frac{ac}{aa} = 9{,}3847$ $cc.1 = 8{,}6795$
				$\lg \mathfrak{B}.1 = 1{,}14142$	$\lg bb.1 = 0{,}89884$	$\lg bc.1 = 0{,}74710 - 1$ $\lg \frac{bc.1}{bb.1} = 0{,}84826 - 2$ $\lg bc.1 \frac{bc.1}{bb.1} = 0{,}59536 - 1$ $\lg \mathfrak{B}.1 \frac{bc.1}{bb.1} = 0{,}98968 - 1$	$\mathfrak{B}.1 \frac{bc.1}{bb.1} = 0{,}9765$ $\mathfrak{C}.2 = 20{,}8505$	$bc.1 \frac{bc.1}{bb.1} = 0{,}3939$ $cc.2 = 8{,}2856$
$\lg \frac{\mathfrak{A}}{aa} = 0{,}04139\, n$ $\frac{\mathfrak{A}}{aa} = -1{,}1000$ $\mathrm{I} = 1{,}0472$		$\lg \mathrm{II} = 0{,}19610$ $\lg \frac{ab}{aa} \mathrm{II} = 0{,}89297 - 2$ $\frac{ab}{aa} \mathrm{II} = 0{,}0782$ $-2{,}1472$	$\lg \frac{ac}{aa} \mathrm{III} = 0{,}34741\, n$ $\frac{ac}{aa} \mathrm{III} = -2{,}2254$	$\lg \frac{\mathfrak{B}.1}{bb.1} = 0{,}24258$ $\frac{\mathfrak{B}.1}{bb.1} = 1{,}7481$ $\frac{bc.1}{bb.1} \mathrm{III} = 0{,}1774$ $\mathrm{II} = 1{,}5707$		$\lg \mathrm{III} \frac{bc.1}{bb.1} = 0{,}24905 - 1$	$\lg \mathfrak{C}.2 = 1{,}31912$ $\lg \mathrm{III} = 0{,}40079$ $\mathrm{III} = 2{,}5165$	$\lg cc.2 = 0{,}91832$

Setzt man die Werthe für I, II, III in die obigen Normalgleichungen, so entstehen bis auf einen Fehler von 0,0004 identische Gleichungen, woraus die Richtigkeit von I, II und III sich ergiebt.

Durch Substitution derselben in den Correlatengleichungen erhält man:

(1) = + 2,6180 Zehnsekunden	[1] = + 0,1558 Hundertstelruthen
(2) = — 1,0020	[2] = + 0,9154
(3) = — 1,0432	[3] = + 0,3735
(4) = — 2,7309	[4] = — 2,9297
(5) = — 2,7747	[5] = — 3,0021
(6) = — 2,8214	[6] = — 1,7939
(7) = — 2,6269	[7] = — 2,3870
(8) = — 1,8623	[8] = — 0,4701
(9) = — 1,1435	[9] = + 0,0449
(10) = — 0,8384	[10] = + 1,8667
(11) = — 0,1295	[11] = — 2,2144
(12) = + 1,0473	[12] = + 2,5165

Die verbefserten Winkel und Seiten sind demnach:

α_1 = 56°	30′	39,″18	s_1 =	251,0622
α_2 = 97	32	2, 98	s_2 =	26, 791
α_3 = 271	6	34, 57	s_3 =	118, 274
α_4 = 92	2	57, 69	s_4 =	18, 531
α_5 = 201	1	36, 25	s_5 =	6, 421
α_6 = 96	51	5, 79	s_6 =	25, 682
α_7 = 196	20	20, 73	s_7 =	78, 706
α_8 = 135	35	10, 38	s_8 =	49, 955
α_9 = 170	1	2, 57	s_9 =	21, 200
α_{10} = 138	5	10, 62	s_{10} =	67, 119
α_{11} = 271	2	15, 71	s_{11} =	122, 808
α_{12} = 73	51	3, 47	s_{12} =	205, 445
1799°	59′	59,″94		

Eine Vergleichung der hier für die ausgeglichenen Winkel erhaltenen Resultate mit denen im §. 309, ohne Anwendung der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen, zeigt zur Genüge, wie wenig das daselbst angegebene, sehr oft aber in der Praxis befolgte Verfahren zur Erzielung möglichst richtiger Resultate geeignet ist.

2. In dem Dreiecke 123 (Fig. 155) sind die 3 Winkel durch folgende, um die Verbefserungen vermehrte Beobachtungen bestimmt, nämlich

in 1: die Richtung 2 = 0
„ „ 3 = 68° 43′ 17″ + (1)

in 2: die Richtung $3 = 0$

„ „ $1 = 37^0\ 36'\ 40'' + (2)$

in 3: „ „ $1 = 0$

„ „ $2 = 73^0\ 39'\ 48'' + (3)$.

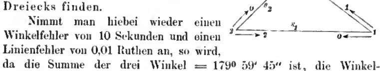
Aufserdem sind die Seiten

$s_1 = 200{,}^R00$

$s_2 = 194{,}^R20$

gemefsen; man soll die wahrscheinlichsten Werthe der Stücke des Dreiecks finden.

Fig. 155.



Nimmt man hiebei wieder einen Winkelfehler von 10 Sekunden und einen Linienfehler von 0,01 Ruthen an, so wird, da die Summe der drei Winkel $= 179^0\ 59'\ 45''$ ist, die Winkelgleichung

$$1{,}5 = (1) + (2) + (3)$$

entstehen. Aufserdem ist $s_1 = 20000$, $s_2 = 19420$ Hundertstelruthen zu setzen. Hinsichtlich der zu bildenden Seitengleichung wendet man den trigonometrischen Satz an, dafs

$$s_1 \sin \alpha_1 - s_2 \sin \alpha_3 = 0$$

ist.

$$\log s_1 = 4{,}3010300 + 217 \quad [1]\ ^{*)}$$
$$\log \sin \alpha_1 = 9{,}9693351 + \ 82_{10}\ (1)\ ^{**)}$$
$$\overline{4{,}2703651 + 217 \quad [1] + 82{,}0\ (1)}$$
$$\log s_2 = 4{,}2882492 + 223{,}5\ [2]$$
$$\log \sin \alpha_3 = 9{,}9821017 + \ 61{,}7\ (3)$$
$$\overline{4{,}2703509 + 223{,}5\ [2] + 61{,}7\ (3)}$$

also die zweite Bedingungsgleichung

$$-142{,}0 = 82\ (1) - 61{,}7\ (3) + 217\ [1] - 223{,}5\ [2].$$

Man erhält daher die Correlatengleichungen:

$$(1) = \mathrm{I} + \ 82{,}0\ \mathrm{II}$$
$$(2) = \mathrm{I}$$
$$(3) = \mathrm{I} - \ 61{,}7\ \mathrm{II}$$
$$[1] = \quad 217{,}0\ \mathrm{II}$$
$$[2] = \ -223{,}5\ \mathrm{II}$$

und hieraus dann die den allgemeinen Ausdrücken (N. 29)

$$\mathfrak{A} = (a\,a)\ \mathrm{I} + (a\,b)\ \mathrm{II}$$
$$\mathfrak{B} = (a\,b)\ \mathrm{I} + (b\,b)\ \mathrm{II}$$

*) Hinsichtlich der den Logg. der Seiten s_1 und s_2 hinzuzufügenden logarithm. Diff. mufs bemerkt werden, dafs immer die Diff. zu nehmen ist, welche der Log. der gegebenen Seite mit dem Log. der um 0,01 Ruthen kleineren oder gröfseren Seite bildet.

**) Hier ist nicht 8,20 (1), sondern 82 (1) wegen des angenommenen Winkelfehlers zu setzen.

entsprechenden Normalgleichungen

$$1{,}5 = 3\,\mathrm{I} + 20{,}3\,\mathrm{II}$$
$$-\,142{,}0 = 20{,}3\,\mathrm{I} + 107572{,}14\,\mathrm{II},$$

welche nach bekannter Weise nach den Formeln

$$bb\,.\,1 = bb - ab\,\frac{ab}{aa}$$
$$\mathfrak{B}\,.\,1 = \mathfrak{B} = \mathfrak{A}\,\frac{ab}{aa}$$
$$\mathrm{II} = \frac{\mathfrak{B}\,.\,1}{bb\,.\,1}$$
$$\mathrm{I} = \frac{\mathfrak{A}}{aa} - \frac{ab}{aa}\,\mathrm{II}$$

aufgelöst werden.

$\mathfrak{A} = 1{,}5$	$aa = 3$	$ab = 20{,}3$	$\mathfrak{B} = -142{,}0$	$bb = 107572{,}14$
$\lg \mathfrak{A} = 0{,}1760913$	$\lg aa = 0{,}4771213$	$\lg ab = 1{,}3074960$	$\mathfrak{A}\frac{bb}{aa} = 10{,}15$	$ab\frac{ab}{aa} = 137{,}3633$
$\frac{\mathfrak{A}}{aa} = 0{,}5$		$\lg \frac{ab}{aa} = 0{,}8303747$	$\mathfrak{B}\,.\,1 = -152{,}15$	$bb\,.\,1 = 107434{,}7767$
$\frac{ab}{aa}\,\mathrm{II} = -0{,}009583$		$\lg ab\frac{ab}{aa} = 2{,}1378707$	$\lg \mathfrak{B}\,.\,1 = 2{,}1822720\,n$	$\lg \frac{\mathfrak{B}\,.\,1}{bb\,.\,1} = 0{,}1511271-3\,n$
$\mathrm{I} = 0{,}509583$		$\lg \mathfrak{A}\frac{ab}{aa} = 1{,}0064660$		$\mathrm{II} = -0{,}0014162$
		$\lg \mathrm{II} = 0{,}1511271-3\,n$		
		$\lg \frac{ab}{aa} = 0{,}9815018-3\,n$		

Hieraus folgen dann die Verbefserungen:

(1) = + 0,3934 Zehnsekundenwerthe
(2) = + 0,5096 „
(3) = + 0,5970 „
[1] = − 0,3073 Hundertstelruthen
[2] = + 0,3165 „

daher sind die verbefserten Winkel:

$$\alpha_1 = 68^0\ 43'\ 20{,}''93$$
$$\alpha_2 = 37\ \ 36\ \ 45,\ 10$$
$$\alpha_3 = 73\ \ 39\ \ 53,\ 97$$
$$\text{Summe } 180^0\ \ 0'\ \ 0''$$

und die verbefserten Seiten:

$$s_1 = 199{,}^0969$$
$$s_2 = 194{,}^0232.$$

Anmerkung. Ueber andere Methoden, Aufgaben über Dreiecke auszugleichen, vgl. m. **Gerling** a. a. O.

Drittes Capitel.

Die Berechnung der Seiten und der Coordinaten der Winkelpunkte des Dreiecksnetzes.

§. 365.

Nachdem sämmtliche Winkel des Dreiecksnetzes gemefsen oder bestimmt sind, erfolgt die Ausgleichuug derselben nach der Methode der kleinsten Quadrate. Diese wird theils in der Ausgleichung der beobachteten Richtungen im Horizont der einzelnen Stationspunkte, theils in der Ausgleichung dieser Richtnngen in Bezug auf die mathematische Begründung des Dreiecksnetzes bestehen.

Kann man auf den einzelnen Dreieckspunkten die zu einer bestimmten Abtheilung des Netzes gehörigen anderen Dreieckspunkte in derselben Zahl wiederholt beobachten, wie es bei kleineren Dreiecksnetzen meistens der Fall sein wird, hier auch vorausgesetzt werden soll, so ist das arithmetische Mittel aller nach einem Punkte gemachten Beobachtungen der wahrscheinlichste Werth dieser Richtung. Diese Werthe, für jede Richtung desselben Standortes und für alle Standpunkte bestimmt, liefern dann die Data für die weitere Ausgleichung. Diese Resultate werden nur noch so umzuändern sein, dafs sie den Bedingungen des Dreiecksnetzes entsprechen, indem man alle diejenigen Dreiecke, in deren Eckpunkten alle Beobachtungen vollständig vorgenommen sind, zu einer Figur zusammenfafst und nun die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen nach den unter II. des vorigen Capitels angegebenen Regeln bestimmt. Daraus ergeben sich dann die wahrscheinlichsten Werthe für die Winkel jedes einzelnen Dreiecks des ganzen Netzes. Hat man aber, wie es bei der Aufnahme eines gröfseren Dreiecksnetzes meistens der Fall ist, aus irgend einem Grunde darauf verzichten müfsen, auf den einzelnen Standpunkten alle von ihnen aus sichtbaren Punkte immer zu beobachten, so werden zunächst wieder nach den Gleichungen N. 19 die Werthe für A, B, C.... bestimmt; diese würden dann auch die richtigen sein, sobald es nur darauf ankäme, aus den Beobachtungen auf einer Station die Resultate zu ermitteln. Wenn aber durch Beobachtungen auf mehreren Stationen ein zusammenhängendes Dreiecksnetz gebildet worden ist, welches Bedingungen enthält, die erfüllt werden müfsen, so gehen daraus auch nene Verbefserungen für A, B, C.... hervor. Dann werden die Summen (an), (bn), (cn).... der Gleichungen N. 19 ebenfalls Veränderungen erleiden, die im Zusammenhange mit den ersteren dargestellt werden müfsen. Hier soll aber von dieser Voranssetzung abstrahiert werden und dieser Fall erst im 2. Buche znr Sprache kommen.

§. 366.

Jetzt erst kann die Berechnung der Dreiecksseiten erfolgen, indem man mit dem Dreiecke, in welchem die Basis unmittelbar gemeſsen oder mittelbar bestimmt ist (§. 343), beginnt und die beiden anderen Seiten nach den im §. 305 angegebenen Formeln berechnet. Jede dieser Seiten, einem anderen Dreiecke angehörig, liefert dann wieder eine bekannte Seite, aus welcher die beiden anderen berechnet werden können. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man allmählich zur Kenntniſs der Längen sämmtlicher Seiten des Dreiecksnetzes. Hierbei kann etwa folgendes Schema zum Grunde gelegt werden.

Bezeichnung der Dreiecke	Namen der Stationen	Ausgezeichnete Winkel zur Berechnung			Gegeben ist	Gesucht wird	Trigonometrische Formel	Berechnung	Berechnete Seiten	
		Gr.	M	S.		Seite			Bez.	Länge Ruthen.

§. 367.

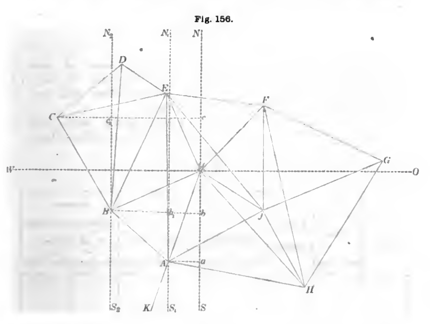
Fast immer wird es darauf ankommen, die trigonometrisch bestimmten Dreieckspunkte aufs Papier zu tragen. Um aber jeden Winkelpunkt unabhängig von den anderen verzeichnen zu können, befolgt man auch hier wieder die schon im §. 305 angegebene Methode, daſs man von jedem Winkelpunkte seine Coordinaten in Bezug auf ein gegebenes Coordinatensystem berechnet. Zur Abscissenachse dient hier nun die nach §. 344 durch den einen Dreieckspunkt M gelegte Mittagslinie; die zu dieser Linie, durch denselben Punkt gelegte Normale, stellt also die Ordinatenachse vor. Es werden demnach die Winkelpunkte der Dreiecke des Netzes, auſser M, in einem der vier Quadranten liegen und ist daher die Berechnung ihrer Coordinaten aus den bereits bekannten Dreiecksseiten möglich, wenn zugleich die Azimuthalwinkel derselben bekannt sind und diese nach einer bestimmten Richtung, z. B. vom Südpunkte aus durch Westen und Norden nach Osten von 0^0 bis 360^0 fortgezählt werden.

§. 368.

Die Azimuthalwinkel der Dreiecksseiten ergeben sich aber aus dem nach §. 345 unmittelbar gemeſsenen Azimuthalwinkel der Seite MA und den bekannten Winkeln der Dreiecke auf folgende Weise. Stellt

in Fig. 156 $ABCD\ldots$ einen Theil des Dreiecksnetzes einer Flur, NS die Mittagslinie, WO die Ordinatenachse, M den Anfangspunkt der Coordinaten vor und ist $AMS = A$ als Azimuth von MA unmittelbar gemefsen, so ergeben sich die Azimuthe aller der Seiten, die in M endigen, wie MB, ME, $MF\ldots$, sehr einfach; $BMS = A + BMA$, $EMS = A + BMA + BME$ u. s. w. Eben so lafsen sich nach §§. 303 und 304 die Azimuthe aller der Seiten leicht bestimmen, welche die Umfangsseiten des Polygons $ABC\ldots GHA$ bezeichnen,

Fig. 156.



sobald das Azimuth der einen Polygonseite, z. B. AB bekannt ist. Zieht man durch A die Linie $N_1 S_1 \mathrel{\#} NS$ und verlängert MA über A hinaus, so ist $KAS_1 = A$, $BAK = 180^0 - BAM$, folglich BAS_1 bekannt. Auf dieselbe Weise lafsen sich auch die Azimuthe aller der Dreiecksnetzseiten bestimmen, welche im Innern des Netzes liegen, wie z. B. von BE, $EJ\ldots$ da auch diese immer als einem Polygonumfange zugehörige Seiten angesehen werden können.

§. 369.

Die Berechnung der Coordinaten der Dreieckspunkte ergiebt sich nun sehr einfach. Für den Punkt A ist

$$Aa = MA \sin A,$$
$$Ma = MA \cos A;$$

für den Punkt B, wenn man $BMS = A_1$ setzt,

$$Bb = MB \sin A_1,$$
$$Mb = MB \cos A_1;$$

für den Punkt C, wenn man durch B die Parallele $N_2 S_2$ mit NS sich gezogen denkt und $CBS_2 = A_2$ setzt,

$$Cc_2 = BC \sin A_2,$$
$$Bc_2 = BC \cos A_2,$$

mithin
$$Cc = Cc_2 + Bb$$
$$Mc = Bc_2 - Mb$$

u. s. w.

Auch kann man für den Punkt B, da BAS_1 bekannt ist, noch Bb_1 und Ab_1 berechnen und erhält dann zur Sicherung vor einem Rechenfehler eine Probe für Bb und Mb. Auf diese Weise mufs auch für alle folgenden Winkelpunkte verfahren werden.

Die Vorzeichen der Coordinaten der Winkelpunkte werden sich von selbst aus dem Quadranten ergeben, welchem die betreffende Hypotenuse als Seite des Netzes zugehört.

Zur Berechnung kann etwa folgendes Schema dienen.

Azimuthal-winkel			Dreiecks-seiten		Winkel-punkte	Berechnung der						Berechnete			
						Ordinaten			Abscissen			Ordinaten		Abscissen	
												für den Ursprung M			
Gr.	M.	S.	Bez.	Länge Ruthen		Logg.	Vorz.	Länge Ruthen	Logg.	Vorz.	Länge Ruthen	Vorz.	Länge Ruthen	Vorz.	Länge Ruthen

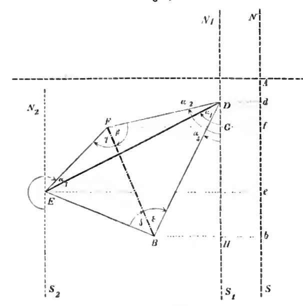
§. 370.

Aufgabe. Aus den bekannten Coordinaten der drei Winkelpunkte eines Dreiecks die Gröfse der Seiten und Winkel des letzteren zu berechnen.

Die Coordinaten des Punktes D (Fig. 157) seien in Bezug auf den Ursprung A, x_1 und y_1, die des Punktes F, x_2 und y_2 und die des Punktes E, x_3 und y_3. Zieht man durch D und E mit NS die Parallelen $N_1 S_1$ und $N_2 S_2$, so erhält man die Azimuthalwinkel der Seiten DE und DF durch die Ausdrücke



Fig. 157.



$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

woraus leicht eine bestimmte Regel abstrahiert werden kann.

Hieraus ergiebt sich dann ferner

$$DE = \frac{y_3 - y_1}{\sin \alpha_1} = \frac{x_3 - x_1}{\cos \alpha_1},$$

$$DF = \frac{y_2 - y_1}{\sin \alpha_2} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \alpha_2} \text{ und}$$

$$FDE = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Eben so erhält man $DES_2 = 180^0 - \alpha_1$ und auch $\widehat{FES_2} = \alpha_3 =$ dem Azimuthalwinkel der Seite EF, und hieraus wieder

$$DEF = 360^0 - (DES_2 + \widehat{FES_2}) = 180^0 + \alpha_1 - \alpha_3.$$

Da nun $$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3},$$

so ist $$EF = \frac{y_2 - y_3}{\sin \alpha_3} = \frac{x_2 - x_3}{\cos \alpha_3}$$

und $$DFE = 180^0 - (EDF + DEF) = \alpha_3 - \alpha_2.$$

Zusatz. Sind daher bei dem Problem der drei Punkte (§. 306) Statt der beiden Seiten AC und BC (Fig. 126) und des eingeschlofsenen Winkels die Coordinaten der drei Winkelpunkte gegeben, so kann man

nach der obigen Aufgabe aus den gegebenen Coordinaten die unbekannten Seiten und Winkel finden und dann weiter nach §. 306 verfahren.

§. 371.

Aufgabe. Aus den bekannten Coordinaten der Dreiecksseite DE, Fig. 157, und den Winkeln $FDE = D$ und $DEF = E$ die Coordinaten des dritten Winkelpunktes F zu bestimmen.

Wie im vorigen Paragraphen ist

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}, \quad DE = \frac{y_3 - y_1}{\sin \alpha_1} = \frac{x_3 - x_1}{\cos \alpha_1}.$$

Da nun in dem Dreieck DEF

$$DF = \frac{DE \cdot \sin E}{\sin F},$$

so erhält man

$$DF = \frac{(y_3 - y_1) \sin E}{\sin \alpha_1 \sin F} = \frac{(x_3 - x_1) \sin E}{\cos \alpha_1 \sin F}.$$

Weil ferner der Azimuthalwinkel von $DF = \alpha_1 + D$ ist, so ist, wenn die Coordinaten des Punktes F auf den Punkt D als Anfangspunkt bezogen werden,

$$FG = DF \sin(\alpha_1 + D), \; DG = DF \cos(\alpha_1 + D),$$

mithin auf den Punkt A bezogen,

$$x_2 = x_1 + \frac{(y_3 - y_1) \sin E \cos(\alpha_1 + D)}{\sin \alpha_1 \sin F} = \frac{(x_3 - x_1) \sin E \cos(\alpha_1 + D)}{\cos \alpha_1 \sin F},$$

$$y_2 = y_1 + \frac{(y_3 - y_1) \sin E \sin(\alpha_1 + D)}{\sin \alpha_1 \sin F} = \frac{(x_3 - x_1) \sin E \sin(\alpha_1 + D)}{\cos \alpha_1 \sin F}.$$

Auf ähnliche Weise kann man x_2 und y_2 auch aus EF ableiten.

Zusatz. Aus der Bestimmung der Winkel DEB und EDB würden daher auch die Coordinaten des Punktes B und dadurch die Lage der Geraden FB gegen die Dreiecksseite ED sich ergeben, also würde man für die Detailmeſsung eine neue Linie als Basis für andere zu bestimmende Punkte gewinnen.

Sind aber die Punkte E und D unzugänglich, dafür aber F und B zugänglich, so zeigt die folgende vom Prof. Hansen in die praktische Geometrie eingeführte Aufgabe, welche in Schumacher's astronomischen Nachrichten, Band 18, N. 419 gelöst sich findet, ebenfalls die Bestimmung der Punkte F und B und welche daher das Hansen'sche Problem (der zwei Punkte) genannt werden könnte.

§. 372.

Aufgabe. Wenn die Lage zweier unzugänglicher Punkte E und D (Fig. 157) durch ihre Coordinaten $Ad = x_1$, $Dd = y_1$, $Ae = x_3$ und $Ee = y_3$ gegeben ist, die Lage zweier anderer zugänglicher Punkte F und B zu bestimmen.

Die Punkte F und B werden offenbar in ihrer Lage bestimmt sein, wenn man deren Coordinaten $Af = x_2$, $Ff = y_2$, $Ab = x_4$ und $Bb = y_4$ kennt. Man mefse zu diesem Zwecke in F und B beziehungsweise die Richtungsunterschiede von FD, FB, FE, und von BE, BF und BD. Gleicht man dieselben nach Cap. 2 aus, so erhält man die wahrscheinlichsten Werthe für die Winkel β, γ, δ und ε. Man nehme ferner an, es sei nicht nur $DF = a$, $DB = b$, sondern es seien auch die Azimuthe dieser Linien, nämlich $FDS_1 = \alpha_2$ und $BDS_1 = \alpha_4$ bekannt, dann erhält man, da nach §. 370 aus x_1, y_1, x_3 und y_3 die Länge $DE = c$ und der Azimuthalwinkel $EDS_1 = \alpha_1$ berechnet werden kann, in den Dreiecken FED, EDB und BDF die fortlaufende Proportion:

$$a : c = \sin[(\gamma + \beta) + (\alpha_2 - \alpha_1)] : \sin(\gamma + \beta)$$
$$c : b = \sin(\delta + \varepsilon) : \sin[(\delta + \varepsilon) + (\alpha_1 - \alpha_4)]$$
$$b : a = \sin\beta : \sin\varepsilon$$

und hieraus

$$\sin[(\delta + \varepsilon) + (\alpha_1 - \alpha_4)] \,.\, \sin(\gamma + \beta) \,.\, \sin\varepsilon = \sin[(\gamma + \beta) + (\alpha_2 - \alpha_1)] \sin(\delta + \varepsilon) \,.\, \sin\beta.$$

Da nun ferner

$$FDB = (\alpha_2 - \alpha_4) = 180^0 - (\beta + \varepsilon)$$

also bekannt ist, so setze man

$$\alpha_2 - \alpha_4 = 2d,$$
$$\alpha_2 + \alpha_4 = 2s,$$

dann ist

$$\alpha_2 = s + d$$
$$\text{und } \alpha_4 = s - d.$$

Durch Substitution dieser Werthe in der obigen Gleichung erhält man also

$$\sin[(\delta + \varepsilon) + \alpha_1 - s + d] \,.\, \sin(\gamma + \beta) \,.\, \sin\varepsilon = \sin[(\gamma + \beta) + s + d - \alpha_1] \sin(\delta + \varepsilon) \,.\, \sin\beta.$$

Setzt man ferner zur Vereinfachung die bekannten Gröfsen:

$$(\delta + \varepsilon) + d + \alpha_1 = \zeta,$$
$$(\gamma + \beta) + d - \alpha_1 = \eta,$$

so erhält man für die letztere Gleichung:

$$\sin(\zeta - s) \,.\, \sin(\gamma + \beta) \,.\, \sin\varepsilon = \sin(\eta + s) \,.\, \sin(\delta + \varepsilon) \,.\, \sin\beta,$$

$$\text{oder } \frac{\sin(\gamma + \beta) \,.\, \sin\varepsilon}{\sin(\delta + \varepsilon) \,.\, \sin\beta} = \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin(\eta + s)}{\sin(\zeta - s)},$$

so dafs es demnach nur darauf ankommt, hieraus den Werth von s zu bestimmen.

Es ist

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\eta + \cos\eta \,.\, \operatorname{tg}s}{\sin\zeta - \cos\zeta \,.\, \operatorname{tg}s},$$

also

$$\operatorname{tg}\vartheta \sin\zeta - \operatorname{tg}\vartheta \cos\zeta \operatorname{tg}s = \sin\eta + \cos\eta \operatorname{tg}s,$$

oder

$$\operatorname{tg}\vartheta \sin\zeta - \sin\eta = \operatorname{tg}s (\cos\eta + \operatorname{tg}\vartheta \cos\zeta),$$

folglich $$\operatorname{tg} s = \frac{\operatorname{tg} \vartheta \sin \zeta - \sin \eta}{\operatorname{tg} \vartheta \cos \zeta + \cos \eta},$$
woraus sich s bestimmt.

Dann erhält man
$$\alpha_2 = s + [90^0 - \tfrac{1}{2}(\beta + \varepsilon)],$$
$$\alpha_4 = s - [90^0 - \tfrac{1}{2}(\beta + \varepsilon)],$$
ferner $$a = \frac{c \sin [(\gamma + \beta) + (\alpha_2 - \alpha_1)]}{\sin (\gamma + \beta)},$$
$$b = \frac{c \sin [(\delta + \varepsilon) + (\alpha_1 - \alpha_4)]}{\sin (\delta + \varepsilon)}$$
und daher
$$Af = x_1 + a \cos \alpha_2 = x_2,$$
$$Ff = y_1 + a \sin \alpha_2 = y_2,$$
$$Ab = x_1 + b \cos \alpha_4 = x_4,$$
und $$Bb = y_1 + b \sin \alpha_4 = y_4.$$

Anmerkung. Auch durch diese Aufgabe wird man in den Stand gesetzt, aus den durch die vorangegangene Triangulation bestimmten Dreieckspunkten eine beliebige Anzahl von anderen Linien festzulegen, die bei der Detailmefsung wieder zu Standpunkten benutzt werden können.

Viertes Capitel.

Die Aufnahme des Details mit Zugrundelegung des Dreiecksnetzes.

§. 373.

Nach dem Zwecke, den man mit der Aufnahme der Flur verbindet, mufs nicht nur das anzuwendende Verfahren, sondern auch die zu treffende Wahl des Mefswerkzeugs sich richten. Bei ökonomischen oder Cameral- (Kataster-) Aufnahmen wird es vorzugsweise auf die richtige Bestimmung der Gränzen der verschiedenen Culturarten ankommen, daher die Boussole wegen der geringen Genauigkeit, mit der sie das Mefsen der Winkel gestattet, im Allgemeinen zu verwerfen und nur anzuwenden ist bei der Aufnahme kleinerer Forsten, des Moor- und Heidebodens, des Umfanges kleinerer Seen, der Wege im Innern der Forsten u. s. w. Wo das Terrain eben und nicht sehr von Flüfsen, Morästen und hohem Gebüsch durchschnitten ist, läfst sich die Mefskette in Verbindung mit dem Winkelkreuz, Winkelspiegel, Prismenkreuz u. s. w. mit Vortheil anwenden, insbesondere also bei der Aufnahme kleiner Feldmarken. Da man bei militairischen Aufnahmen vorzugsweise die genaue Bestimmung der Unebenheiten der Erdoberfläche, des Laufs der Bäche und Flüfse und überhaupt der Hindernifse für die Bewegungen der verschiedenen Truppenarten und der Auf-

stellung des groben Geschützes im Auge haben mufs, so wird vorzugsweise der Mefstisch zur Anwendung kommen, da er den grofsen Vortheil darbietet, dafs alle bei der Aufnahme vorgefallenen kleinen Irrthümer sogleich sichtbar werden und daher an Ort und Stelle verbefsert werden können. Bei gröfseren Forstvermefsungen wird stets, da es sich hier um gröfsere Genauigkeit handelt, der Theodolith unter Anwendung der Umfangsmethode, und bei der Entwerfung von Uebersichtskarten etwa der Mefstisch in Verbindung mit der Boussole und der Mefskette anzuwenden sein. Eben so wird man auch bei gröfseren Feldmarken den Theodolith in Verbindung mit der Mefskette anzuwenden haben. Dagegen wird bei topographischen Aufnahmen, wobei es hauptsächlich auf die richtige Bestimmung einzelner Wohnhäuser und der Wohnörter, den Lauf der Ströme und Flüfse, weniger aber auf die ganz getreue Darstellung der Gränzen der einzelnen Culturarten ankommt, wieder der Mefstisch in Verbindung mit dem Distanzmefser, und für das kleinste Detail etwa die Boussole zur Anwendung kommen. Werden endlich mit der Aufnahme gröfserer Fluren noch specielle Zwecke verbunden, wie diefs bei der Anfertigung von Wafserbaurifsen, Nivellementsplänen u. dgl. der Fall ist, so mufs der geforderte Grad der Genauigkeit allein über die Wahl des Mefswerkzeugs entscheiden.

A. Die Aufnahme des Details mittelst des Theodolithen.

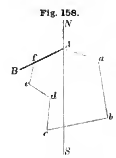
§. 374.

Man theilt die Flur in einzelne zusammenhängende Polygone, z. B. in Acker-, Wiesen-, Weide-, Waldflächen u. s. w., nimmt diese nach §. 309 auf und legt zur Aufnahme des kleineren Details durch die Polygone Bindelinien, um auf bekannte Art die im Innern vorkommenden Configurationen durch gemefsene Ordinaten und Abscissen auf jene Bindelinien oder die Polygonseiten zu beziehen. Damit aber nach der Aufnahme der Polygone ein möglichst fehlerfreies Auftragen ihrer Winkelpunkte durch die Coordinaten derselben möglich ist, also jede Polygonecke unabhängig von der anderen aufgetragen werden kann, müfsen zunächst nach §. 364, 1. die wahrscheinlichsten Werthe für die gemefsenen Winkel und Seiten jedes einzelnen Polygons bestimmt werden. Um dann aber die Coordinaten der Winkelpunkte in Bezug auf das Coordinatensystem des Dreiecksnetzes bestimmen zu können, ist die Lage mindestens zweier Winkelpunkte oder einer Seite jedes Polygons gegen die eine Seite des Dreiecksnetzes durch besondere Mefsungen zu bestimmen. Nur in einzelnen Fällen, wo es sich nicht um die gröfste Genauigkeit handelt, kann man von der

erwähnten Ausgleichung (§. 364, 1.) absehen, und dann nach dem im §. 309 angegebenen Verfahren sich Proben von der Richtigkeit der berechneten Coordinaten der Winkelpunkte verschaffen.

Hinsichtlich der erwähnten Festlegung können folgende Fälle unterschieden werden.

Fig. 158.



1) Fällt eine Polygonseite in die Richtung einer Dreiecksseite, wie in Fig. 158 Af des Polygons $Aabcdef$ auf AB, so ist keine weitere Mefsung erforderlich, sondern es können schon aus dem bekannten Azimuthalwinkel BAS die Coordinaten der Polygonwinkelpunkte in Bezug auf das Coordinatensystem des Dreiecksnetzes nach §. 309 bestimmt werden. Schliefsen sich an das genannte Polygon noch andere Polygone an, so wird auch jedes folgende sich durch das vorhergehende festlegen lafsen.

2) Es fällt nur ein Polygonwinkelpunkt mit einem Dreieckspunkte zusammen, wie A des Polygons $Aabc, \ldots$ in Fig. 159 auf den Dreieckspunkt A. Mifst man in A den Winkel BAf, so läfst sich aus dem gegebenen Azimuthalwinkel BAS der Azimuthalwinkel der Seite fA berechnen und es können dann, wie in 1., die Coordinaten der Polygonwinkelpunkte in Bezug auf das Coordinatensystem des Dreiecksnetzes berechnet werden.

Fig. 159.

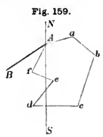
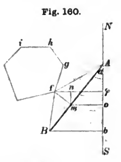


Fig. 160.



3) Keiner der Winkelpunkte des Polygons fällt in einen Winkelpunkt des Dreiecksnetzes oder eine Seite desselben.

a) Gestattet es das Terrain, von f in Fig. 160 auf AB eine Normale fm zu fällen, so mefse man ihre Länge, so wie Am. Aus den Coordinaten der Punkte A und B ergeben sich Ab und Bb; zieht man durch f die Normale $f\varphi$ auf NS und von m die Normalen mn und mo auf $f\varphi$ und NS, so ist nfm dem Azimuthalwinkel BAS gleich und daher

$$A o = A m \cos \alpha, \; m o = A m \sin \alpha,$$
$$f n = m f \cos \alpha, \; m n = m f \sin \alpha;$$

Da nun $A \varphi = A o - m n$, $f \varphi = f n + m o$ ist, so erhält man als Coordinaten des Punktes f, bezogen auf NS,

$$A \varphi = A m \cos \alpha - m f \sin \alpha,$$
$$f \varphi = m f \cos \alpha + A m \sin \alpha.$$

Bestimmt man demnach auf ähnliche Weise die Lage des Punktes g, so legt sich dadurch wieder das Polygon $f g h i \ldots.$ in Bezug auf das Coordinatensystem des Dreiecksnetzes fest.

b) Kann man aber von f keine Normale auf $A B$ fällen, so mefse man $f A$ und in A den Winkel $f A B$, so lafsen sich die Coordinaten von f wie in 2) finden. Auf dieselbe Weise läfst sich g bestimmen. Da nun aus den Coordinaten der Seite $f g$ der Azimuthalwinkel derselben gegen NS nach §. 371 berechnet werden kann, so ergiebt sich wieder die Festlegung der Polygonwinkelpunkte in Bezug auf das Coordinatensystem des Dreiecksnetzes.

c) Ist aber auch die Mefsung der Linie $f A$ oder $f B$ nicht möglich, so mefse man in A und B die Winkel $f A B$ und $f B A$; dann bestimmen sich die Coordinaten von f nach §. 371. Auf ähnliche Weise legt sich auch g fest, wodurch dann ebenfalls wieder die Möglichkeit der Festlegung der Polygonwinkelpunkte gegen das Coordinatensystem des Dreiecksnetzes sich ergiebt.

Diefs mag hinreichen, um zu zeigen, wie man auf verschiedene Weise die Polygonwinkelpunkte mit dem Dreiecksnetze in Verbindung bringen kann.

Anmerkung. Besonders in Beziehung auf Forstvermefsungen verweise ich den Leser auf die Anfangsgründe der Theodolithenmefsung und der ebenen Polygonometrie von G. Kraft. Hannover, 1865.

B. Die Aufnahme des Details mittelst des Mefstisches.

§. 375.

Man verzeichnet zunächst auf jede der Mefstischplatten, je nach ihrer Gröfse, ein Quadrat von etwa 18 bis 20 Zoll Seite, trägt auf die Seiten Längen von 20 bis 50 Ruthen des Mafsstabes und verbindet die gleichnamigen Punkte der Gegenseiten durch gerade Linien, so zerfällt die Mefstischplatte in lauter kleinere Quadrate. Die eine der grofsen Quadratseiten bezeichnet die durch den einen Dreieckspunkt gelegte Mittagslinie oder Abscissenachse, die andere damit rechtwinklicht verbundene die Ordinatenachse. Zum Auftragen der kleineren Quadratseiten bedient man sich zweckmäfsig eines eigens dazu construierten Federzirkels. (Vgl. H. g. I. Fig. 256.) Aus der Tafel der Coordinaten

der Dreieckspunkte (§. 369) trägt man in das Quadratnetz so viele der Dreieckspunkte mit der gröfsten Sorgfalt ein, als auf dem Ueberzuge Platz finden und bezeichnet sie mit den entsprechenden Namen, so sind diese Punkte die, welche dem Detailaufnehmer zur Grundlage dienen.

Vor Anfang der Detailaufnahme ist es sehr zweckmäfsig, zu untersuchen, welche Alignements rund herum jene Dreiecksnetzpunkte schneiden. Diese giebt man auf dem Rande des Ueberzuges an und bemerkt daselbst, oder in einem eigens dazu geführten Journale, ihre Beuennung. Da man nun im Allgemeinen annehmen kann, dafs wenigstens drei der Netzpunkte auf der Mefstischplatte sich finden, so werden zur Fortsetzung des Netzes die in §§. 313—322 angegebenen Aufgaben zur Orientierung des Mefstisches in Anwendung gebracht werden, indem nämlich 1) entweder jeder der Netzpunkte zugänglich ist, oder doch wenigstens zwei von ihnen es sind, oder 2) nur einer der Punkte zugänglich ist, oder 3) alle Punkte unzugänglich sind. In dem letzteren Falle wird man sich dann mit dem Mefstische *a*) in einer Linie zwischen ihren Endpunkten, oder *b*) in der Verlängerung derselben, oder *c*) nur aufserhalb der Linie zwischen jeden zwei Punkten aufstellen können. Bei dem Einschneiden neuer Punkte ist es zweckmäfsig, über die gezogenen Richtlinien ein Protokoll von folgender Einrichtung zu führen.

Standpunkt	Richtlinie	Geschnitten durch	Giebt den Punkt	Ist geprüft durch	Bemerkungen

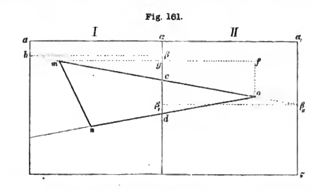
§. 376.

Bei der ersten Fortsetzung des Dreiecksnetzes mufs man im gebirgigen Terrain immer von den höher liegenden Punkten aus die tiefer liegenden, und eben so von Punkten des freien Terrains aus die des coupierten, durch die Methoden des Vorwärts-, Seitwärts- und Rückwärtseinschneidens bestimmen. Dabei legt man in jedem Standpunkte alle Begränzungen der Culturen, Wege, Flüfse u. s. w., so weit es durch gute Schnitte möglich ist, durch Vorwärtseinschneiden oder Vorwärtsvisieren und Mefsen fest, bestimmt aber bei topographischen Aufnahmen die zu mefsenden Entfernungen durch den Distanzmefser. Durch die Fortsetzung dieses Verfahrens werden sich dann schliefslich

alle Configurationen des Terrains bestimmen. Wege im Inneren der Wälder werden erst nach der Festlegung des Umfangs mit dem Meſstische oder der Bussole aufgenommen. In letzterer Beziehung bestimmt man deshalb gleich anfangs den Abweichungswinkel der einen Seite des Quadrates der Meſstischplatte.

Ist das Netz auf einer zweiten, dritten Platte fortzusetzen, und fällt dabei der Durchschnittspunkt zweier Richtlinien nicht mehr auf die Platte, auf welcher die letzteren liegen, so kann man denselben auf folgende Weise finden. Sind z. B. in Fig. 161 auf der Platte I von

Fig. 161.



m und n die beiden Richtlinien mo und no gezogen, die sich erst auf II in o schneiden, so verlängere man mc rückwärts bis b, mache auf II $\alpha\beta = ab$, $cd = cd$, $c\beta_1 = c\beta$, und $\alpha_1\beta_{11} = \alpha\beta_1$, so ist $c\beta_{11}$ die Verlängerung von Mc, wonach man also II orientieren und nun O durch Seitwärtseinschneiden mittelst des Punktes d bestimmen kann.

Wäre auf der Platte I der Punkt m, auf II der Punkt o gegeben, so denke man sich, um auf jeder derselben die Orientierungslinie mc und co zu bestimmen, durch m eine Parallele mf mit der Ordinatenachse $\alpha\alpha_1$ und durch o eine Parallele of mit der Abscissenachse $\alpha_1 s$ gezogen, dann ist, wenn α_1 als Ursprung der Coordinaten angesehen wird,

$$of = x_o - x_m,$$
$$mf = y_m - y_o,$$

$mg = mf - gf$, oder, wenn $\alpha\alpha_1 = q$ gesetzt wird, $mg = y_m - q$, folglich, da

$$gc : of = mg : mf,$$
$$cg = \frac{(x_o - x_m)(y_m - q)}{y_m - y_o},$$

mithin

$$\alpha c = cg + y_m,$$

welche Länge daher auf beide Platten getragen werden kann.

Ist eine Mefstischplatte vollgearbeitet, so zeichnet man das aufgenommene Detail bis zu einer Entfernung von einigen Linien von jeder Randlinie mit Tusche aus, die Ränder aber bleiben vorerst in Blei.

Auf die nämliche Weise verfährt man mit den anderen Mefstischplatten. Nach Vollendung Aller werden sie in ihrer richtigen Lage an einander geleimt, so zu einem Ganzen vereinigt und nun auch die Bleilinien an den Rändern mit Tusche nachgezogen.

§. 377.

Bei der Detailaufnahme einer Feldmark mittelst des Mefstisches, wobei aber ein Mafsstab von mindestens $\frac{1}{2000} - \frac{1}{3000}$ zu nehmen ist und der auch nur bei kleineren Feldmarken anzuwenden sein wird, legt man aus den Winkelpunkten des Dreiecksnetzes mehrere die Feldmark schneidende Linien, bakt dieselben von etwa 30 zu 30 Ruthen durch Pfähle aus, legt diese Linien, so wie die in ihnen liegenden Nummernpunkte durch Richtlinien und Auftragen der Entfernungen fest und benutzt die einzelnen Punkte zu neuen Standpunkten, um von ihnen aus Alles zu bestimmen, was sich bestimmen läfst. Zur Aufnahme des kleineren Details wendet man aufserdem auch die Mefskette an, bestimmt die krummlinichten Gränzen auch wohl durch Coordinaten.

Ueber die Anwendung der Boussole bei der Detailaufnahme ist schon im §. 373 das Nöthige bemerkt.

C. Aufnahme des Details mittelst der Mefskette in Verbindung mit dem Winkelkreuz, Winkelspiegel u. s. w.

§. 378.

Auf einem bergigen oder hügeligen Terrain stellen sich der unmittelbaren Linien- und Winkelmefsung mittelst der Mefskette so viele Schwierigkeiten entgegen, dafs man gewifs, wenigstens zur Aufnahme mancher Polygone, in welche die Flur durch das Dreiecksnetz zerfällt ist, eines winkelmefsenden Werkzeugs sich bedienen wird. Es soll aber hier nur auf solche Feldmarken oder Fluren Rücksicht genommen werden, bei denen der ausschliefsliche Gebrauch der Mefskette und des Winkelkreuzes gestattet ist.

Gewöhnlich unterscheidet man bei jeder Feldmark wegen der durch verschiedenen Boden, die Lage des Dorfes, Kunststrafsen, Forstgrund u. s. w. bewirkten Scheidungen, 2 bis 3 gröfsere Abtheilungen, Felder, so wie wieder jede derselben durch die sie durchziehenden Feld- und andere Wege in kleinere Abschnitte zerfällt, welche man Gewannen, Wannen nennt. Bei der Aufnahme des Dreiecksnetzes mufs deshalb auf diese letzteren Sectionen insofern Rücksicht genommen

werden, dafs jede derselben wenigstens einen, wo möglich aber zwei Dreieckspunkte enthält. Kommt es nun bei der Aufnahme der Feldmark nur auf die Bestimmung der totalen Gröfse jeder der Gewannen an, indem schon durch vorhandene Lagerbücher die Gröfse der darin liegenden Parcellen bekannt ist, so bleibt die Triangularmethode, wie sie in §§. 330 u. f. angegeben ist, aus den daselbst bemerkten Gründen die zweckmäfsigste. Man hat dann bei der Aufnahme jeder Gewanne nur darauf zu sehen, dafs einige der Seiten der abgesteckten Dreiecke mit denen des Dreiecksnetzes in eine Richtung fallen.

Ist aber der Inhalt jeder Parcelle besonders zu bestimmen, so ist das im §. 335 angegebene Verfahren anzuwenden, indem man auf einem Theile der Flur ein gröfseres Viereck absteckt, so dafs wenigstens eine Seite desselben durch zwei Punkte des Dreiecksnetzes geht und dann durch Querlinien die Durchschnitte mit den einzelnen Furchen u. s. w. bestimmt.

Die krummlinichten Gränzen der Culturarten, Feldwege, Bäche u. s. w. werden, wie früher angegeben, durch Coordinaten festgelegt.

Das Dorf selbst mit seinen Gärten läfst sich am zweckmäfsigsten mit einem Winkelmefser und der Mefskette nach den im 2. und 3. Capitel angegebenen Regeln bestimmen, wobei dann die Lage der Gassen gegen einander und die Umgebungen die Anwendung der einen oder anderen der dort angegebenen Methoden vorschreiben wird.

Anmerkung. Ausführlichere Beschreibungen des hier nur angedeuteten Verfahrens über die Aufnahme der Feldmarken findet man u. a. in Umpfenbach's praktischer Geometrie I. Frankfurt a. M. 1834, S. 229 u. f. und Hogreve's praktischer Anweisung zum planimetrischen Vermefsen der Feldmarken. Hannover, 1835.

Fünfter Abschnitt.

Die Verticalmefsungen.

§. 379.

Bei allen in den vorigen Abschnitten angegebenen Methoden des Mefsens kam es nur auf die Bestimmung der Horizontalprojection (§. 3) kleinerer oder gröfserer Fluren, nicht aber auf die absolute Lage der Punkte derselben, d. h. auf ihre senkrechte Entfernung von einer angenommenen Horizontalebene an. Weil aber die Projection eines Punktes auch die Projection aller in der zugehörigen projicierenden Linie liegenden Punkte ist, so ist durch die Horizontalprojection einer

Flur die absolute Lage ihrer Punkte noch völlig unbestimmt. Soll demnach die Gestalt der unebenen Erdoberfläche dargestellt werden, wie diefs u. a. bei Strafsen- und Eisenbahnanlagen, bei Projecten von Wafserleitungen u. s. w. gefordert wird, so wird auch noch die Bestimmung der senkrechten Entfernung, d. h. der Höhe, gegebener Punkte der Erdoberfläche über einer angenommenen Horizontalebene nothwendig. Bei diesen Höhenbestimmungen unterscheidet man die absolute Höhe eines Gegenstandes von der relativen. Die erstere bezeichnet den senkrechten Abstand des höchsten Punktes von seiner Grundfläche, die letztere den von einer, durch einen andern Punkt gelegten Horizontalebene, z. B. der Oberfläche des Meeres. Bei Verticalmefsungen wird bald die absolute, bald die relative Höhe eines Objects gesucht.

Im §. 170 ist schon auf den Unterschied der mit den Höhen- oder Höhen- und Azimuthalinstrumenten ausgeführten trigonometrischen Höhenmefsungen und dem Bestimmen der Höhenunterschiede gegebener Punkte mittelst der Nivellierinstrumente, oder dem Nivellieren aufmerksam gemacht. Es mag hier noch bemerkt werden, dafs das Barometer ebenfalls zu Höhenmefsungen angewandt werden kann und auch das Abstecken und Mefsen von Horizontalcurven zur geometrischen Aufnahme der Berge einen Gegenstand der Verticalmefsungen bilden mufs.

Erstes Capitel.

Das Nivellieren.

§. 380.

1. Bezeichnen A und B in Fig. 162 zwei Punkte auf der Oberfläche der Erde, C den Erdmittelpunkt und beschreibt man aus C mit CA einen Kreisbogen, welcher die Verlängerung von CB in D schneidet, so wird der Unterschied zwischen CA und CB, nämlich BD das Gefälle von A bis B genannt. Ist A weiter von C entfernt, als B, so sagt man, das Terrain von A bis B hat wirkliches Gefälle oder hat Fallen; ist aber $CB > CA$, so wird das Gefälle negativ genannt und man sagt, das Terrain von A bis B hat Steigen.

Da aber mittelst der Nivellierwerkzeuge nicht der wahre Horizont AD, sondern der scheinbare Horizont AH (§. 170) durch die horizontale Visierlinie des Fernrohrs hergestellt und an der in B errichteten Nivellierlatte bestimmt wird, so wird BD sich bestimmen lafsen, wenn man aufser der abzulesenden Zielhöhe BF, noch FD kennt. Man nennt diesen, beim Nivellieren immer im landesüblichen Mafse dargestellten, Zahlenwerth die Erhöhung des scheinbaren

Horizonts über dem wahren. Bei Höhenwinkeln, welche in A gemeſsen werden, muſs daher der gemeſsene Höhenwinkel, um die wahre Höhe zu bestimmen, immer um den Winkel HAD, d. h. um $\frac{1}{2}C$ vermehrt werden.

Fig. 162.

Dieser Correctionswerth wird dann auch wohl die Correction wegen der Krümmung der Erde genannt.

§. 381.

Aufgabe. Aus der bekannten Entfernung zweier Oerter A und B und dem Erdhalbmeſser die Correction wegen der Krümmung der Erde zu bestimmen.

Bezeichnet man den Erdhalbmeſser durch r, den zu bestimmenden Zahlenwerth für FD durch h und die Entfernung AB, wofür ohne Fehler auch AF genommen werden kann, durch d, so ist in dem Dreieck AFC

$$r + h = \sqrt{r^2 + d^2} = r\sqrt{1 + \frac{d^2}{r^2}} = r\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{r^2} - \frac{1}{8}\,\frac{d^4}{r^4} + \ldots\right)$$

oder

$$h = \frac{d^2}{2r} - \frac{d^4}{8r^3} + \ldots,$$

wofür aber immer als Correctionswerth beim Nivellieren

$$h = \frac{d^2}{2r}$$

als völlig ausreichend genommen werden kann.

§. 382.

Aber nur bei kürzeren Entfernungen erscheint in dem in A gedachten Fernrohre der Punkt F auf der Nivellierlatte wirklich in der horizontalen Visierlinie AH; bei längeren Entfernungen dagegen und bei dem gewöhnlichen Zustande der Atmosphäre wird wegen der Refraction ein in dem scheinbaren Horizonte gesehener Punkt F unter demselben, etwa in E liegen, weshalb noch der Werth für EF und hieraus dann der Gesammtcorrectionswerth für ED bei der Mefsung eines Gefälles zu bestimmen ist. Da nun nach §. 248 $EAF = 0{,}0653\,C$ und wegen der Kleinheit der bei A liegenden Winkel

$$FE : FD = 0{,}0653\,C : \tfrac{1}{2}\,C,$$

folglich

$$FE = 0{,}1306\,\frac{d^2}{2r} \text{ ist,}$$

so ist die bei dem gefundenen Gefälle unter Berücksichtigung der Krümmung der Erde und der Refraction anzubringende Gesammtcorrection

$$c = \frac{d^2}{2r} - 0{,}1306\,\frac{d^2}{2r} = 0{,}4347\,\frac{d^2}{r},$$

welche daher, weil das steigende Terrain gemefsenen Elevationswinkeln, das fallende aber Depressionswinkeln entspricht, beim Steigen additiv, beim Fallen subtractiv zu nehmen ist.

Nimmt man den mittleren Halbmefser = 21795294 Hannoversche Fufs an, so erhält man folgende Tabelle über die Höhencorrection beim Nivellieren.

Länge der Station	Correction in Hannoverschen Linien	
Ruthen	für 1 Ruthe = 2304''' *)	für 1 Ruthe = 1600''' **)
10	0,074	0,051
20	0,294	0,204
30	0,662	0,46
40	1,176	0,817
50	1,838	1,276
60	2,647	1,838
70	3,603	2,502
80	4,706	3,268
90	5,955	4,136
100	7,352	5,106

*) Für eine Nivellierlatte, auf welcher der Werkfufs, deren 16 eine Ruthe bilden, in 12 Zoll und jeder Zoll in 12 Linien getheilt ist.

**) Für eine Latte, auf welcher der Fufs in Zehntel- und Hundertstelfufs getheilt ist.

Ist der anszumittelnde Höhenunterschied zweier Punkte und zugleich ihre Entfernung von eiuander so gering, dafs er sich schon durch die horizontale Visierliuie einer einzigen Station bestimmen läfst, so nennt man das Nivellement ein einfaches; werden aber dazu aus dem einen oder anderen Gruude mehrere Stationen erfordert, so uennt man es ein zusammengesetztes. Letzteres ist nur ein wiederholtes Verfahren des ersteren.

In der Ausführung des Nivellierens unterscheidet man zwei Methoden: das Nivellieren aus den Endpunkten (das Vorwärts-Nivellieren) und das Nivellieren aus der Mitte.

1. Das Nivellieren aus den Endpunkten.

§. 383.

Es werde hierbei ein zusammengesetztes Nivellement vorausgesetzt. Man zerlege die gegebene Nivellementslinie so viel als möglich in Stationen von gleicher Länge, die aber wieder nach der verschiedenen Beschaffenheit und Güte des Niveau's eine verschiedene sein wird und bezeichne die Endpunkte der Stationen, wenn sie sonst nicht anderweit schon bezeichnet sind, durch in den Erdboden getriebene Pfähle mit abgeebneten Köpfen von etwa 4 Quadratzoll Fläche.

Wenugleich das Niveau als vollständig berichtigt angesehen werden mufs, so ist doch vorzugsweise bei dem Fernrohr das Zusammenfallen des Bildes der Latte mit der Ebene des Fadenkreuzes und bei letzterem die genaue Horizontalität des Horizontalfadens nochmals zu untersuchen und erforderlichen Falls herzustellen. Um die Höhen des Niveau's über den Standpunkten mit möglichster Genauigkeit mefsen zu können, mufs man dem Stativ desselben eine solche Stellung geben, dafs nach vorläufiger richtiger Einstellung des Fadenkreuzes des Fernrohrs auf die in dem anderen Endpunkte errichtete Nivellierlatte, die Vorderfläche des Oculars lothrecht über der Kopffläche des Pfahls liegt. Um ferner auch nach erfolgter Aufstellung des Niveau's und Einstellung seines Fernrohrs, noch kleine Verbefserungen in der Stellung der Luftblase der Libelle mit Leichtigkeit und Sicherheit ausführen zu können, mufs man bei den unter A. (§§. 173 u. f.) beschriebenen Instrumenten, der Horizontalstellungsvorrichtung auf dem Stativ eine solche Lage geben, dafs die eine Stellschraube derselben genau in der Richtnng der Stationslinie liegt.

Nach diesen Berücksichtigungen stellt man nun bei den Niveaux der Abtheilung A. den Verticalzapfen durch die Stellschrauben der Horizontalstellungsvorrichtung genau, bei den Niveaux der Abtheilung *B* die Verticalachse, um welche sich der bewegliche Theil dreht, annähernd

ein und bringt nun, nachdem das Fernrohr auf die in dem anderen Endpunkte senkrecht aufgestellte Latte gerichtet ist, mit der einen Stellschraube in dem ersten Falle, mit der Elevationsschraube in dem anderen, die Luftblase der Libelle zum Einspielen. Dann läfst man bei den Latten mit Scheiben, letztere nach der Visierlinie des Fernrohrs von dem Gehülfen einstellen und von ihm ablesen; bei den Latten ohne Scheiben aber wird die Höhe unmittelbar abgelesen. Wie schon im §. 176 erwähnt ist, kann man bei der ersten Art der Nivellierlatten die Scheibe nach jeder Einstellung und Ablesung etwas verschieben und aufs Neue einstellen und ablesen lafsen, um dann von den verschiedenen Resultaten, falls ihre Verschiedenheit nur den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden kann, das arithmetische Mittel z_1 zu nehmen. Mifst man nun noch die Instrumenthöhe i_1 bis zur Mitte des Ocularglases, so ist, wenn man durch $1\,G\,2$ das Gefälle von dem Punkte 1 (als Anfangspunkte) bis zum Punkte 2 bezeichnet, und c_1 den nach der Tabelle des vorigen Paragraphen bestimmten additiven oder subtractiven Werth darstellt, je nachdem der Endpunkt 2 beziehungsweise höher oder tiefer als der Anfangspunkt 1 liegt, oder je nachdem $z_1 \lessgtr i_1$ ist, d. h. $z_1 - i_1$ einen negativen oder positiven Werth giebt,

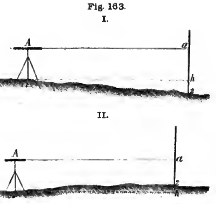
$$1\,G\,2 = z_1 - i_1 + c_1.$$

Denn in Fig. 163 I. u. II. ist ohne Berücksichtigung der Correction

$$1\,G\,2 = 2\,h = 2\,a - a\,h = z_1 - i_1$$

und $$1\,G\,2 = 2\,h = a\,h - 2\,a = -(z_1 - i_1).$$

Fig. 163.



Auf dieselbe Weise erhält man nun:

$$2\,G\,3 = z_2 - i_2 + c_2.$$
$$3\,G\,4 = z_3 - i_3 + c_3.$$
. . . .

Es ist also allgemein:

$$1\,G\,n = (z_1 + z_2 + z_3 + \ldots) - (i_1 + i_2 + \ldots) + (c_1 + c_2 + \ldots),$$

d. h. man findet das Gefälle zwischen zwei beliebigen Punkten, wenn man von der Summe der Latten- oder Zielhöhen die Summe der Instrumenthöhen subtrahiert und mit dem Reste die Summe der Correctionen als additiven oder subtractiven Werth verbindet.

2. Das Nivellieren aus der Mitte.

§. 384.

Auch bei dieser Methode des Nivellierens wird die gegebene Nivellementslinie, soweit es die Beschaffenheit des Terrains gestattet, in Stationen von gleicher Länge, der Güte des Niveau's entsprechend, zerlegt; eben so werden die Endpunkte derselben ebenfalls durch Pfähle bezeichnet. Selbstverständlich geht auch die richtige Einstellung der Ocularblendung und die des Fernrohrs auf die Latte u. s. w. dem Nivellieren voran.

Ist nun die erste der zu nivellierenden Stationen die in Fig. 164 I. II. und III. bezeichnete Station 1 2, so stelle man sich mit dem Niveau in der Mitte B derselben auf und bestimme wie im vorigen Paragraphen die Zielhöhe auf den in 1 und 2 errichteten Nivellierlatten $1 . a = z_1^r$ und $2 . \alpha = z_1^v$, so ist das Gefälle zwischen 1 und 2

$$1\,G\,2 = z_1^v - z_1^r$$

und zwar positiv oder negativ, je nachdem $z_1^v \gtrless z_1^r$ ist. Denn denkt man sich in Fig. 164 I. durch 1 die Horizontale $1\,\beta$ gezogen, so ist

$$1G2 = \beta . 2 = 2 . \alpha - 1 . a.$$

Liegen, wie in II. beide Endpunkte der Station höher, als der Stationspunkt B, so ist

$$1G2 = 2 . \beta = 2 . \alpha - 1 . a.$$

Dasselbe zeigt sich in III., wenn 1 und 2 tiefer als B liegen.

Fig. 164.

I.

II.

III.

Bestimmt man nun auf dieselbe Weise das Gefälle der zweiten und jeder folgenden Station, so erhält man:

$$2\,G\,3 = z_2^v - z_2^r$$
$$3\,G\,4 = z_3^v - z_3^r$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

und daher allgemein

$$1\,G\,n = (z_1^v + z_2^v + z_3^v + \ldots) - (z_1^r + z_2^r + z_3^r + \ldots)$$

d. h. man erhält das Gefälle zwischen zwei beliebigen Punkten, wenn man von der Summe der vorderen Zielhöhen die Summe der rückwärts genommenen subtrahiert.

§. 385.

Die Methode des Nivellierens aus der Mitte bietet in mehrfacher Hinsicht Vortheile gegen das Nivellieren aus den Endpunkten dar.

1. Hängt die Bestimmung des Gefälles nicht von der Mefsung der Instrumenthöhe ab, welche, wenn nicht die im §. 383 erwähnte Vorsichtsmafsregel bei der Aufstellung des Niveau's befolgt wird, oft nur annähernd richtig auszuführen ist.

2. Wird ein noch vorhandener Fehler in dem geforderten Parallelismus der Libellenachse mit der Visierlinie des Fernrohrs, da die Visierlinien nach den Endpunkten 1 und 2 gleich sind, sich aufheben; in Bezug auf den erwähnten Fehler kann man daher mit einem nicht fehlerfreien Niveau eben so richtig nivellieren, als mit einem fehlerfreien.

3. Bedarf man der im §. 382 erwähnten Correction nicht. Denn liegt, wie in Fig. 164 I. der eine Endpunkt der Station höher, der andere tiefer, als der Standpunkt, so ist die Correction für den ersteren additiv, für den anderen subtractiv. Denkt man sich nämlich durch B die Horizontale Bb gezogen und bezeichnet die Specialgefälle zwischen dem Standpunkte B und den Endpunkten 1 und 2 beziehungsweise durch g_1 und g_2, so ist

$$1\,G\,2 = g_1 + c + g_2 - c = g_1 + g_2 = \beta b + b\,2 = 2\,\alpha - 1\,a$$

wie im vorigen Paragraphen. Liegen aber auch beide Endpunkte der Station höher, wie in Fig. 164 II. oder tiefer, wie in Fig. 164 III., so ist zwar im ersten Falle der Correctionswerth c für beide Visierlinien additiv, im zweiten subtractiv, allein wenn man wieder durch B sich die Horizontale Bb gezogen denkt, so setzt sich das Gefälle $1\,G\,2$ aus der Differenz der Specialgefälle g_1 und g_2 zusammen, und daher wieder $(\pm c) - (\pm c) = 0$.

4. Darf auch nicht unerwähnt bleiben, dafs man bei einmaligem Aufstellen des Niveau's doppelt so lange Stationen nehmen kann, und dabei auch, bei den unter A (§. 173 u. f.) beschriebenen Apparaten wenigstens, da nur ein einmaliges Einstellen der Luftblase der Libelle erfordert wird, von dem etwaigen Visierfehler, wegen des Visierens nach entgegengesetzten Richtungen, ein Aufheben desselben angenommen werden darf.

Man wird deshalb die Methode des Nivellierens aus der Mitte der Stationen überall anwenden, wo es zuläfsig ist. Dabei ist auch noch zu beachten, dafs es nicht erforderlich ist, sich genau in der Stationslinie aufzustellen, sondern dafs es hinreicht, wenn der Standpunkt in einer Normalen liegt, welche in der Mitte der Station nach der einen oder anderen Seite derselben errichtet ist.

Die Nivellementstabellen.

§. 386.

Die Schemata für die Nivellementstabellen haben insofern eine mehr oder weniger verschiedene Einrichtung, als man das Nivellieren aus dem Endpunkte, oder das aus der Mitte der Station, oder je nachdem man die unter *A* (§. 173 u. f.) und *B* (§. 185 u. f.), oder die in den §§. 190 bis 192 aufgezählten Nivellierinstrumente anwendet, oder endlich, als man theils durch die Natur der anzuwendenden Instrumente, theils durch die Beschaffenheit des zu nivellierenden Terrains, gezwungen ist, von einem Standpunkte aus immer nur eine Station zu nivellieren, oder mehrere in derselben Richtung liegende Punkte einer Stationslinie nivellieren kann, wie letzteres Verfahren bei der Anwendung der Libellenniveaux bei der Anlage von Strafsen, Eisenbahnen, Kanälen u. s. w. meistens gefordert wird.

§. 387.

Das Schema für das Nivellieren aus dem Endpunkte der Station fordert:

a. Zwei Columnen für die Nummer der Nivellementspfähle der Endpunkte und eine dritte für die Länge der Stationen. Letztere gelten bei dem Nivellieren nach verschiedenen Punkten derselben Station immer bis zu dem Punkte, in welchem die Nivellierlatte errichtet ist.

b. Eine Columne für die Zielhöhe, die auch wohl durch die Ueberschrift „Vorwärts“ bezeichnet wird, und

c. eine Columne für die Instrumenthöhe.

Die dann noch folgenden Columnen dienen für die Berechnung des unverbefserten Gefälles aus den Columnen b. und c.; für die mit dem Vorzeichen anzubringenden Correctionswerthe (§. 382); für die verbefserten Gefälle, welche letztere beide aber selbstverständlich wegfallen, wenn die geringe Länge der Stationen keine Correction erfordert; und endlich für die Angabe der Ordinaten unter der Haupthorizontale. Diese Columnen sind nur in dem ersten und zweiten Schema ausgefüllt, in jedem der anderen aber weggelafsen.

Nivellementpfähle der Station.		Länge	Zielhöhe	Instrument-höhe	Gefälle		Correction		Verbessertes Gefälle		Ordinate über oder unter Null	Bemerkungen.
Von	Nach	Ruthen	Fuſs	Fuſs		Fuſs		Linien		Fuſs	Fuſs	
0											50,0	
0	1	50	8,34	4,32	+	4,02	−	1,3	+	4,01	54,01	
1	2	60	2,12	4,45	−	2,33	+	1,8	−	2,35	51,66	
2	3	50	14,06	4,38	+	9,68	−	1,3	+	9,67	61,33	
3	4	50	10,82	4,27	+	6,55	−	1,3	+	6,54	67,87	
4	5	40	7,58	4,30	+	3,28	−	0,8	+	3,27	71,14	
5	6	50	3,70	4,52	−	0,82	+	1,3	−	0,83	70,31	
6	7	30	8,52	4,42	+	4,10	−	0,5	+	4,09	74,40	
.....	.....	.....	.....	.....	...	.....	...	.....	...	.....	.....	
0											50,00	
0	1	10	5,78	5,12	+	0,66			+	0,66	50,66	
	2	5	6,22		+	1,10			+	1,10	51,76	
	3	5	7,45		+	2,33			+	2,33	54,09	
	4	10	6,05		+	0,93	−	0,5	+	0,92	55,01	
	5	10	6,34		+	1,22	−	0,8	+	1,21	56,22	
	6	5	6,12		+	1,00	−	1,1	+	0,99	57,21	
	7	5	7,32		+	2,20	−	1,3	+	2,19	59,40	
7	8	10	8,45	5,02	+	3,43	−	1,8	+	3,41	62,81	
	9	10	4,72		−	0,30			−	0,30	62,51	
	10	5	3,01		−	2,01			−	2,01	60,50	

§. 388.

Die Schemata für das Nivellieren aus der Mitte der Station unterscheiden sich im Wesentlichsten dadurch von denen für das Nivellieren aus dem Endpunkte, dafs die Stations- oder Standpunkte des Instruments nur dann besonders bemerkt werden müfsen, wenn von ihnen aus mehrere in derselben Richtung liegende Punkte zu nivellieren sind und dafs für die Rubrik „Instrumenthöhe" die Columne „Rückwärts" substituiert wird, aufserdem auch nach §. 385 die Columnen für die Correction und das verbefserte Gefälle wegfallen.

Schema für das Nivellieren mit den gewöhnlichen Libellenniveaux oder den Röhren-Nivellierinstrumenten.

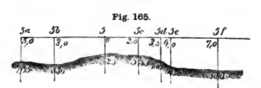
Stationspunkt	Rückwärts. Nach Nivellementspfahl		Vorwärts. Nach Nivellementspfahl		Länge der Station von der Mitte aus.	Bemerkungen.
№	№	Fufs	№	Fufs	Ruthen	
	0	8,23	1	10,54	30	
	1	15,47	2	5,82	30	
	2	2,75	3	10,23	30	
	3	5,82	4	8,95	40	
	4	7,31	5	7,32	40	
	5	10,08	6	9,56	40	
	...	...	...	...	....	
	21	7,62			50	
	22	9,32			40	
	23	10,82			30	
	24	13,09			20	
25			26	5,41	20	
			27	6,81	30	
			28	7,23	40	
			29	8,86	50	

§. 389.

Für die Quernivellements (§. 390) bedient man sich zum Eintragen der gemefsenen Gröfsen nicht immer eines für die Längennivellements analog eingerichteten Schema's, sondern trägt mit Bemerkung des Stationspunktes, durch welchen das Querprofil gelegt ist, und der Höhe des Standpunktes des Instruments, sowohl die Längen, als die Höhen für die in dem Querprofil liegenden Punkte in eine nach dem Augenmafs entworfene Zeichnung ein, wie diefs Fig. 165 erläutert.

Den Stationspunkt wird man wo möglich aufserhalb der Quernivellementslinie und zwar gern so wählen, dafs von ihm aus die auf

Fig. 165.



den zu nivellierenden Punkten aufgestellten Latten zur Ablesung der Höhen benutzt werden können. Selbstverständlich ist dann auch die Höhenlage des Stationspunktes gegen den Punkt der Längenachse zu bestimmen, durch welchen die Quernivellementslinie gelegt ist. In fast allen Fällen wird man aber hierbei nur die Methode des Nivellierens aus dem Endpunkte anwenden können, daher das Niveau vollständig berichtigt sein mufs.

§. 390.

Jedes Nivellement mufs nicht nur bei einem festen unabänderlichen Punkte, z. B. einem Brückenpfeiler, einem Baume, einem Gränzsteine u. s. w. anfangen und schliefsen, sondern es mufs auch in seinem Verlaufe an solche Punkte sich anschliefsen. In der Nivellements-Tabelle ist dann der Höhenunterschied solcher Punkte gegen den Anfangspunkt zu bestimmen. Welche andere Zwischenpunkte aber zu nivellieren und in welchen Entfernungen von einander sie zu wählen sind, hängt nicht nur von dem Zwecke des Nivellierens, sondern auch von der Vollkommenheit des anzuwendenden Niveau's und der Beschaffenheit des Terrains ab, weshalb hier, da für alle verschiedene Zwecke das geometrische Verfahren des Nivellierens dasselbe bleibt, auch keine speciellen Anleitungen für das Nivellieren der Strafsen und Eisenbahnen, der Kanäle, der Ströme und Flüsse gegeben werden, sondern nur noch einige allgemeine Bemerkungen über verschiedene Ausführungen folgen sollen *).

1. Gewöhnlich wird vor den Strafsen- und Eisenbahnanlagen, den Flufsregulierungen u. s. w. eine vorläufige Angabe über die Richtung des zu nehmenden Weges und eine allgemeine Kenntnifs der Terrainpunkte gegen einander gefordert. Bei diesen generellen Nivellements kann man die Stationen meistens sehr grofs nehmen und braucht hinsichtlich der Höhenbestimmungen hauptsächlich nur solche Punkte zu berücksichtigen, die für den beabsichtigten Zweck von Wichtigkeit sind. Gewöhnlich wird daher auch keine grofse Genauigkeit gefordert. Ist es aber bei den generellen Nivellements zugleich Zweck, Zwischenpunkte zum spätern Anhalten bei technischen Ausführungen zu be-

*) In dieser Hinsicht findet man ausführlichere Anleitung in Bachmann's Theorie und Praxis des Nivellierens u. s. w. Weimar, 1838.

stimmen, so kann man sich dazu nur gröfserer Werkzeuge mit vollkommeneren Constructionen bedienen.

2. Beim Special-Nivellement eines Flufses schlägt man vorher, da dessen Wafserfläche während des Nivellierens steigen und sinken kann, an den Anfangs- und Endpunkt feste Pfähle und mifst deren Verticalabstand vom Wafserspiegel. Gewöhnlich wird dabei aber auch noch die Kenntnifs der Lage des seitwärts liegenden Bodens verlangt. Dann legt man in bestimmten Entfernungen der Längennivellementsachse, wie die Verschiedenheit des Terrains es fordert, Normalen gegen dieselbe und nivelliert die in ihnen liegenden Punkte. Man nennt solche Nivellements Quernivellements. Bei dem Nivellement eines Flufses sind auch alle übrigen zugehörigen Bauwerke zu berücksichtigen, wohin Brücken, Schleusen, Mühlen, Ueberfälle, Wehre, Pegel u. s. w. gehören. Auch kommt es auf die Angabe des höchsten, mittleren und tiefsten Wafserstandes an. Zur Entwerfung des Profils des Strombettes dient bei einem nicht sehr breiten Strom eine über denselben gespannte, nach Ruthen abgetheilte Schnur, von welcher ab die Tiefen des Bettes durch Senkel bestimmt werden.

3. Bei Strafsenanlagen werden nach beendigtem Generalnivellement zuerst die Richtungen der Strafse abgesteckt und hiervon dann die Längennivellements ausgeführt. Gleichzeitig erfolgt die Bestimmung der Quernivellements an allen den Stellen, wo bedeutende Abweichungen im Terrain sich zeigen. Meistens reichen Quernivellements in 5 bis 10 Ruthen Entfernung von einander hin; im gebirgigen Terrain kann letztere auch geringer sein.

Aufserdem mufs jedes Nivellement, wenn nicht ganz oberflächliche Angaben genügen, von dem Endpunkte aus nach dem Anfangspunkte zurück noch einmal vorgenommen werden. Weichen beide Resultate nur so viel ab, dafs man die Gröfse der Abweichung den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern zuschreiben kann, so nimmt man von ihnen das arithmetische Mittel. Sind aber auch Zwischenpunkte hinsichtlich ihres Gefälles zu bestimmen, so mufs man die Gröfse der halben Abweichung nach Verhältnifs auf die einzelnen Stationen vertheilen. Immer bleibt aber zu beachten, dafs die bedeutendsten Fehler bei starken Luftzitterungen oder dadurch entstehen, dafs ein Visierstrahl dicht über dem erwärmten Erdboden hinweg geht.

Endlich mufs auch noch bei den meisten Nivellements in 20 bis 40 Ruthen Entfernung auf beiden Seiten der Längenachse ein Grundrifs der nivellierten Fläche entworfen werden. Da es hierbei meistens auf keine grofse Genauigkeit ankommt, so kann man sich dazu der Boussole oder auch des Mefstisches bedienen. Nur ist bei dieser Aufnahme auf die Bestimmung aller fixen, so wie auch solcher Punkte des

Nivellements Rücksicht zu nehmen, welche für den Zweck desselben von Wichtigkeit sind.

Anmerkung. Das Nivellieren mit der Setzwage darf hier wegen seiner zu geringen Genauigkeit übergangen werden. Ueber das Nivellieren mit dem Gradbogen (der Markscheiderwage) ist bereits im §. 198 das Nöthige angegeben.

§. 391.

Bei dem Nivellieren gröfserer Flächen nach Länge und Breite, was z. B. beim Trockenlegen sumpfiger Stellen, den Planierungen eines unebenen Bodens u. s. w. vorkommt, theilt man dieselben gewöhnlich durch normal auf einander gesetzte Parallelen in lauter Rechtecke ab, und erhält dadurch zwei Reihen sich durchkreuzender Nivellements, wodnrch sich die Höhenunterschiede der Terrainpunkte genügend festlegen.

Bei den Planierungen wird es hauptsächlich auf die Ausführnng folgender Aufgaben ankommen.

1. Durch einen gegebenen Punkt P nach einer gegebenen Richtung eine Horizontallinie abzustecken.

Indem man sich in P mit dem Nivellierinstrument aufstellt, läfst man die Latte in einem zweiteu Punkte A, der dnrch einen einstweilen verloren eingeschlagenen Pfahl bezeichnet ist, und von dem ersteren nur eine geringe Entfernung hat, auf der Kopffläche desselben aufstellen. Ist dann die bestimmte Zielhöhe z der gemefsenen Instrumenthöhe i über der Oberfläche des Pfahles in P gleich, so liegen die Oberflächen beider Pfähle in gleicher Höhe. Ist diefs aber nicht der Fall, so wird der Pfahl in A nach Umständen soweit zu erhöhen, oder zu erniedrigen sein, bis $z = i$ ist. Auf diese Weise lafsen sich auf beiden Seiten vou P noch andere Punkte bestimmen, nur würde eigentlich bei gröfseren Entfernungen noch der aus §. 382 sich ergebende Correctionswerth au der Latte zu berücksichtigen sein, den man indessen meistens vernachläfsigt.

2. Die Lage einer durch einen gegebenen Punkt P gehenden Horizontalehene zu bestimmen.

Man theile die darzustellende Ebene nach dem Obigen dnrch abgesteckte Normalen und Parallelen in Rechtecke und bestimme nach 1. jeden der in den Endpunkten der Rechtecke eingeschlagenen Pfähle.

Soll 3. durch eine bereits bestimmte Horizontale eine Ebene festgelegt werden, welche unter einem gegebenen Winkel α gegen den Horizont geneigt ist,

so ist durch einen beliebigen Punkt P der gegebenen Horizontale in normaler Richtung gegen dieselbe eine andere Linie festzulegen, welche den gegebenen Winkel α mit ihr einschliefst. Für eine abge-

mefsene Länge a ist daher zunächst, wenn b die Gegenkathete des Winkels α ist, $b = a \sin \alpha$ im Fufsmafse zu bestimmen; dann die Latte in A, wenn das in P stehende Niveau die Höhe i zeigt, bei steigendem Terrain auf $i - b$, bei fallendem auf $i + b$ zu stellen, und darnach der unter der Latte verloren eingeschlagene Pfahl so lange zu verändern, bis die horizontale Visierlinie den entsprechenden Punkt der Latte trifft.

Auf gleiche Weise können noch andere Punkte $B\,C\ldots.$ der abgesteckten Normale bestimmt werden, und ist darauf dann durch jeden derselben nach 1. eine Horizontale festzulegen.

§. 392.

So wie die im vorigen Paragraphen angegebenen Aufgaben nur hin und wieder in der Praxis ihre Anwendung finden, kommen die über das Abstecken von Linien im unebenen Terrain bei den Anwendungen der praktischen Geometrie auf die Ingenieurwifsenschaften vielfach vor. Nur hat man es hier mit der Festlegung von Punkten in Horizontalebenen durch Nivellements zu thun, die nicht in geraden Linien, sondern in Curven liegen und daher Niveaucurven, Horizontalcurven, Höhencurven genannt werden. Folgende beiden Aufgaben bilden die Grundlage der hierher gehörigen technischen Arbeiten.

1. Durch einen gegebenen Punkt P eine ihm angehörige Niveaucurve eines unebenen Terrains festznlegen.

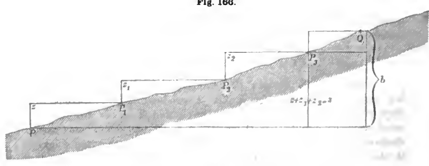
Im Wesentlichen fällt die Auflösung dieser Aufgabe mit der der Aufgabe 1. des vorigen Paragraphen zusammen, nur wird der Standpunkt A der Latte, deren Zielpunkt mit der Instrumentenhöhe i eine gleiche Höhe z hat, auf dem unebenen Terrain durch Auf- oder Abwärtsgehen zu bestimmen sein und dann so mit einem Pfahle bezeichnet, dafs seine Kopffläche mit P im Horizonte liegt. Auf diese Weise lafsen sich wieder auf beiden Seiten von P noch andere Punkte B, $C, \ldots.$ festlegen, so weit dieselben von P aus sichtbar sind. Ist diefs nicht mehr der Fall, so wird das Nivellierinstrument in einem dieser festgelegten Punkte aufgestellt und dann weiter, wie vorhin angegeben, verfahren.

2. Von einem Punkte P einer Horizontalcurve aus den Punkt Q einer anderen Horizontalcurve zu bestimmen, welche um eine gegebene Höhe b höher oder tiefer als die erstere liegt.

Um ungefähr die Lage des Punktes Q, der hier höher als P angenommen werden mag, zu erfahren, mefse man den Neigungswinkel α des schiefen Terrains, so ist durch $a = \frac{b}{\sin \alpha}$ die Länge des dem

letzteren zugehörigen Schenkels der Ebene des Neigungswinkels gegeben. Wird der Endpunkt von der Linie a kenntlich gemacht, so wird man aus der Länge der anzuwendenden Nivellierlatte beurtheilen können, in wie vielen und welchen Stationspunkten das Nivellierinstrument aufgestellt werden mufs, damit die Summe der Gefälle der Zwischenstationen $= b$ werde. Wäre nun z. B. in Fig. 166 das Gefälle zwischen P und P_1, zwischen


Fig. 166.



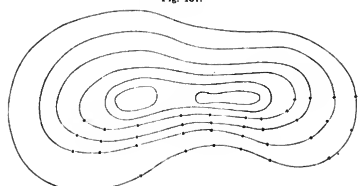
P_1 und P_2, zwischen P_2 und P_3 beziehungsweise z, z_1 und z_2, so mufs das Gefälle zwischen P_3 und $Q = b - (z + z_1 + z_2) = b - (z)$ werden. Stände man also in P_3 mit dem Nivellierinstrument von der Höhe i, so drückt $i - [b - (z)]$ die horizontale Visierlinie nach der Latte in Q aus, wonach also der Grundpfahl in Q leicht zu bestimmen sein wird.

Anmerkung. Bei stark ansteigendem Terrain bietet zum Nivellement der Punkte P bis P_3 die Markscheiderwage mehr Bequemlichkeit dar, als ein Libellenniveau.

§. 393.

Durch die wiederholte Anwendung der beiden letzteren Aufgaben lafsen sich daher nicht nur die beiden Einhänge eines Thales, sondern auch die Abfälle eines Berges durch die Horizontalcurven in lauter gleichen Verticalabständen durch Nivellements darstellen und daher ist, indem man sämmtliche bezeichneten Punkte der Curven geometrisch aufnimmt und auf einer Karte verzeichnet, das Verhältnifs der Höhen der Terrainpunkte eben so anschaulich zu machen, als ein Grundrifs die Horizontalprojectionen der verschiedenen Configurationen des Terrains giebt. Es folgt leicht, dafs je mehr die Horizontalcurven einander genähert sind, um so gröfser, und je mehr sie von einander entfernt sind, um so kleiner der Neigungswinkel der Terrainfläche gegen den Horizont ist. Die graphische Darstellung der Unebenheiten des Erdbodens, so wie auch die Bestimmung der Neigungsverhältnisse derselben, wird erst in der dritten Abtheilung gelehrt; hier bleibt aber die Aufgabe:

Fig. 167.



die bereits abgesteckten Horizontalcurven der beiderseitigen Einhänge eines Thales oder der Abfälle eines Berges aufzunehmen

deshalb nur zu erwähnen, da in III. des dritten Abschnitts das hier anzuwendende Verfahren angegeben wird, welches vorzugsweise in dem Vorwärtsvisieren und Mefsen und in dem Vorwärtseinschneiden besteht. Bei Anwendung der ersterwähnten Methode werden die Entfernungen der Punkte der Horizontalcurven von den Stationspunkten, in denen der Mefstisch aufgestellt ist, mittelst des distanzmefsenden Fernrohrs bestimmt, und können dann nach dem verjüngten Mafsstabe sogleich aufgetragen werden. Das Vorwärtseinschneiden wird zur Festlegung der ersten Punkte anzuwenden sein, indem man von einer in der Thalfläche oder am Fufse des Berges unmittelbar gemefsenen Standlinie ausgeht. Zuweilen kann es auch nothwendig werden, an die erste Standlinie eine zweite, dritte u. s. w. anzureihen und rund um den Berg herum fortzuführen.

Nach der Aufnahme der Punkte der Horizontalcurven nimmt man die Mefstischplatte ab, zeichnet das zwischen je zwei Punkten der nämlichen Horizontalcurve liegende Stück des Bergabhanges nach dem Augenmafse auf die Platte, bemerkt dabei wieder die charakterisierenden Stücke des Abhangs, z. B. Felsenparthieen, Steinbrüche u. dgl. und zeichnet endlich, falls die Schraffiermethode zur weiteren Auszeichnung angewandt werden soll, die Schenkel der Neigungswinkel an den verschiedenen Stellen des Abhangs ein, um den Schraffierstrichen die rechte Richtung geben zu können.

Zweites Capitel.

Trigonometrische Höhenbestimmungen.

Vorbemerkung. Von den Aufgaben über trigonometrische Höhenbestimmungen aus kleineren Entfernungen, die man in manchen Lehrbüchern der praktischen Geometrie aufgeführt findet, ist besonders nur die folgende für die Praxis von Wichtigkeit, während andere, wie z. B., die absolute Höhe eines Gegenstandes zu bestimmen, wenn dessen Grundfläche mit dem Standpunkte in derselben Horizontalebene liegt, und die Mefsung der Standlinie entweder bis zum Fufse des Gegenstandes gestattet, oder diefs nicht möglich ist, u. a., wegen verschiedener Schwierigkeiten praktisch nicht immer lösbar sind, sondern nur mehr dazu dienen, die Anwendung der reinen Trigonometrie auf praktische Aufgaben zu zeigen.

§. 394.

Aufgabe. Die absolute Höhe eines Gegenstandes AB (Fig. 168) zu bestimmen, wenn man weder eine horizontale noch schiefe Standlinie, noch ein Stück derselben in der durch AB gelegten Verticalebene mefsen kann.

Fig. 168.

Man mefse in einer Ebene die Standlinie $CD = a$, von welcher angenommen werden mag, dafs sie oberhalb der durch A gelegten Horizontalebene Acd und dafs der Punkt D höher liege als C. Man mefse ferner in C den Horizontalwinkel $Acd = \alpha$, in D den Horizontalwinkel $Adc = \beta$ und nehme an, dafs in C auch die Verticalwinkel δ, γ und ε gemefsen werden können. Alsdann ist

$$Cg = cd = a \cos \varepsilon,$$

$$cA = \frac{cd \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{a \cos \varepsilon \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Da nun

$$Bf = Cf \operatorname{tg} \gamma = Ac \operatorname{tg} \gamma,$$
$$Af = Cf \operatorname{tg} \delta = Ac \operatorname{tg} \delta,$$

so ist $AB = \frac{a \sin \beta \cos \varepsilon}{\sin (\alpha + \beta)} (\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta) + h$, wenn h die Instrumenthöhe bezeichnet,

oder
$$AB = \frac{a \sin \beta \cos \varepsilon \sin (\gamma + \delta)}{\sin (\alpha + \beta) \cos \gamma \cos \delta} + h.$$

§. 395.

1. Liegen die Standpunkte C und D in der durch A gedachten Horizontalebene, so ist sowohl δ als $\varepsilon = o$, folglich $CD = cd$, $Bf = BA = Ac \operatorname{tg} \gamma$ und daher

$$AB = \frac{a \sin \beta \operatorname{tg} \gamma}{\sin (\alpha + \beta)} + h.$$

Anmerkung. In den meisten Fällen kann man bei der vorliegenden Aufgabe den Werth von h vernachläfsigen.

2. Meistens wird man aber die gemefsene Standlinie entfernter von dem Höhenobjecte annehmen müfsen, also nur durch ein Nivellement bis zum Fufse desselben beurtheilen können, ob die erstere höher oder tiefer als der Punkt A liegt, das gefundene Gefälle also dann mit in Rechnung zu bringen haben. Zweckmäfsiger wird man den Elevationswinkel γ auch durch die Mefsung der Zenithdistanz des Punktes B ableiten, da dann die Bestimmung des Indexfehlers am Höhenkreise erspart wird. Für die Praxis empfiehlt es sich auch, die Standlinie aus 2 Theilen zusammenzusetzen und von dem dritten Punkte aus die Höhe nochmals zu bestimmen. Endlich ist auch bei einem gröfseren Abstande des Standortes, woselbst die Zenithdistanz des Punktes B gemefsen wird, noch die letztere um die Refraction zu verbefsern (§. 248), wenigstens die Gröfse des Werthes derselben auszumitteln, um sie nöthigenfalls in Rechnung bringen zu können.

3. Haben im vorigen Paragraphen die schiefen Schenkel der Verticalwinkel γ, δ und ε gegen die in ihrer Ebene liegende Horizontale die entgegengesetzte Lage, so müfsen die Winkel subtractiv genommen und bei Rechnungen mufs dann berücksichtigt werden, dafs $\cos - \varphi = \cos \varphi$ und $\sin - \varphi = - \sin \varphi$ ist.

§. 396.

Aufgabe. Aus den gegenseitig gemefsenen scheinbaren Zenithdistanzen z und z_1 zweier Höhenobjecte A und B (Fig. 107), ihrer Entfernung d von einander und der Gröfse der Refraction ρ und ρ_1 die wahren Zenithdistanzen Z und Z_1 zu bestimmen.

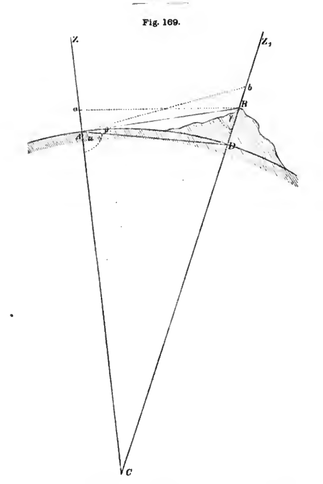
Nach §. 248 berechne man aus d und r die Gröfse des Winkels C, so ist, da bei gleichzeitigen Zenithdistanzbestimmungen $\rho = \rho_1$ gesetzt werden kann,

$$Z = z + \varkappa C = z + \rho,$$
$$Z_1 = z_1 + \varkappa C = z_1 + \rho,$$

oder, da nach §. 248 $\rho = 90^0 + \frac{1}{2} C - \frac{1}{2}(z + z_1)$ ist,

$$Z = 90^0 + \frac{1}{2} C + \frac{1}{2}(z - z_1),$$
$$Z_1 = 90^0 + \frac{1}{2} C - \frac{1}{2}(z - z_1).$$

Fig. 169.



Ist nur eine scheinbare Zenithdistanz, z. B. z bestimmt, so ist $Z = z + 0{,}0653\ C$.

§. 397.

Aufgabe. Eine gemefsene scheinbare Zenithdistanz auf den wahren Scheitelpunkt zu reducieren.

Da bei den Mefsungen der Zenithdistanzen in den Beobachtungspunkten häufig Signale errichtet sind, an deren Fufse die Mefsung des Winkels geschieht, während von anderen Punkten aus ihre Spitzen zu den Zielpunkten dienen, so bedürfen die gemefsenen scheinbaren Zenith-

distanzen noch einer Correction, indem z. B. der am Fufse A des Signals Aa (Fig 169) beobachtete Winkel $ZAB = \zeta$ noch auf den Winkel ZaB reduciert werden mufs. Setzt man $ABa = x$, $Aa = h$, $AB = d$, so ist

$$d : h = \sin\zeta : \sin x,$$

folglich
$$\sin x = \frac{h}{d} \sin\zeta.$$

Da nun der Winkel x immer nur sehr klein ist, so kann man $\sin x = x \sin 1''$, mithin

$$x = \sin x \; 206265 \text{ Sekunden setzen.}$$

Es ist daher

$$ZaB = z = \zeta + x = \zeta + \frac{h}{d} \sin\zeta \; 206265 \text{ Sekunden.}$$

Auf dieselbe Weise würde man in dem andern Standpunkte B erhalten

$$z_1 = \zeta_1 + \frac{h_1}{d} \sin\zeta_1 \; 206265 \text{ Sekunden,}$$

wonach also die im vorigen Paragraphen angegebenen Ausdrücke unter den betreffenden Umständen zu verbefsern sein würden.

Wird die Mefsung der Zenithdistanzen auf Steinpfeilern gegen die auf ihnen angebrachten Signale vorgenommen, so wird den beobachteten Zenithdistanzen noch eine Columne beizufügen sein, in welcher die Höhe des Punktes, auf welchen das Fernrohr des Instruments gerichtet wurde, weniger der Höhe des Fernrohrs, beide von den wagerechten Oberflächen der Beobachtungspfeiler angerechnet, angegeben wird. Dann wird durch Hinzufügung des Winkels, welchen dieser Höhenunterschied am Beobachtungspunkte einschliefst, die beobachtete Zenithdistanz auf die Oberfläche beider Pfeiler reduciert.

§. 398.

Aufgabe. **Aus der in der einen Station A (Fig. 169) gemefsenen scheinbaren Zenithdistanz z und der Horizontalentfernung $AB = d$, die Höhe $BD = H$ zu bestimmen.**

1. Man erhält nach §. 248 zunächst

$$C = \frac{d}{r} \; 206265 \text{ Sekunden}$$

und die wahre Zenithdistanz

$$Z = z + 0{,}0653\, C.$$

Dann ist in dem Dreiecke ABD

$$\beta = 180^0 - (Z + \alpha) = 90^0 - (Z - \tfrac{1}{2}\, C),$$
$$\gamma = Z - C,$$

mithin
$$H = \frac{AD \,.\, \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{AD \cos(Z - \frac{1}{2} C)}{\sin(Z - C)},$$

so dafs es demnach nur noch darauf ankommt, aus bekannten Stücken die Sehne $AD = s$ zu berechnen.

Bekanntlich ist

$$s = 2\,r \sin \tfrac{1}{2}\,C$$

und $$\sin \tfrac{1}{2}\,C = \tfrac{1}{2}\,C - \frac{(\frac{1}{2}\,C)^3}{1.2.3} + \frac{(\frac{1}{2}\,C)^5}{1.2\ldots.5} - \ldots.;$$

wegen der Kleinheit des Winkels C kann abor nicht allein in dieser Reihe das dritte Glied ohne Fehler vernachläfsigt, sondern auch

$$\sin \tfrac{1}{2}\,C = \frac{\frac{1}{2}\,C}{206265} - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\frac{1}{2}\,C}{206265}\right)^3 + \ldots.$$

gesetzt werden. Dann erhält man durch Substitution

$$s = \frac{r\,C}{206265} - \frac{2\,r\,C^3}{8.6.206265^3},$$

oder, da nach §. 248

$$\frac{r\,C}{206265} = d$$

$$s = d - \frac{1}{24}\,\frac{d^3}{r^2}.$$

2. Ist bei geringer Entfernung der Punkte A und B von einander, $C = 0$ und $A\,B = A\,D = d$ anzunehmen, so wird

$$H = d\,.\,\text{cotg}\,Z,$$

ein Ausdruck, welchen man auch erhalten würde, wenn die von dem Standpunkte nach dem Fufse des Höhenobjects reichende Distanz unmittelbar gemefsen werden könnte.

§. 399.

Aufgabe. Aus den in A und B gemefsenen scheinbaren Zenithdistanzen z und z_1 und der Horizontalentfernung d die Höhe $B\,D = H$ zu bestimmen.

Man berechne wieder nach §. 248 aus z und z_1 die wahren Zenithdistanzen Z und Z_1, so wie die Gröfse des Winkels C und wie im vorigen Paragraphen die Länge der Sehne $A\,D = s$, so ist, da $\gamma = 180^0 - Z_1$ und $\beta = 90^0 - (Z - \frac{1}{2}\,C)$ ist,

$$H = \frac{s\,.\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{s\,.\cos(Z - \frac{1}{2}\,C)}{\sin Z_1}.$$

Kann man wegen geringer Entfernung der Stationspunkte A und B, $C = o$ und $A\,B = d$ setzen, so erhält man nach §. 396

$$H = \frac{d\cos[90^0 + \frac{1}{2}(z - z')]}{\sin[90^0 - \frac{1}{2}(z - z')]} = \frac{d\sin\frac{1}{2}(z - z_1)}{\cos\frac{1}{2}(z - z_1)} = d\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\,(z - z_1),$$

so dafs also die gesuchte Höhe sogleich aus den gemefsenen scheinbaren Zenithdistanzen und der Horizontalentfernung d sich berechnen läfst. Nach den erhaltenen Vorzeichen für tg $\frac{1}{2}\,(z - z_1)$ kann man beurtheilen, ob A tiefer oder höher als B liegt. Ist nämlich tg $\frac{1}{2}\,(z - z_1)$ negativ, so liegt B höher als A.

§. 400.

Sind von einem Punkte aus, wie es bei der Aufnahme eines Dreiecksnetzes immer der Fall ist, die Zenithdistanzen mehrerer sichtbarer Punkte gemefsen, so ist es bequemer, den Höhenunterschied aller derselben gegen einen Punkt, dessen Höhe entweder schon bekannt, oder nach dem Vorhergehenden berechnet worden ist, zu bestimmen.

Bezeichnen wieder z und z_1 die in den Punkten A und B (Fig. 169) gemefsenen scheinbaren Zenithdistanzen, ρ und ρ_1 die zugehörigen Refractionen, H und H_1 die Höhen in den Lothlinien CA und CB über dem mit dem mittleren Krümmungshalbmefser r beschriebenen Bogen und d die zwischen den Lothlinien berechnete und auf den Meereshorizont reducierte Entfernung zwischen A und B, so ist, da nach §. 248 $C = \frac{d}{r} \cdot 206265$ Sekunden ist, in dem Dreiecke ABC

$$2r + H_1 + H : H_1 - H = \text{cotg}\, \tfrac{1}{2} C : \text{tg}\, \tfrac{1}{2} (A - B),$$

folglich $$H_1 - H = \left(1 + \frac{H_1 + H}{2r}\right) 2r\, \text{tg}\, \tfrac{1}{2} C\, \text{tg}\, \tfrac{1}{2} (A - B). \qquad (1)$$

Da nun $Z = z + \rho$, $Z_1 = z_1 + \rho_1$

$$180^0 + C = Z + Z_1,$$

also $Z_1 = 180^0 + C - Z$ und $-Z = Z_1 - C - 180^0$,

ferner $$A = 180^0 - Z,$$

$$B = 180^0 - Z_1,$$

also $A - B = Z_1 - Z = 180^0 + C - 2Z = 2Z_1 - C - 180^0$ ist, so erhält man durch Substitution dieser beiden letzteren Werthe für $A - B$ in der obigen Gleichung (1) und mit Berücksichtigung, dafs wenn die Höhen H_1 und H nicht sehr grofs sind und C nur ein kleiner Winkel ist, $\frac{H_1 + H}{2r}$ vernachläfsigt, oder der erste Factor in (1) $= 1$ und $2r\, \text{tg}\, \frac{1}{2} C = d$ angenommen werden kann,

$$H_1 - H = d\, \text{tg}\, [90^0 - (Z - \tfrac{1}{2} C)]$$

und $$H_1 - H = d\, \text{tg}\, [(Z_1 - \tfrac{1}{2} C) - 90^0],$$

oder da $\text{tg}\,(90^0 - \varphi) = \text{cotg}\, \varphi$ und $\text{tg}\,(\varphi - 90^0) = -\text{cotg}\, \varphi$ ist,

$$H_1 - H = d\, \text{cotg}\, (Z - \tfrac{1}{2} C) \qquad (2)$$

und $$H_1 - H = -d\, \text{cotg}\, (Z_1 - \tfrac{1}{2} C),$$

oder $$H - H_1 = d\, \text{cotg}\, (Z_1 - \tfrac{1}{2} C). \qquad (3)$$

Durch die beiden Gleichungen (2) und (3), von welchen die eine zur Probe der anderen dient, läfst sich daher der Höhenunterschied der Punkte A und B berechnen, also die Höhe des einen, wenn die des anderen bekannt ist, bestimmen.

Durch ein solches trigonometrisches Nivellement, die Höhenunterschiede aller einem Dreiecksnetze zugehöriger Punkte zu bestimmen, ergiebt sich daher die Möglichkeit der Bestimmung der Höhen jeder zwei beliebig entfernten Punkte auf der Erdoberfläche.

Zusatz. Ist in A die Zenithdistanz des Meereshorizonts gemefsen, so wird AB in B zur Tangente des Bogens AB und daher $H_1 = 0$ und $Z_1 = 90^0$. Man erhält dann aus den Gleichungen (2) und (3)

$$-H = d \operatorname{cotg}(Z - \tfrac{1}{2} C)$$

und

$$H = d \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C.$$

Anmerkung. Ueber ein trigonometrisches Nivellement vgl. m. Bessel und Baeyer Gradmefsung in Ostpreufsen S. 171 u. f.

Drittes Capitel.

Das Höhenmefsen mit dem Barometer.

§. 401.

Die Methode, mittelst des Barometers Höhen zu mefsen, gründet sich auf das aërostatische Gesetz, dafs wenn in einer ruhigen Luftsäule von derselben Temperatur die Höhen in einer arithmetischen Reihe zunehmen, der Druck der Luft, also auch die Dichtigkeit und die Barometerhöhe in einer geometrischen Reihe abnimmt.

Von einer solchen verticalen Luftsäule sei nun der Barometerstand am unteren Ende $= B$, am oberen $= b$; es werde auch vorerst angenommen, dafs die Temperatur in der ganzen Luftsäule dieselbe sei. Denkt man sich nun die Säule wieder in gleiche Schichten von 1 Fufs Höhe getheilt, so dafs man ohne Fehler die Dichtigkeit in jeder derselben als constant und sich nur von Schicht zu Schicht ändernd annehmen kann, so wird der Barometerstand von Unten nach Oben in einer geometrischen Reihe abnehmen. Nennt man den Exponenten derselben $\frac{1}{m}$, so sind die Barometerstände in den von Unten nach Oben folgenden Luftschichten $B\left(\frac{1}{m}\right)^0$, $B\left(\frac{1}{m}\right)^1$, $B\left(\frac{1}{m}\right)^2 \ldots$, in der obersten oder $x$ten Schicht darüber $= B\left(\frac{1}{m}\right)^x$; da der Barometerstand in dieser nun $= b$ sein soll, so ist

$$b = \frac{B}{m^x},$$

folglich $\log b = \log B - x \log m$, woraus

$$x = \frac{\log B - \log b}{\log m}$$

folgt, oder, wenn man $\frac{1}{\log m} = M$ setzt,

$$x = M(\log B - \log b),$$

in welchem Ausdrucke also der s. g. barometrische Coefficient M zu bestimmen ist.

Da $M = \frac{x}{\log B - \log b}$, so ergiebt sich die Möglichkeit der Bestimmung von M, wenn x durch trigonometrische Mefsungen bestimmt ist. In der That fand auch de Luc durch viele mühsam angestellte Mefsungen bei einer Temperatur von 16,75° R., wenn x in Pariser Fufsen gegeben ist, den barometrischen Coefficienten $M = 60000$, wobei nur nicht übersehen werden darf, dafs diese Bestimmung noch in eine Zeit fiel, wo man die Dichtigkeit der Luft bei verschiedenen Temperaturen noch nicht so genau kannte, als jetzt, auch noch viel unvollkommenere Barometer besafs. — Durch Rechnung läfst sich M auf folgende Weise finden. Da man nämlich durch barometrische, thermometrische und hygrometrische Beobachtungen das absolute Gewicht jeder Cubiceinheit atmosphärischer Luft aus dem Unterschiede der Barometerstände an einer höheren und tieferen Stelle der Atmosphäre und dadurch auch das Gewicht der dazwischen liegenden Luftsäule berechnen kann, so wird es zur Bestimmung des verticalen Abstandes x beider Standpunkte darauf ankommen, zu einer geometrischen Reihe, für welche das Anfangsglied a, das Endglied u und die Summe s der Glieder gegeben ist, die Anzahl n der Glieder zu finden. Auf diese Weise, deren Entwickelung der Leser in physikalischen Werken nachsehen kann, hat man nun gefunden

$$M = 18316,^{m}57 = 56386,535 \text{ Pariser Fufs.}$$

§. 402.

Nach dem vorigen Paragraphen erhält man daher

$$x = 56386,535 (\log B - \log b) \text{ Pariser Fufs,}$$

welche Logarithmen aber die Briggs'schen Logarithmen bezeichnen. Hiernach würde demnach die Rechnung zur Bestimmung der Höhe x auszuführen sein, wenn man weder auf die Ungleichheit der Schwere an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche und Höhen über derselben, noch auf die Dichtigkeit des Quecksilbers und der Luft bei verschiedener Temperatur und die Feuchtigkeit der letzteren Rücksicht nimmt. Insofern bedarf also die obige Formel noch folgender Correctionen.

1. In der Formel ist angenommen, dafs die Temperatur in der ganzen zu mefsenden Luftsäule dieselbe sei. Da aber die Wärme die Luft ausdehnt, also man desto mehr steigen mufs, damit das Quecksilber des Barometers um einerlei Gröfse falle, so werden demselben Fallen des Barometers um so gröfsere Höhen entsprechen, je höher die Temperatur der Luft ist. Der Erfahrung zufolge ist nun die Temperatur der Atmosphäre um so geringer, je mehr man in derselben steigt; da aber das Gesetz der Abnahme noch nicht hinlänglich bekannt ist, so nimmt man an, dafs in der ganzen Luftsäule eine Temperatur

herrsche, welche das arithmetische Mittel zwischen den Temperaturen T' und t' am unteren und oberen Standpunkte ist. Da nun nach Gay-Lussac's Untersuchungen für jeden Grad Réaumur die Aenderung $\frac{1}{213,3} = 0,00468$ beträgt, so ist der Correctionsfactor

$$= 1 + 0,00468\left(\frac{T' + t'}{2}\right) = 1 + 0,00234\,(T' + t')\,*).$$

2. Da die in der Atmosphäre befindlichen Waſserdünste leichter wie die atmosphärische Luft sind, dieselben also ebenfalls eine Vergröſserung der Höhen verursachen werden, so verwandelt sich der vorige Correctionsfactor nach Laplace's Annahme in

$$1 + 0,00244\,(T' + t').$$

3. In der obigen Grundformel war die Dichtigkeit des Quecksilbers bei 0^0 R. $= 1$ gesetzt. Da aber nach den Untersuchungen von Dulong und Petit das Quecksilber sich bei jedem Grade der 80theiligen Scale um $\frac{1}{4440}$ ausdehnt, so ist die Dichtigkeit desselben bei τ Graden Wärme $= 1 - \frac{\tau}{4440}$. Bezeichnen nun T und t die Temperaturen des Quecksilbers am unteren und oberen Standpunkte, so ist Statt b zu setzen

$$b\left(1 + \frac{T - t}{4440}\right) = b\,[1 + 0,000225\,(T - t)].$$

4. Da die Schwerkraft beim Aufsteigen in der Atmosphäre sich vermindert, also das Quecksilber auf dem oberen Standpunkte specifisch leichter wird, so ist nach D'Aubuisson Statt des barometrischen Coefficienten $18316,57^m$, $18365^m = 56535,6$ Pariser Fuſs zu nehmen.

5. In der obigen Grundformel wurde die Schwere der Luft an einem Orte angenommen, wo das Barometer auf $0,76^m$ stand. Wegen der Veränderung der Schwere in senkrechter Richtung muſs nach D'Aubuisson der in 4. verbeſserte barometrische Coefficient um 10 Meter vergröſsert werden, so daſs er demnach $= 18375^m$ **) $= 56566,4$ Pariser Fuſs ist.

6. Weil in der Grundformel der barometrische Coefficient für die Breite von 45^0 bestimmt ist, von hier ab aber die Schwerkraft nach dem Aequator hin ab-, nach den Polen hin zunimmt, in dem letzteren Falle also die Atmosphäre dichter wird, so ist der obige Werth für x nach den darüber angestellten Untersuchungen, wenn φ die Breite des Beobtungspunktes bezeichnet, noch mit $1 + 0,002595 \cos 2\varphi$ ***), wofür aber $1 + 0,0026 \cos 2\varphi$ gesetzt werden mag, zu multiplicieren.

---

*) D'Aubuisson de Voisins nimmt hierfür in Bezug auf die hunderttheilige Scale $1 + 0,001857\,(T' + t')$ an.

**) Gauſs hat dafür $18382^m = 56587,9576$ Fuſs gesetzt.

***) Laplace nimmt dafür den Werth $1 + 0,00284 \cos 2\varphi$.

Faſst man die angegebenen Correctionen zusammen, so wird die Höhe x in Pariser Fuſsen durch die Formel

$$x = 56566,4\ (1 + 0,00244\ (T' + t'))\ (1 + 0,0026 \cos 2\varphi)$$
$$.\ [\log B - \log b\ (1 + 0,000225\ (T - t))]$$

gefunden.

Beispiel. Bei der Bestimmung des Pic de Bigore über Tarbes in den Pyrenäen wurde von **Ramond** und **Dangos** Folgendes beobachtet: $B = 27,17''$, $b = 19,845''$, $T = 14,9^0$ R., $t = 7,6^0$, $T' = 15,3^0$, $t' = 3,2^0$, $\varphi = 43^0$.

$$b\ (1 + 0,000225\ (T - t) = 19,845\ .\ 1,0016425 = 19,8776.$$
$$\log 27,17 = 1,4340896$$
$$\log 19,8776 = 1,2983683$$
$$0,1357213$$
$$1 + 0,00244\ (T' + t') = 1,04514$$
$$1 + 0,0026 \cos 2\varphi = 1,0001814$$
$$\log 56566,4 = 4,7525585$$
$$\log 1,04514 = 0,0191744$$
$$\log 1,0001814 = 0,0000775$$
$$\text{Num. log. } 4,7718104 = 59130,3$$
$$59130,3\ .\ 0,1357213 = 8025,2 \text{ Fuſs} = x.$$

Die trigonometrische Meſsung ergab 8044 Fuſs.

§. 403.

Bei Bestimmungen von Meereshöhen muſs für b der mittlere Barometerstand am Meere, für B der des Ortes, für welchen die Meereshöhe bestimmt werden soll, genommen werden. Nach der Breite des Ortes ist aber die erstere verschieden anzunehmen. Für 0^0 ist der mittlere Barometerstand im Niveau des Meeres unter den verschiedenen Breiten folgender *).

Breite	Pariser Linien	Millimeter	Breite	Pariser Linien	Millimeter
0⁰	337	760,214	50⁰	338,093	762,682
10⁰	337,056	760,341	60⁰	338,397	763,367
20⁰	337,218	760,706	70⁰	338,645	763,927
30⁰	337,466	761,226	80⁰	338,806	764,29
40⁰	337,769	761,951	90⁰	338,862	764,414

Anmerkung. Zur leichteren Berechnung der Höhenunterschiede hat man s. g. hypsometrische Tafeln (von ὕψος, die Höhe) berechnet, von denen die von **Gauſs** in **Gehler's** physik. Wörterbuch V. 329 und **Ulrich's** Lehrb. der praktischen Geometrie II. 454 sich finden.

*) **Gehler's** physikalisches Wörterbuch I. 918.

§. 404.

Für die Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Oerter müfsen die Beobachtungen gleichzeitig mit zwei völlig übereinstimmenden Barometern, zu welchen man meistens Heberbarometer nimmt, angestellt werden.

In Fig. 170 ist das eine zweier correspondirender von Meyerstein angefertigter Reisebarometer*) im Drittel wahrer Gröfse dargestellt, während Fig. 171 im Durchschnitt das eiserne Gefäfs desselben nebst den unteren Enden der communicierenden Röhren in wahrer Gröfse zeigt.

Das Gefäfs $ABCD$ (Fig. 171) nimmt in seinem oberen Theile die beiden Barometerröhren EF und GH auf, welche mittelst der Durchbohrung J mit einander communicieren; der untere cylindrisch ausgebohrte Theil KL dient zur Aufnahme des Quecksilbers bis zu einem nach Innen vorspringenden ringförmigen Rande αL, gegen welchen die unter ihm liegende Kautschukscheibe β**) durch den Hals des eingeschraubten Fufsstücks M gepresst wird. Die Kautschukscheibe bildet demnach die Basis des Gefäfses, gestattet aber zugleich beim Abschliefsen des Quecksilbers vermöge ihrer Elasticität die Ausdehnung und Zusammenziehung des letzteren. Mittelst der Durchbohrung des Hahns N können die beiden Heberröhren EF und GH mit einander in Communication gesetzt, aber auch abgeschlofsen werden, wenn durch den auf den vortretenden parallelepipedischen Zapfen γ gesetzten Schlüfsel O dem Hahn eine Drehung um 90° ertheilt ist. Zur Aufbewahrung des Schlüfsels wird derselbe in das in M eingeschnittene Gewinde geschraubt.

Beide Glasröhren werden von einer Unten aufgeschnittenen, auf den Hals des eisernen Gefäfses durch Schrauben befestigten messingenen Fafsungsröhre PQ umgeben, über welcher wieder mittelst eines Getriebes nebst Zahnstange die äufsere, die Barometerscale enthaltende

---

*) In meinen geometr. Instrum. S. 480 u. f. ist diefs Barometer unter dem Namen Meyerstein'sches Heber-Reisebarometer beschrieben und abgebildet. In einem Schreiben des Herrn Martins in Berlin wird gegen diese Benennung Protest erhoben und bemerkt, dafs im Jahre 1846 ein in Einrichtung, Form und Dimensionen genau übereinstimmendes Barometer von demselben construiert, auch der Firma Pistor und Martins darauf ein Patent ertheilt sei und noch heute in den Verzeichnissen als patentiertes Stockbarometer aufgeführt werde; welcher Irrthum daher hierdurch von mir berichtigt wird.

**) Kautschuk wurde nach den Mittheilungen des Herrn Martins nur bei den ersten Ausführungen angewandt, aber schon seit 15 Jahren, da derselbe, selbst wenn er vulkanisiert angewandt wird, mit der Zeit und auch in der Kälte hart und deshalb für den elastischen Boden untauglich wird, durch einen flachen Beutel aus weichem Ziegenleder, den eine schneckenförmige, leichte Feder gegen das Quecksilber drückt, ersetzt.



Fig. 170.

Fig. 171.

Fafsungsröhre RST beweglich ist, um den unteren Rand TS mit der in dem kurzen Schenkel durch den Schlitz zu beobachtenden Quecksilberkuppe zur Berührung zu bringen, so dafs demnach TS den Nullpunkt der Barometerscale bezeichnet. Zum Einstellen dient wieder der erwähnte Schlüfsel O, dessen oberes Ende auf den vorspringenden parallelepipedischen Zapfen δ gesetzt wird. Das offene Ende des kürzeren Schenkels GH wird mittelst eines Korkcylinders geschlofsen, während durch das ihn dnrchdringende Haarröhrchen die atmosphärische Luft einzudringen vermag.

In Fig. 170 sind die erwähnten Theile mit denselben, aber dem kleinen Alphabet angehörigen Buchstaben bezeichnet. An dem unteren Ende der äufseren Fafsungsröhre $r_2 r_1 ts$ befindet sich das zur Beobachtung der Temperatur des Quecksilbers erforderliche Thermometer uv mit der Réaumur'schen und Centesimal-Scale, dessen Kugel die Barometerröhre unmittelbar berührt. An dem oberen Ende der Fafsungsröhre ist die mit dem Vernier w durch eingelegte Messingstreifen x verbundene Hülse y auf und ab verschiebbar, um den unteren Rand der Vernierplatte mit der Kuppe des Quecksilbers zur Berührung bringen zu können. Znm Aufhängen des Barometers beim Beobachten endlich dient der Ring R_1, dessen cylindrischer Fufs an der Fafsungsröhre mittelst Schrauben befestigt ist.

Soll das Barometer transportiert werden, so neigt man dasselbe wieder so weit, dafs das Quecksilber an das obere verschlofsene Ende der Barometerröhre schlägt; dadurch dringt das in der kürzeren Röhre vorhandene Quecksilber durch die Hahnöffnung in den hohlen Raum KL (Fig. 171) des Eisengefäfses. Setzt man nun das stärkere Ende des Schlüfsels O auf den erwähnten vortretenden parallelepipedischen Zapfen des Abschlufshahns und dreht letzteren um 90^0, so ist die Commnnication beider Glasröhren aufgehoben. Nun kehrt man, nachdem man den Schlüfsel von dem Zapfen entfernt und wieder in die in der Zeichnung dargestellte Lage gebracht hat, das Barometer um, um dasselbe in das mit einem Tragriemen versehene Lederfutteral zu stecken.

Anmerkung. Das Gay-Lussac'sche Reisebarometer findet sich beschrieben u. a. in Bauernfeind's Vermefsungskunde. 2. Aufl. S. 348, das Horner'sche Gefäfs-Reisebarometer in H. g. I. S. 478.

Die Prüfung und der Gebrauch des Barometers.

§. 405.

Die erste Prüfung besteht in der Untersuchung, ob das s. g. Toricelli'sche Vacuum wirklich einen luftleeren Raum darstellt. Neigt man das Barometer so weit, dafs das Quecksilber in der Barometerröhre an

das verschlofsene Ende derselben schlägt und zeigt sich dann über dem Quecksilber keine Luftblase, so ist der Toricelli'sche Raum luftleer und das Barometer insofern brauchbar. Man wird zu der Ausführung dieser Untersuchung meistens die den Ring tragende Kuppe der Fafsungsröhre abschrauben müfsen, nach der Untersuchung aber wieder zu befestigen haben.

Nach längerem Gebrauche werden aber selbst die besten Barometer etwas Luft gefangen haben, in welchem Falle das Quecksilber aufs Neue auszukochen ist.

Die richtige Eintheilung der Scale kann nur mittelst einer guten Längentheilmaschine erkanut werdeu.

Nach diesen Untersuchungen wird vor dem Gebrauch der Barometer ihre Vergleichung mit einem s. g. Normal-Barometer, das gewöhnlich auf den Sternwarten sich findet, erforderlich und die dabei sich ergebende geringe Verschiedenheit bei den späteren Beobachtungen in Rechnung gebracht. Da aber schon durch den Transport der Instrumente und auch durch den Gebrauch selbst kleine Veränderungen eintreten werden, so wird eine solche Vergleichung wenigstens nach der Vollendung der Mefsungen nochmals vorgenommen werden müfsen.

Nachdem das obige Barometer ebenfalls in etwas geneigter Lage so aufgehangen ist, dafs der kurze Schenkel der Barometerröhre oberhalb des längeren zu liegen kommt, steckt man das dickere Ende ε des Schlüfsels O (Fig. 171) auf den Zapfen γ und öffnet, unter leisem Anklopfen an das Barometer, durch eine Viertelumdrehung des Schlüfsels den Hahn, wodurch das Quecksilber aus dem Gefäfs in den kürzeren Schenkel tritt und bringt nun das Barometer in die verticale Lage. Dann steckt man das dünnere Ende des Schlüfsels O auf den Zapfen δ nnd bringt deu Rand ts oder TS (Fig. 170 und 171) wieder mit der Kuppe des Quecksilbers im kurzen Schenkel zur Berührung, nachdem schon vorher wieder die Temperatur des Qnecksilbers an dem Thermometer uv abgelesen ist. Durch Verschiebung der Hülse y stellt man anch den nnteren Rand des Verniers w auf die Kuppe des Quecksilbers in dem längeren Schenkel ein und liest dann den Barometerstand, gleichzeitig aber noch an dem im Schatten aufgehangenen Thermometer auch die Temperatur der Luft ab. Zur Erlangung einer gröfseren Genauigkeit wiederholt man die Ablesungen in Zwischenräumen von etwa 5 Minuten einige Male und nimmt von ihnen das arithmetische Mittel.

§. 406.

Der nach dem vorigen Paragraphen erhaltene Barometerstand bedarf aber, vor dem Gebrauch desselben zur Berechnung der zu bestimmenden Höhe, noch mehrfacher Correctionen.

1. Die erste derselben betrifft den Einflufs der Capillardepression. Da diese unter übrigens gleichen Umständen dem Durchmefser der Röhre umgekehrt proportional ist, so wird sie bei den Gefäfsbarometern wegen der sehr verschiedenen Durchmefser des Gefäfses und der Glasröhre eine sehr ungleiche Wirkung äufsern. Weil die Depression aber bei Röhren, welche über 9 Linien weit sind, verschwindet, so ist dieselbe nur bei der Ablesung des Barometerstandes in der Glasröhre zu berücksichtigen. Bei den Heberbarometern dagegen darf die Depression in den beiden Schenkeln selbst dann nicht als gleich angenommen werden, wenn auch die Durchmefser derselben einander gleich sind, weil die Convexität des Quecksilbers in dem längeren und kürzeren Schenkel deshalb sehr verschieden ist, da in dem ersteren über dem Quecksilber ein luftleerer Raum, das Quecksilber des letzteren aber mit der äufseren atmosphärischen Luft in Verbindung steht. Die einzige Art, die Capillardepression genau zu bestimmen, besteht in der genauen Bestimmung der Höhe der Kuppe des Quecksilbers und läfst sich nach der folgenden Tabelle *), welche nach Laplace's Formel von Schleiermacher und Eckhart berechnet ist, leicht ermitteln. Bezeichnet a die Höhe der Kuppe und b die Weite der Röhre in Millimetern, so ist für die in horizontaler Linie stehenden Werthe von a und die verticalen von b die Depression in Millimetern:

$b =$	$a =$										
	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
0,5	4,975	8,912	12,560	12,616	—	—	—	—	—	—	—
1	1,262	4,450	4,377	5,581	6,098	6,171	—	—	—	—	—
2	0,299	0,595	1,152	1,643	2,037	2,338	2,541	2,658	2,681	2,699	2,712
3	0,121	0,242	0,476	0,695	0,839	1,066	1,206	1,316	1,397	1,449	1,473
4	0,068	0,120	0,240	0,354	0,460	0,546	0,530	0,702	0,758	0,805	0,838
5	0,034	0,069	0,138	0,205	0,247	0,299	0,308	0,390	0,428	0,468	0,476

War also bei einem am Heberbarometer abgelesenen Barometerstande von 750^{mm},60 die Höhe der Kuppe im langen Schenkel 0,4, im kurzen 1,0 und die Weite beider 5 Millimeter, so beträgt die Capillar-Depression im langen Schenkel 0,138, im kurzen 0,299, also der verbefserte Barometerstand 750^{mm},44.

2. Die zweite Correction des Barometerstandes hängt von der Temperatur des Instruments während der Beobachtung ab. Da die Dichtigkeit des Quecksilbers mit der Temperatur sich ändert, so kann als constantes Mafs des Luftdruckes nur die Länge einer Quecksilbersäule von einer

*) Gehler's physikalisches Wörterbuch. Neue Aufl. I. S. 909.

bestimmten Normaltemperatur dienen. Als letztere wird allgemein 0° C genommen. Eben so hat auch die Scale nur bei einer bestimmten Normaltemperatur die darauf angegebene Länge. Für das französische Zollmafs ist diese Normaltemperatur 13° R. oder 16°,25 C., für das metrische Mafs 0°. Bezeichnet b den beobachteten Barometerstand, t die Temperatur des Instruments während der Beobachtung, τ die Normaltemperatur der Scale, q den Ausdehnungscoefficient des Quecksilbers für 1°, k den des Materials, aus welchem die Scale besteht, so ist der wegen der Temperatur corrigierte Barometerstand b^1

$$b^1 = b\,(1 - t\,(q - k) - k\,\tau).$$

Für die Centesimalscale der Temperaturen ist $q = 0{,}00018018$, k für Messing $= 0{,}00001878$ und für Glas $= 0{,}000009\ldots$ zu setzen.

Hiernach kann man leicht für ein bestimmtes Barometer eine Reductionstabelle von geringer Ausdehnung berechnen.

Soll eine Höhenbestimmung aber richtige Resultate liefern, so müfsen nicht allein die Beobachtungen an den beiden Stationen gleichzeitig, sondern auch mit genau correspondierenden Barometern gemacht werden. Als die geeignetste Tageszeit zu den Beobachtungen ist im Allgemeinen 9 Uhr Morgens und 4 Uhr Nachmittags angenommen, weil zu diesen Zeiten die Unregelmäfsigkeiten in der Lufttemperatur am unbedeutendsten sind. Aufserdem ist stürmisches oder stark windiges und regnerisches Wetter zu vermeiden, und womöglich ruhige Luft mit umwölktem Himmel zu benutzen. Da ferner in gröfseren Horizontalabständen die Barometerstände, wegen ungleicher Höhe der drückenden Luftsäulen, sehr häufig verschieden sich zeigen, so dürfen die Beobachtungen auch nicht zwischen weit entfernten Stationen vorgenommen werden. Als gröfsten Abstand nimmt man in dieser Hinsicht etwa zwei deutsche Meilen an.

Ueber die Genauigkeit der Barometermefsungen vergleiche man Bauernfeind's Elemente der Vermefsungskunde, 2. Aufl., S. 644 u. f.

Schlufs-Capitel.

Mittlerer Fehler der Functionen direct beobachteter Gröfsen.

§. 407.

Vorbemerkung. Bei den meisten mit überschüfsigen Beobachtungen angestellten Mefsungen wird der Praktiker die Frage sich zu beantworten haben: wie grofs die durch die überschüfsigen Beobachtungen oder durch die Probemefsung sich ergebende Differenz gegen die eigentliche Beobachtungsgröfse sein darf, um sie den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern zuschreiben zu können. Diese Fragen

müfsen z. B. aufgeworfen werden bei der Mefsung der sämmtlichen Polygonwinkel eines Polygons, bei zwei ausgeführten Nivellements zwischen den nämlichen Punkten, bei zwei gleichartigen Mefsungen einer und derselben Linie u. s. w., wenn der nach §. 268 bestimmte mittlere Fehler des Mefswerkzeugs (§. 272) bekannt ist, oder ein solcher angenommen werden kann.

Die Antwort auf solche Fragen ist in den nächstfolgenden Sätzen enthalten, obgleich man vorzugsweise nach denselben beurtheilen soll, wie die Genauigkeit solcher Gröfsen zu bestimmen ist, welche aus ausgeglichenen directen Beobachtungen berechnet werden sollen.

§. 408.

Wenn $t_1, t_2, t_3 \ldots$ mehrere von einander unabhängige Beobachtungsgröfsen sind und

$$u = F(t_1, t_2, t_3 \ldots)$$

ist, so wird man offenbar nicht das richtige u erhalten, wenn $t_1, t_2, t_3 \ldots$ beziehungsweise mit den Fehlern $\pm m_1, \pm m_2, \pm m_3 \ldots$ behaftet sind. Bezeichnet nun $\mathfrak{M}$ den mittleren Fehler der aus den Beobachtungsgröfsen berechneten Function, so kommt es darauf an, aus $m_1, m_2, m_3 \ldots$ $\mathfrak{M}$ zu finden, wenn

$$u = F(t_1, t_2, t_3 \ldots)$$

gegeben ist.

Es sei 1. $$u = t_1 + t_2,$$

so ist $$u \pm \mathfrak{M} = t_1 \pm m_1 + t_2 \pm m_2$$

und $$\pm \mathfrak{M} = \pm m_1 \pm m_2$$

zu setzen. Man erhält

sowohl $$\mathfrak{M}\,\mathfrak{M} = m_1 m_1 + 2 m_1 m_2 + m_2 m_2,$$

als $$\mathfrak{M}\,\mathfrak{M} = m_1 m_2 - 2 m_1 m_2 + m_2 m_2,$$

also ist der mittlere Werth:

$$\mathfrak{M} = \sqrt{m_1 m_1 + m_2 m_2}.$$

Wäre $m_1 = m_2$, so würde

$$\mathfrak{M} = m_1 \sqrt{2} = m_1\ 1{,}4142136$$

sein.

2. Ist u aus mehr als 2 Gröfsen zusammengesetzt, so werden bei der Bildung der $\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}$ die doppelten Produkte $2 m_1 m_2, 2 m_1 m_3, 2 m_1 m_4 \ldots$ wegen des doppelten Vorzeichens sich ebenfalls aufheben und deshalb

$$\mathfrak{M} = \sqrt{m_1 m_1 + m_2 m_2 + m_3 m_3 + \ldots}$$

sein. Ist also wieder $m_1 = m_2 = m_3 \ldots$ und die Zahl der Beobachtungsgröfsen $= n$, so ist

$$\mathfrak{M} = m_1 \sqrt{n}.$$

Ist demnach u gleich der Summe mehrerer Beobachtungsgröfsen von gleicher Genauigkeit, so wird der mittlere Fehler $\mathfrak{M}$ derselben in

demselben Verhältnifs zunehmen, die Genauigkeit derselben also in demselben Verhältnifs abnehmen, wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungsgröfsen wächst, mithin die Anzahl der zum Behufe gleicher Genauigkeit anzustellenden Beobachtungen der Anzahl der Theile proportional zu nehmen sein.

Wäre also z. B. ein Winkel aus zwei Theilen zusammengesetzt zu bestimmen, so würde jeder Theil durch eine doppelte Wiederholung zu mefsen sein, um eine gleiche Genauigkeit zu erhalten.

§. 409.

Bezeichnen demnach bei einem zusammengesetzten Nivellement m_1, m_2, m_3 .... die mittleren Fehler der Zielhöhen für die einzelnen Stationen, und ist μ der mittlere Fehler in der Bestimmung der Instrumenthöhe, so ist bei n Stationen beim Nivellieren aus den Endpunkten:

$$\mathfrak{M} = \sqrt{m_1 m_1 + m_2 m_2 + n \mu \mu},$$

also bei gleicher Länge d der Stationen

$$\mathfrak{M} = \sqrt{n} \, . \sqrt{m_1 m_1 + \mu \mu}$$

und beim Nivellieren aus der Mitte

$$\mathfrak{M} = \sqrt{2 m_1 m_1 + 2 m_2 m_2 + \ldots . + 2 m_n m_n}.$$
$$= \sqrt{2} \sqrt{m_1 m_1 + m_2 m_2 + \ldots .},$$

also bei gleicher Stationslänge

$$\mathfrak{M} = \sqrt{2 n \, . \, m_1 m_1} = m_1 \sqrt{2 n}.$$

Dritte Abtheilung.

Die graphische Darstellung der geometrischen Aufnahmen. Das Kartieren.

I. Die graphische Darstellung des Terrains auf dem Papiere.

A. Die zur Verzeichnung der Linien und Winkel dienenden Werkzeuge und ihr Gebrauch.

§. 410.

Eine vollständige Beschreibung und Abbildung der in den kleineren Reifszeugen enthaltenen Hand- und Einsatz- oder Stückzirkel nebst Einsatzstücken, Handreifsfedern, Federzirkeln u. s. w. darf hier, als allgemein bekannt, füglich übergangen werden; es sollen daher hier nur noch einzelne Bemerkungen über ihre nothwendigen Eigenschaften uud ihren Gebrauch, so wie eine kurze Beschreibung derjenigen Instrumente folgen, die dem praktischen Geometer bei manchen graphischen Arbeiten unentbehrlich sind.

§. 411.

Die Länge der Hand- und Stückzirkel schwankt zwischen 2 und 6 bis höchstens 8 Zoll; ihre Füfse, so wie das mittlere Stück des Charnierkopfes sind von gutem Stahl verfertigt und der in eine feine Spitze auslaufende Theil derselben, die Spitze, ist von pyramidalischer oder halbkonischer Form und gehärtet. Núr die vom Markscheider beim Zulegen mit dem Compasse angewandten Handzirkel bestehen aufser der nur einige Linien langen Stahlspitze ganz aus eisenfreiem Messing. Ein guter Zirkel mufs nicht nur einen völlig gleichmäfsigen, sondern auch einen so leichten Gang haben, dafs er durch einen leichten Druck des auf dem einen Schenkel liegenden Zeigefingers mehr geschlofsen, oder durch den Druck des zwischen den Schenkeln liegenden Mittelfingers mehr geöffnet werden kann. Diefs wird durch zweckmäfsiges Anziehen oder Lüften der scheibenförmigen Schraubenmutter des Kopfes mittelst eines beigegebenen Schlüfsels erreicht. Die mit dem Zirkel

abzunehmenden oder aufzutragenden Längen dürfen die Länge der Schenkel desselben nicht um Viel übertreffen, damit die Spitzen gegen das Papier möglichst senkrecht zu stehen kommen. Zu diesem Zwecke sind wohl Schenkel und Füfse des Zirkels nicht zusammengelöthet, sondern durch ein Charnier mit einander verbunden.

Bei den Stückzirkeln ist der früher festgelöthete Fufs jetzt zweckmäfsiger durch einen mit einem Charnier versehenen Nadeleinsatz vertreten, wie diefs Fig. 254 in II. g. I. zeigt.

Eben daselbst finden sich auch verzeichnet: ein Nullenzirkel, ein Federzirkel, wie er zweckmäfsig beim Auftragen des Quadratnetzes auf die Mefstischplatte angewandt werden kann, ein Universalzirkel und ein s. g. Fünfzigerzirkel, mit welchem Längen von 50 Ruthen sicher und leicht aufgetragen werden können.

§. 412.

Bei den Reifsfedern bestehen die Blätter oder Backen ebenfalls aus einerlei und gleichmäfsig gehärtetem Stahl, deren untere zugeschärfte Enden noch mehr gehärtet sind. Bei den Handreifsfedern müfsen zur Erzielung gleichmäfsiger Striche die Blätter nach Innen federn und sind dieselben dann mit einer Druck- oder Stellschraube versehen. Für die Stückreifsfedern dagegen reicht eine Federung der Blätter nach Aufsen hin und werden dann beide durch eine Klemmschraube bis zu der der Dicke des Strichs entsprechenden Stellung genähert. Die erstere Einrichtung hat auch noch den Vortheil einer stärkeren Federkraft der Blätter. In beiden Fällen aber müfsen die Backen bei der Bewegung ihrer Schraube sich gleichmäfsig und sanft nähern oder von einander entfernen. Nach dem Gebrauch der Reifsfeder sind die inneren Flächen der Backen sorgfältig durch das Durchziehen eines weichen Papiers zu reinigen, zu welchem Zwecke auch wohl das eine Blatt durch ein Gelenk mit dem andern verbunden ist.

Die älteren englischen Constructionen der Zeicheninstrumente findet der Leser in G. Adam's geometrischen und graphischen Versuchen; übersetzt von Geifsler, Leipzig 1795.

§. 413.

1. Der Stangenzirkel.

Er dient zum Mefsen und Auftragen solcher Längen, bei denen der Hand- oder Stückzirkel nicht mehr angewandt werden kann. Sein Hauptbestandtheil ist eine drei- oder fünfseitige prismatische Stange AB (Figg. 172 und 173) von Metall oder gut ausgetrocknetem Holz von 2 bis 4 Fufs Länge, an welcher zwei Metallhülsen C und D sich verschieben lafsen. Normal zur Achse des Prisma's sind an den Hülsen

cylindrische Ansätze festgelöthet, welche Zirkelspitzen E und F enthalten und von welchen letzteren die eine, E, meistens zum Herausnehmen eingerichtet ist, um sie mit einem Bleirohr oder einer Reifsfeder vertauschen zu können. Die eine der Hülsen, D, ist längs der ganzen Stange verschiebbar und kann durch eine Druckschraube G, welche gegen eine in der Hülse liegende Feder tritt, festgestellt werden. Die andere, C, steht mit dem hinteren Ende der Stange so in mittelbarer Verbindung, dafs ihr durch eine Mikrometerschraube H eine sanfte Bewegung ertheilt werden kann. Die Mikrometerschraube ist entweder, wie Fig. 172 zeigt, auf der horizontal liegenden Ebene der

Fig. 172.

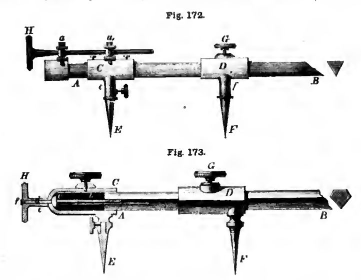


Fig. 173.

Stange zwischen Klemmen a und a_1 angebracht, von welchen a mit dem hinteren Ende der Stange in unmittelbarer Verbindung steht und die Kugel der Mikrometerschraube enthält, a_1 aber auf der zu bewegenden Hülse befestigt ist und die aufgeschlitzte Mutter der Schraube enthält. Der Schraube wird also nur eine drehende, ihrer Mutter mit der Hülse eine fortgleitende Bewegung ertheilt. Durch kleine Pressschräubchen kann der Gang der Schraube moderiert werden. Oder es wird, wie diefs Fig. 173 zeigt, der Schraube nicht nur eine drehende, sondern auch mit der sie umschliefsenden Hülse eine fortgleitende Bewegung ertheilt, während ihre Mutter in der Stange des Zirkels liegt. Zu diesem Zwecke enthält die Schraube b einen sich gegen die innere Fläche der Hülse legenden konischen Ansatz c und läuft in ein Paral-

lelepipedum d aus, über welche die Hülse e des Schraubenkopfes H geschoben und durch ein Zugschräubchen f befestigt werden kann, so dafs durch Umdrehen des Kopfes, der Schraube aufser der drehenden Bewegung auch noch eine fortgleitende in der festliegenden Mutter ertheilt wird, wodurch demnach auch die Hülse C die letztere Bewegung erhält.

Soll mit dem Stangenzirkel eine gegebene Länge MN abgegriffen werden, so wird die Spitze E zunächst in die Nähe des Anfangspunkts M gesetzt und die Hülse D so weit auf der Stange verschoben, dafs die Spitze F den Endpunkt N nahezu erreicht und die Druckschraube G angezogen. Dann setzt man F genau in N und bringt durch Umdrehung der Mikrometerschraube die bewegliche Spitze E genau in M.

Um die Spitzen E und F mit der gröfsten Genauigkeit in die Endpunkte M und N bringen zu können, was insbesondere beim Uebertragen von Mafsen auf Mafsstäbe nöthig wird, ist um jeden cylindrischen Ansatz e, f (Fig. 172) ein Ring gelegt, von welchem ein mit einem Charnier versehener Loupenarm ausgeht, so dafs für jedes beliebige Auge die Coincidenz der Spitze mit dem Endpunkte der Linie vollkommen scharf beobachtet werden kann.

§. 414.

2. Der Reductionszirkel.

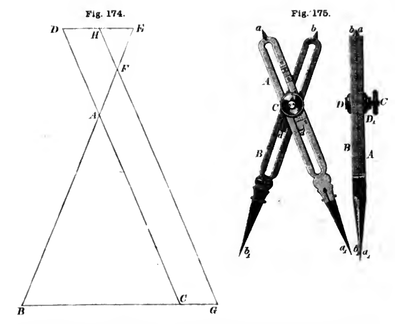
Die Construction und der Gebrauch des Reductionszirkels beruht auf dem planimetrischen Satze, dafs wenn in Fig. 174 $AB = AC$, so wie $AD = AE$ ist und nun der Kreuzungspunkt A der Geraden DAC, so auf BE verschoben wird, dafs $FH = FE$ wird,

$$AB : AD = BC : DE$$
$$\text{und } FB : FH = BG : HE.$$

Ist also $AD = \frac{m}{n} AB$, so ist auch $DE = \frac{m}{n} BC$ und ist ebenso $FH = \frac{l}{n} FB$, so ist auch $HE = \frac{l}{n} BG$.

Dieser Eigenschaft wegen kann daher der Zirkel bei der Verjüngung der Karten und Pläne mit grofsem Nutzen angewandt werden.

Fig. 175 stellt etwa in halber wahrer Gröfse einen Reductionszirkel in vorderer und Seitenansicht dar. Er besteht aus zwei gleichgeformten Stangen A und B, an deren Enden Stahlspitzen a, a_1, b, b_1 angelöthet und die der Länge nach mit Einschnitten versehen sind. In diesen kann, wenn der Zirkel geschlofsen ist, nämlich die Stangen sich decken, der mit einer Druckschraube C versehene Kopf DD_1 des Zirkels verschoben und an jedem beliebigen Punkte festgestellt werden. Um während des Schliefsens eine Verschiebung der Schenkel auf einander



zu vermeiden, enthält der eine Schenkel eine halbcylindrische Erhöhung c, auf welche die Vertiefung des anderen pafst. Nach dem Vorhergehenden werden daher, wenn nach erfolgtem Anziehen der Schraube $D D_1$ die Schenkel wieder geöffnet werden, die Entfernungen je zweier Spitzen in demselben Verhältnifs stehen, welches die veränderlichen Längen der Schenkel zu einander haben. Zur Bestimmung dieses Verhältnisses ist an der einen Seite der Einschnitte eine Theilung 1. 2. 3.... 10 (bei einigen Zirkeln auch bis 12) vorhanden, zu welcher der mit dem Kopfe verbundene Schieber d, der durch die Einschnitte seine Führung erhält, den Indexstrich i trägt.

Vor dem Gebrauche löst man daher zuerst die Druckschraube C, schliefst die Schenkel, schiebt den Index auf die Ziffer für die verlangte Verjüngung, also z. B. für $1/3$ auf die Ziffer 3 und zieht darauf die Druckschraube wieder so fest an, dafs dem Wiederöffnen kein Hindernifs entgegensteht, ohne aber eine abermalige Verschiebung des Indexstriches befürchten zu müfsen. Alsdann ist in dem vorliegenden Falle die Länge $a b$ gleich dem Drittel jeder abgenommenen Länge $a_1 b_1$. Es ist ersichtlich, dafs der Reductionszirkel auch bei der Construction der Mafsstäbe, um eine bestimmte Länge in eine vorgeschriebene Zahl gleicher Theile zu theilen, mit Nutzen angewandt werden kann.

Nach dem vorangeschickten Satze ist die Bestimmung der Theilstriche auf dem Schenkel des Zirkels sehr einfach. Da in Fig. 174 $BC : DE = AC : AD$, so ist, wenn man den Abstand der Spitzen jedes Schenkels $= 1$ setzt,

für die Verjüngung	der Abstand des Punktes A von der unteren Spitze C
$1/2$	$= 2/3 = 0{,}6666\ldots$
$1/3$	$= 3/4 = 0{,}75$
$1/4$	$= 4/5 = 0.8$
$1/5$	$= 5/6 = 0{,}8333\ldots$
$1/6$	$= 6/7 = 0{,}8571\ldots$
$1/7$	$= 7/8 = 0{,}875$
$1/8$	$= 8/9 = 0{,}8888\ldots$
$1/9$	$= 9/10 = 0.9$
$1/10$	$= 10/11 = 0{,}90909\ldots$

Hiernach würde also der Theilstrich für jede der angegebenen Verjüngungen durch Anfertigung eines Transversalmafsstabes, der noch Tausendstel genau und Zehntausendstel durch Schätzung angiebt, für den Abstand der Spitzen $= 1$ sich ergeben. Da aber der auf der Platte *d* (Fig. 175) vorhandene Indexstrich einen bestimmten Abstand α von dem Durchschnittspunkte der Achsen der Schenkel, d. h. von der Mitte des Zirkelkopfes hat, so wird zum Auftragen jedes Theilstrichs von der unteren Spitze des Zirkels jede der in dem Vorhergehenden angegebenen Mafsen noch um den in Theilen des Mafsstabes ausgedrückten Abstand α zu vermindern sein.

Zur leichteren Feststellung der Theilstriche mit dem Index enthalten einige Reductionszirkel noch eine an der Seite der einen Stange angebrachte Mikrometerschraube als Stellschraube. (Siehe G. Adam's geometrische und graphische Versuche etc. Taf. III.)

Bei dem Halbierungszirkel, der zur Halbierung der Linien dient und insofern als eine besondere Art des Reductionszirkels angesehen werden kann, trägt der Charnierkopf des Handzirkels in den Verlängerungen seiner Schenkel noch zwei Schenkel von halber Länge der ersteren.

§. 415.

3. Der dreifüfsige Zirkel.

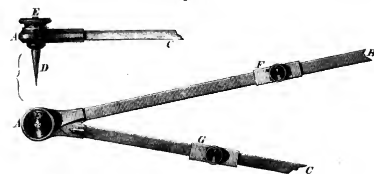
Man bedient sich desselben vorzugsweise zum leichteren Auftragen der Dreiecke eines mit der Mefskette aufgenommenen Dreiecksnetzes; er kann aber auch beim Copieren der Pläne oft gute Dienste leisten. Zum Abtragen nicht grofser Dreiecke dient ein fünf bis acht Zoll langer Handzirkel, mit welchem noch ein dritter Schenkel so verbunden ist,

dafs letzterer nicht allein in einem normal zum Charniere des Handzirkels stehenden Gewinde, sondern auch noch um eine damit verbundene Achse sich drehen läfst. Hierdurch kann der dritte Schenkel in jede beliebige Stellung zu den Schenkeln des Handzirkels gebracht werden.

Für gröfsere Dreiecke ist der in Fig. 176 dargestellte Apparat geeigneter. Er besteht aus zwei prismatischen Stangen AB, AC von 10 bis 20 Zoll Länge, die in A durch ein Charnier verbunden sind.



Fig. 176.



Unter letzterem befindet sich eine Stahlspitze D; durch eine Pressschraube E können beide Stangen festgestellt werden. Längs derselben lafsen sich wie beim Stangenzirkel der Fig. 172 zwei mit Spitzen versehene Hülsen F und G verschieben und durch Druckschrauben f und g feststellen.

Der Gebrauch dürfte sich hieraus von selbst ergeben.

Anmerkung. Die erstere Art findet sich in H. g. I. Fig. 264 abgebildet.

§. 416.

4. Die verjüngten Mafsstäbe.

In der praktischen Geometrie ist beim Entwerfen der Karten nur von den verjüngten Mafsstäben, auf welchen das Verhältnifs zwischen einer bestimmten Länge auf der Karte und dem entsprechenden natürlichen Mafse dargestellt ist, die Rede. Man drückt die Verjüngung meistens durch einen Stammbruch aus und bezieht sie direct auch nur auf die Länge, nicht aber auf die Fläche.

Obwohl eine nach einem gröfseren verjüngten Mafsstabe entworfene Karte zwar eine genauere Bestimmung der einzelnen Mafsen zuläfst, so verliert sie doch auf der anderen Seite an Uebersichtlichkeit, weshalb man hinsichtlich der Wahl der Verjüngung im Allgemeinen das Princip

befolgen mufs, den Mafsstab so klein zu wählen, als es der Zweck der Karte gestattet, so dafs der letztere allein die Gröfse der Verjüngung bestimmen mufs.

Uebrigens sind in den verschiedenen Staaten die vorgeschriebenen Verjüngungen sehr verschieden; im Allgemeinen setzen dabei die älteren Vorschriften kleinere Verjüngungen fest, als die neueren, welcher Umstand nicht nur durch die Vervollkommnung der Mefsinstrumente, sondern auch durch die jetzigen befseren Methoden des Mefsens sich erklärt. Folgende Verjüngungen sind etwa im Allgemeinen als mafsgebend anzusehen*).

Für Baurifse $\frac{1}{100}$, Durchschnitte $\frac{1}{50}$, Aufnahme von Bauplätzen $\frac{1}{200}$.

Für ökonomische Aufnahmen, bei welchen also die Bestimmung des Inhalts der Grundstücke und deren Theilung den Hauptzweck ausmacht, dienen $\frac{1}{1000}$ bis $\frac{1}{2500}$ **).

Bei Forstaufnahmen für die Originalblätter $\frac{1}{5000}$, für die Bestandeskarten $\frac{1}{10000}$, für die Bodenkarten $\frac{1}{20000}$ und für grofse Uebersichtskarten $\frac{1}{40000}$ bis $\frac{1}{80000}$.

Für topographische Aufnahmen nach der verschiedenen Genauigkeit $\frac{1}{10000}$ bis $\frac{1}{40000}$.

Für militairische Recognoscierungen $\frac{1}{20000}$ bis $\frac{1}{30000}$.

Bei bergmännischen Aufnahmen für Grubenrifse $\frac{1}{400}$ bis $\frac{1}{700}$ und für Uebersichtspläne $\frac{1}{5000}$ bis $\frac{1}{10000}$.

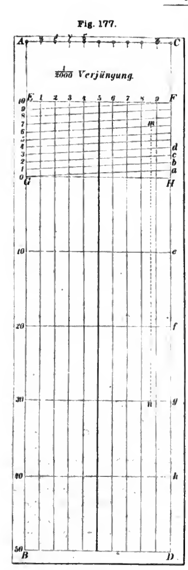
§. 417.

Die Construction verjüngter s. g. tausendtheiliger Mafsstäbe wird am zweckmäfsigsten auf völlig ebenen Brettchen von gut ausgetrocknetem Birnbaumholz vorgenommen. Man errichtet zu diesem Zwecke in den Endpunkten einer geraden Linie AB (Fig. 177), deren Länge etwas gröfser als die des Mafsstabes ist, die Normalen AC und BD, trägt auf sie 10 gleiche Theile $A\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma \ldots . \varkappa C$, und von B bis E die vom Muttermafs nach der vorgeschriebenen Verjüngung abgenommenen Länge, theilt BE in so viel gleiche Theile, dafs die Länge eines Theiles z. B. 10 Ruthen gleichkommt und trägt diese Längen auch von D bis F ab. Durch α, β, $\gamma \ldots . \varkappa$ zieht man von EF ab Parallelen, theilt ferner EG und FH in 10 gleiche Theile, zieht die Transversalen $0 . a$, $1 . b$, $2 . c$, $3 . d \ldots . 9 . F$, so wie auch $10 . c$,

*) Vorlesungen über praktische Geometrie u. s. w. von G. Schreiber. Karlsruhe, 1842. S. 102.

**) Beim ehemaligen Königlich Hannoverschen Landesökonomie-Collegium ist als gröfserer Mafsstab die Verjüngung $\frac{1}{2133}$, als kleinerer $\frac{1}{3200}$ festgesetzt, indem beziehungsweise 9 und 6 Hannoversche Zoll 100 Ruthen, für die 16füfsige Ruthe also 100 Ruthen 19200 Zoll darstellen.

Fig. 177.



20 . *f* . . . . und schreibt endlich den erhaltenen Theilpunkten die zugehörigen Ziffern bei.

Da nun die Längen 0 . 1, 1 . 2, 2 . 3 . . . ., *Ha*, *ab* . . . ., einzelne Ruthen, die auf den erwähnten Parallelen zwischen der Transversale *oa* und der Linie *oH* liegenden Stücke demnach Zehntelruthen darstellen, von letzteren aber die Hundertstelruthen noch geschätzt werden können, so dürfte die Abnahme einer vorgeschriebenen Länge von dem Mafsstabe sich leicht ergeben. So stellt z. B. die zwischen *m* und *n* liegende Länge 46,87 Ruthen dar.

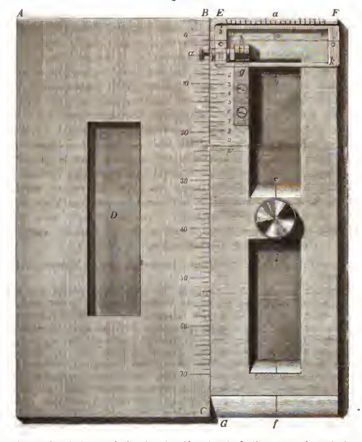
§. 418.

5. Der Ordinatograph.

Unter diesem Namen versteht man mehr oder weniger verschieden eingerichtete Zeichenapparate, mittelst welcher die bei der ökonomischen oder Kataster-Aufnahme gemefsenen Ordinaten durch ein einfaches Verfahren auf das Papier getragen werden können. In Fig. 178 ist ein solcher in natürlicher Gröfse dargestellt.

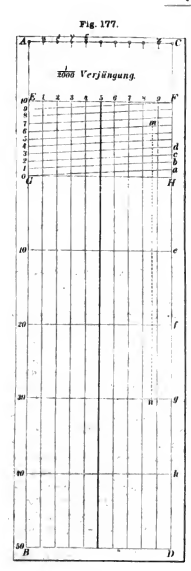
ABC bezeichnet eine etwa 1 Linie starke Metallplatte (Abscissenplatte), in der Mitte mit einem rechteckigen Ausschnitt *D* versehen und an deren einer längeren Seite *BC* entlang eine Rutheneintheilung nach einer bestimmten Verjüngung, hier nach $\frac{1}{3200}$ sich befindet. *EFG* stellt eine zweite mit zwei rechteckigen Ausschnitten versehene Metallplatte von der Dicke der ersteren vor, an welcher sie beliebig verschoben werden kann. An ihrer oberen

Fig. 178.



linksliegenden Seite enthält sie eine Veruiereintheilung, so dafs dadurch Zehntelruthen von der ersteren (den Abscissen) angegeben, Hundertstelruthen aber noch abgeschätzt werden können. Letztere Platte ist sowohl an ihren schmalen Seiten, als auch in den genannten Ausschnitten abgekantet und deren Mitte durch die Linie *aobcdef* bezeichuet (Ordinatenplatte). *H* ist ein Kopf zum Anfafsen für das Verschieben. Während durch die erwähnten Theilungen die Abscissen dargestellt werden, sind auf der abgeschrägten Ebene *EF*, von dem Nullpunkte *a* aus, nach beiden Seiten die Ordinaten bis auf Zehntelruthen und zehn Ruthen Länge verzeichnet. Zum befsern Erkennen der Theilungen findet sich auf der Platte *EFG* eine in einen Rahmen *ik* eingefafste Loupe,

Fig. 177.



20 . f . . . . und schreibt endlich den erhaltenen Theilpunkten die zugehörigen Ziffern bei.

Da nun die Längen 0 . 1, 1 . 2, 2 . 3 . . . ., Ha, ab . . . . einzelne Ruthen, die auf den erwähnten Parallelen zwischen der Transversale oa und der Linie oH liegenden Stücke demnach Zehntelruthen darstellen, von letzteren aber die Hundertstelruthen noch geschätzt werden können, so dürfte die Abnahme einer vorgeschriebenen Länge von dem Mafsstabe sich leicht ergeben. So stellt z. B. die zwischen m und n liegende Länge 46,87 Ruthen dar.

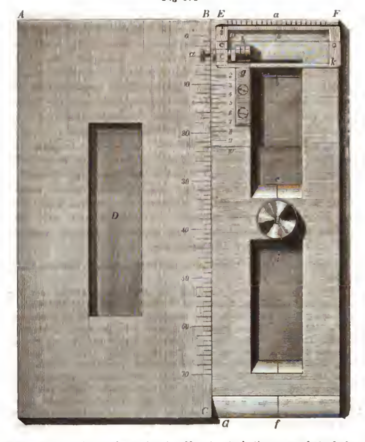
§. 418.

5. Der Ordinatograph.

Unter diesem Namen versteht man mehr oder weniger verschieden eingerichtete Zeichenapparate, mittelst welcher die bei der ökonomischen oder Kataster-Aufnahme gemefsenen Ordinaten durch ein einfaches Verfahren auf das Papier getragen werden können. In Fig. 178 ist ein solcher in natürlicher Gröfse dargestellt.

ABC bezeichnet eine etwa 1 Linie starke Metallplatte (Abscissenplatte), in der Mitte mit einem rechteckigen Ausschnitt D versehen und an deren einer längeren Seite BC entlang eine Rutheneintheilung nach einer bestimmten Verjüngung, hier nach $\frac{1}{3200}$ sich befindet. EFG stellt eine zweite mit zwei rechteckigen Ausschnitten versehene Metallplatte von der Dicke der ersteren vor, an welcher sie beliebig verschoben werden kann. An ihrer oberen

Fig. 178.



linksliegenden Seite enthält sie eine Verniereintheilung, so dafs dadurch Zehntelruthen von der ersteren (den Abscissen) angegeben, Hundertstelruthen aber noch abgeschätzt werden können. Letztere Platte ist sowohl an ihren schmalen Seiten, als auch in den genannten Ausschnitten abgekantet und deren Mitte durch die Linie *a o b c d e f* bezeichnet (Ordinatenplatte). *H* ist ein Kopf zum Anfafsen für das Verschieben. Während durch die erwähnten Theilungen die Abscissen dargestellt werden, sind auf der abgeschrägten Ebene *E F*, von dem Nullpunkte *a* aus, nach beiden Seiten die Ordinaten bis auf Zehntelruthen und zehn Ruthen Länge verzeichnet. Zum befsern Erkennen der Theilungen findet sich auf der Platte *E F G* eine in einen Rahmen *i k* eingefafste Loupe,

welche für jedes Auge mittelst eines in senkrechter Richtung verschiebbaren Stiftes und mittelst eines Charniers *h* in die richtige Lage zum Erkennen der Theilung gebracht werden kann. Die in Fig. 268 von H. g. I. gegebene Seitenansicht macht diese Einrichtung deutlicher.

Der Gebrauch des Ordinatographen ist folgender: Man legt die Ordinatenplatte *EFG* so an die auf der Karte vorhandene Abscissenlinie, dafs ihr Nullpunkt mit dem Punkte *a* (Null) zusammenfällt, bringt darauf die Abscissenplatte *ABC* so an jene, dafs auch ihr Nullpunkt mit dem Index des Verniers coincidiert und stellt dann *ABC* durch ein darauf gelegtes Gewicht fest. Verschiebt man nun an ihr die kleinere Platte so weit, bis die erste, zweite, dritte .... Abscisse des Manuals von ihrem Indexstriche abgeschnitten wird, so kann man längs *EF* auf der entsprechenden Seite des Nullpunktes die zugehörige Ordinate mittelst eines beigegebenen Stifts durch ein kleines Löchelchen darstellen und durch einen kleinen Strich mit einer am anderen Ende vorhandenen Bleifeder kenntlich machen. Diese Arbeit setzt man bis zu 50 Ruthen der Abscissenachse fort und wiederholt dann das vorige Verfahren bis zum Ende der Abscissenachse.

Anmerkung. Dieser Ordinatograph ist von dem hiesigen Geometer Engelke angegeben.

Obgleich derselbe, dem Auftragen der Coordinaten mittelst des Zirkels und Mafsstabes gegenüber, bedeutende Vortheile gewährt, so ist doch nicht zu verkennen, dafs nicht allein nach längerem Gebrauche die Ordinatentheilung durch die Nadelspitze verletzt erscheinen, sondern dafs auch durch die wegen eines mangelnden Verniers erforderlichen nahe liegenden Striche der Theilung eine grofse Anstrengung des Auges erfordert wird. Deshalb darf die durch den intelligenten hiesigen Geometer Hoyer eingeführte mechanische Vorrichtung, wodurch beiden Mängeln abgeholfen wird, als eine wesentliche Verbefserung des Ordinatographen bezeichnet werden. Auf dem oberen Ende der Ordinatenplatte finden sich zwei aufgeschraubte Platten *a* und *b* mit ihren Längskanten normal zur bezeichneten Abscissenachse aufgeschraubt, zwischen welchen ein prismatischer Körper *c* schlittenartig in der Richtung der Ordinatenachse bewegt und durch eine Klemmschraube festgestellt werden kann. Die Längskante der nach Hinten liegenden Platte *b* trägt die Ordinatentheilung, analog der Abscissentheilung auf der Abscissenplatte, der Fufs des Körpers *c* dagegen den Vernier, so dafs mit Bequemlichkeit Zehntelruthen abzulesen sind. Auf *c* ist der in eine Hülse endende Träger *d* für den cylindrischen Nadelhalter *e* befestigt, so dafs die Spitze der Nadel in der Verlängerung der Abscissenachse liegt. Durch einen Druck auf den Kopf des Nadelhalters kann man die Nadel in die Karte dringen lafsen, um das Ende der Ordinate zu bezeichnen, aber bei nachgelafsenem Druck durch eine den Cylinder *e* umgehende Spiralfeder von selbst in die ursprüngliche Lage zurückgebracht werden. Durch eine an dem unteren Ende von *e* angebrachte Schraube endlich läfst sich ein zu tiefes Eindringen der Nadel in das Papier verhindern. Der Raum gestattet nicht, hier noch einige andere nicht unwesentliche Verbefserungen an dem Ordinatographen zu beschreiben und es ist zu wünschen, dafs Herr Hoyer dieselben durch baldige Veröffentlichung dem zeichnenden Publikum bekannt mache.

§. 419.

Wenn man die mit einem kleinen Theodolith oder einer nicht zum Znlegen eingerichteten Boussole gemefsenen Winkel einer kleineren, nach der Umziehungsmethode aufgenommenen Flur auf die Karte tragen will, so kann man sich dazu vollkreisiger Transporteure und des Gattermann'schen Quadranten-Transporteurs bedienen. Demselben Zwecke diente früher auch wohl der Sehnenmafsstab oder geradlinichte Transporteur, wenn die Winkel entweder nur mit geringer Schärfe auf dem Felde gemefsen werden konnten, wie z. B. mit der Mefskette, oder man mit einer nur annähernden Genauigkeit der Construction sich zufrieden stellen wollte. Allein weil durch die berechneten Coordinaten aller Winkelpunkte eines Polygons jeder folgende Winkelpunkt unabhängig von dem vorhergehenden sich bestimmen läfst, so sind die erwähnten Zeichenapparate überflüfsig. Man findet dieselben dargestellt und beschrieben u. a. in H. g. I. §. 502 u. f.

B. Abbildung der Horizontalprojection aufgenommener Fluren, die noch als eben angesehen werden dürfen.

1. Abbildung einzelner Grundstücke und kleiner Fluren.

§. 420.

1. Ist eine kleinere Flur mit dem Theodolith nach der Umziehungsmethode anfgenommen, so wendet man, bei der Erreichung möglichster Genauigkeit, in Bezug auf die Ausgleichung der gemefsenen Winkel und Seiten, die im §. 364, 1 angegebene Berechnung an, bestimmt dann, unter Annahme der einen Polygonseite als Abscissenachse, nach §. 304 die reducierten Winkel aller anderen Seiten und nach §. 309 die Coordinaten aller anderen Winkelpunkte, die man auf die Karte trägt und wodurch dann die Polygonseiten sich ergeben. Sind im Innern des Polygons bei der Aufnahme noch Bindelinien gemefsen, so werden die Projectionen derselben aus den aufgetragenen Bindepunkten sich ebenfalls ergeben. Dann erfolgt noch die Verzeichnung der gemefsenen Ordinaten (Ueberschläge) in der dem Mefsmanuale entsprechenden Ordnung und Lage, wobei man, wenn es der Mafsstab gestattet, sich eines Ordinatographen bedienen kann. In den gewöhnlichen Fällen kann man indessen zur Ausgleichung der Winkel das im §. 309 angegebene Verfahren benutzen und dann weiter, wie vorhin angegeben ist, verfahren.

2. Ist die Flur mit dem Mefstische aufgenommen, so ist das Polygonnetz bereits verzeichnet und es bedarf daher nur noch der Verzeichnung derjenigen Coordinaten, die auf dem Felde nach einem eigens geführten Manuale aufgenommen wurden.

3. Bei der Aufnahme einer Flur mit der Boussole ist vor der Entwerfung des Polygonnetzes oder der eigentlichen Zulage, der Entwurf der sogenannten Präparationszulage erforderlich, die den Zweck hat, der zu entwerfenden Karte dieselbe Lage gegen die Himmelsgegenden zu geben, wie sie die Feldflur hat. Zu diesem Zwecke verzeichnet man auf einem unverrückten Reifsbrette oder Zeichentische nach einem kleinen Mafsstabe alle Standlinien und umschliefst das entstandene Polygon mit einem Rechtecke, dessen Seiten und deren Abweichungswinkel man mifst. Nach diesen Winkeln wird nun der Zeichentisch richtig und zugleich horizontal gestellt, dann mit Bleistücken beschwert, auch der Anfangspunkt der Zulage entsprechend dem der Präparationszulage gewählt und darauf das Netz der Standlinien verzeichnet, wobei man nach §. 313, 2 verfährt.

Zeigen sich bei der Bestimmung der Stand- und Winkelpunkte durch die Richtlinien kleine Differenzen, die man als unvermeidliche Fehler betrachten kann, so wird von dem entstandenen kleinen Dreiecke ein mittlerer Punkt genommen und dieser nun zur Bestimmung anderer Winkelpunkte benutzt. Nach der Zulage verzeichnet man sowohl die magnetische Meridianlinie, als auch die Mittagslinie des Ortes und zeichnet die Einzelnheiten der Flur nach dem Manuale weiter auf.

4. Ist die übersichtliche und zugängliche Flur nach der Dreiecksmethode (§. 331) mit der Mefskette (oder mit Mefsstäben) aufgenommen, so sind zunächst die Vier- und Dreiecke in derselben Anordnung, wie sie im Manuale der Hauptlinien (§. 330) neben einander liegen, zu verzeichnen, wobei man sich oft mit Vortheil eines dreifüfsigen Zirkels bedienen kann. Waren gröfsere Vierecke über die ganze Flur gelegt, so werden diese, so wie die Bindepunkte derselben mit den anderen Dreiecks- und Vierecksseiten zuerst aufgetragen.

Zeigt sich bei den Probelinien ein gröfserer Unterschied, als der ist, den man nach der Beschaffenheit des Terrains gestatten kann, so mufs der Fehler durch Nachmefsen auf dem Felde untersucht und verbefsert werden.

Stellte nun die Mefsung eine Aufnahme ohne Rücksicht auf ihre Parcellen dar (§. 330), so erfolgt, wie in 1., die Auftragung der gemefsenen Ordinaten (Ueberschläge). Wurden aber die Parcellen der Flur mit aufgenommen (§. 335), so sind wieder die Bindepunkte in den aufgetragenen Seiten zu construieren, die Bindelinien zu ziehen, und dann die Coordinaten nach dem Mefsmanual aufzutragen.

Bei einer nicht übersichtlichen, also nach der Umziehungsmethode aufgenommenen Flur werden zunächst die nach §. 336 mit der Mefskette gemefsenen Winkel zu berechnen sein; darauf ist jeder

derselben, wie im §. 309 angegeben wurde, zu verbefsern, eine der Polygonseiten als Abscissenachse anzunehmen und in Bezug auf diese wieder nach §. 304 die Neigung jeder anderen Seite zu berechnen. Nach der Berechnung der Coordinaten sämmtlicher Winkelpunkte (§. 309) sind dieselben dann wieder auf das Papier zu tragen, worauf alsdann die Verzeichnung des aufgenommenen Details erfolgt.

5. Nachdem nun auf diese Weise die aufgenommenen Baulichkeiten, die Begränzungen der verschiedenen Culturarten u. s. w. auf der Karte in Blei dargestellt sind, bezeichnet man die Eckpunkte der Dreiecke und Polygone mit kleinen sie umgebenden Nullen und nach dem Mefsmannale mit den entsprechenden Ziffern mit schwarzer Tusche, so wie man auch sämmtliche aufgetragenen Begränzungen mit schwarzer Tusche auszieht. Die so erhaltene Originalkarte dient alsdann zum Auftragen der Projecte oder bei ökonomischen Aufnahmen zur Berechnung des Inhaltes und zur Theilung. Man giebt womöglich der Projection der Flur die Lage auf dem Papiere, dafs Norden Oben liegt, oder, wie es bei langgestreckten Eisenbahnkarten, Wafserbaurifsen etc. der Fall sein kann, die gröfste Ausdehnung mit der Länge des Plans zusammenfällt; nie darf aber Norden Unten liegen.

2. Abbildung gröfserer Fluren.

§. 421.

Hierbei beginnt man mit dem Auftragen der nach §. 369 berechneten Coordinaten der Winkelpunkte des trigonometrischen Dreiecksnetzes, zu welchem Zwecke man, wie im §. 375 angegeben ist, über die zu entwerfende Karte in Bleilinien ein Quadratnetz legt und in diesem den Ursprung der Coordinaten, der Ausdehnung der Flur entsprechend, bestimmt. Darauf folgt dann die Verzeichnung des Details.

1. Ist das Detail mittelst des Theodoliths aufgenommen, und sind von den einzelnen zusammenhängenden Polygonen nach den im §. 374 gegebenen Andeutungen die Coordinaten der Winkelpunkte sämmtlicher Polygone in Bezug auf das Coordinatensystem des Dreiecksnetzes berechnet, so werden dieselben ebenfalls zunächst aufgetragen und darauf dann nach dem vorigen Paragraphen das Detail verzeichnet.

2. Die Aufnahme des Details mittelst der Mefskette kommt vorzugsweise bei der Aufnahme der Feldmarken vor. Wegen der meistens nachfolgenden Theilung und s. g. Verkoppelung ist es zur Vermeidung unbequem grofser Karten nothwendig, die zu jenem Zwecke nach einem gröfseren Mafsstabe ($\frac{1}{2000}$ — $\frac{1}{1000}$) ausgeführten Karten in einzelnen Blättern für jedes s. g. Feld oder für eine Verbindung mehrerer Gewannen zu entwerfen, während die Uebersichtskarte der

Feldmark nach einem kleineren Mafsstabe ($\frac{1}{5000}$ — $\frac{1}{2000}$) ausgeführt wird.

Für beide Karten beginnt man wieder mit dem Auftragen der Coordinaten der Dreieckspunkte. Dann folgt die Construction der an die Seiten der Dreiecke sich anschliefsenden Vierecke oder Polygone mit ihren Bindepunkten, worauf dann schliefslich nach 1. das Auftragen des Details und die weitere Bearbeitung folgt.

Wäre auf der einen Specialkarte der eine Dreieckspunkt m, auf der angränzenden aber der darauf folgende n aufgetragen, so wird man zur Festlegung der Linie mn ein ähnliches Verfahren anzuwenden haben, wie es im §. 376 für zwei benachbarte Mefstischblätter beschrieben ist.

3. Bei der Aufnahme des Details mit dem Mefstische wird man nur nach den bereits vorhandenen Punkten des Netzes das fehlende Detail einzuzeichnen, und die einzelnen Planchen in der richtigen Lage mit einander zu verbinden haben.

C. Die weitere Ausarbeitung der Karten.

§. 422.

Bei Originalkarten reicht meistens schon die Angabe der Gränzen der Grundstücke und sonstiger Einzelnheiten der Flur durch das Ausziehen in schwarzer Tusche hin. Sollen aber auch die Culturarten, die natürlichen und künstlichen Gegenstände u. s. w. dargestellt werden, so bedient man sich dazu entweder blofs der Reifs- und Zeichenfeder und der schwarzen Tusche, oder der Farben, welche mit dem Pinsel aufgetragen werden. Die letztere Auszeichnungsmethode wendet man zur Zeitersparnifs und zur Erleichterung, die erstere aber (die Auszeichnung in schwarzer Manier) hauptsächlich dann an, wenn der Plan durch Lithographie oder Kupferstich vervielfältigt werden soll. Beim Anlegen der Farben ist besonders darauf zu sehen, dafs die Farbe die Contouren scharf begränzt und die Fläche gleichförmig wird. Gröfsere Flächen sind deshalb vor dem Anlegen mit dem Wafserpinsel überzuziehen, wodurch vermieden wird, dafs das trockne Papier die Farben nicht sogleich einsaugt. Auch sind gröfsere Flächen immer mit schwächeren Farben und mehrere Male anzulegen.

§. 423.

Die Farben für die verschiedenen Gegenstände des Terrains müfsen sich wo möglich der Farbe der Gegenstände im normalen Zustande nähern und sind nur dann abweichend zu wählen, wenn sie sich von verwandten Gegenständen nicht gehörig unterscheiden würden, in welchem

Falle sie also beliebig gewählt und deshalb auch von verschiedenen Zeichenkünstlern verschieden genommen werden.

1. Bezeichnung der Gebäude und sonstiger Baulichkeiten. Steinerne oder ausgemauerte Gebäude, Stadtviertel und Quartiere in den Flecken legt man blafs mit Karmin, oder einer Mischung von vorwaltendem Karmin und Gummigutt an; ausgezeichnete Gebäude bekommen einen etwas dunkleren Ton, auch giebt man bei ihnen wohl den Grundrifs ihrer Bedachung an, ohne aber deren Art zu berücksichtigen. Hölzerne Gebäude legt man mit Gummigutt an. Rechts und Unten giebt man den Gebäuden einen Schlagschatten von blafser schwarzer Tusche in einer Breite, die der Höhe des Sockels entspricht. Einige Zeichner umziehen, obgleich unpassend, die Gränzen der Gebäude noch mit einem dunkleren feinen Karminstrich, der mit der Reifsfeder ausgezogen wird, unterscheiden auch wohl noch Wohngebäude von Fabrik- und Oekonomiegebäuden und geben dem Roth für die letzteren noch einen gröfseren Zusatz von Gelb, dem Ziegelroth entsprechend.

Auf Karten, die nach einem kleineren Mafsstabe ausgeführt sind, giebt man den Gebäuden einen dunkleren Ton; daher auch die Mauern und Steinwände mit einem dunkleren Karminstrich bezeichnet werden.

Die verschiedenen Arten der Gebäude, als Kirchen, Capellen, Forsthäuser, Windmühlen u. dgl. m., deutet man durch beigesetzte, den Gegenstand bezeichnende Zeichen, oder durch beigeschriebene Namen an. Bei Berg- und Hüttenwerken pflegt man die Verschiedenheit durch das beigesetzte ältere chemische Zeichen anzudeuten.

Von den Befriedigungen werden Hecken und Heckenzäune durch kleine Tüpfelchen mit zwischengesetzten Strichen von Berggrün (cendre verte) bezeichnet; Plankenzäune durch einfache gelbe Linien, Lattenzäune durch gelbe Linien mit eingesetzten Pünktchen von schwarzer Tusche.

2. Bezeichnung der Gewäfser und ihrer Ufer. Ströme, Flüfse, Canäle, Seen, Teiche, Lachen werden blafs mit Blau (am besten läfst sich Berlinerblau verarbeiten) angelegt. Aufserdem erhalten sie an der Schattenseite einen der Uferhöhe angemefsenen Schlagschatten von blafser schwarzer Tusche. Will man die Strömung besonders bezeichnen, so kann diefs durch einen dunkleren, an beiden Seiten verwaschenen blauen Streifen geschehen. Die Tiefe des Strombettes deutet man durch beigeschriebene Zahlen (Coten) an. Bäche und nafse Gräben bekommen einen dunkleren Ton von Blau. Sümpfe unterscheiden sich von den Teichen nur durch den Mangel des Dammes. Morast wird durch ein blafses Blau mit grünen Horizontalstrichen bezeichnet. Buhnen oder Schlagten werden mit schwarzer

Tusche blafs angelegt und nachdem sie gemauert oder von Holz sind, mit rothen oder gelben Linien umzogen. Dieselben Farben gelten für die Schleusen. Sandbänke werden mit feinen Pünktchen von grellem Gummigutt bezeichnet; bei Geröllen und Geschieben an Stromufern sind die gelben Pünktchen mit dickeren Punkten von Karmin unterbrochen.

3. Bezeichnung des Bodens. Getreidefeld wird braun von gebrannter Terra di Siena angelegt. Einige wählen eine Mischung von Braun und Schwarz (Feldbraun). Auf Originalkarten bleibt dasselbe auch wohl weifs. Die Gränzen desselben deutet man bei einem gröfseren Mafsstabe durch feine Linien mit schwarzer Tusche an. Dasselbe gilt auch von den folgenden Culturarten. Trockene Wiesen werden mit einem matten Grün (aufgelöster Grünspan mit etwas Gummigutt gemischt) angelegt; nafse Wiesen erhalten aufserdem noch Horizontalstriche von etwas grellerem Blau. Durch diese blauen Streifen wird auch jeder andere nafse Boden bezeichnet. Hutung wird durch mehr ins Gelbe spielendes Wiesengrün dargestellt; Heiden werden mit blafsem Gummigutt angelegt und mit grünen Strichen durchzogen; dieselbe Farbe erhält der Moorboden, nur wird das Gelb mit braunen und blauen Strichen durchzogen; Torfstiche darin werden mit kurzen Schraffierstrichen eingefafst. Sandboden wird mit Pünktchen von grellem Gummigutt bezeichnet. Kies- und Lehmgruben werden gelb und roth punktiert, die Contouren schwarz schraffiert. Felsen und felsige Hänge bekommen ein gehacktes Ansehn von verwaschenem Braun und Schwarz, mit horizontalen und verticalen Strichen durchzogen; eben so Steinbrüche, nur erhalten diese regelmäfsigere Striche. Wald wird meistens mit einerlei Farbe bezeichnet, wie verschieden auch die Art des Bestandes ist. Häufig legt man das Laubholz mit Karmin, das Nadelholz mit einem schmutzigen Blaugrün an. Will man die Bestände unterscheiden, so dient für Eichenhochwald Gummiguttgelb, für Buchenhochwald karminroth, für Fichtenhochwald schwarzgrün, für Kiefern blafsschwarz, für gemischte Hochwaldbestände braungelb und für Schlagholz violet. Blöfsen bleiben weifs. Gebüsch, Alleen, einzelne Bäume werden durch kleine runde Tüpfelchen von Berggrün, mit Schlagschatten versehen, angedeutet. Haus- oder Gemüsegärten können mit einem röthlichen Braun, Obstgärten und Plantagen mit einem ins Blaue spielenden Grün angelegt werden; aufserdem erhalten sie berggrüne Tüpfelchen. Einige wählen für die ersteren Gärten auch ein gelbliches Grün. Anlagen erhalten Gartengrün mit Baumschlag und Wegen. Weingärten ebenfalls Gartengrün und einzelne Verticalstriche mit geschlängelten Linien von schwarzer Tusche, oder Violet (Rebenblau).

4. Bezeichnung der Wege auf festem Boden und über Gewäfser. Chausseen werden durch parallele mit der Reifsfeder gezogene schwarze Linien bezeichnet und mit schwärzlichem Braun angelegt; bei Eisenbahnen sind die Begränzungslinien blau. Landstrafsen und Feldwege werden wie die Chausseen angelegt, Fufssteige durch braun punktierte Linien bezeichnet. Dämme und Deiche von Erde werden durch 2 parallele Streifen von nicht ganz schwarzer Tusche bezeichnet und der Zwischenraum weifs gelafsen. Steinerne Brücken legt man mit Karmin von etwas dunklerer Einfafsung an; hölzerne Brücken und Stege mit Gummigutt. Zugbrücken, wie die letzteren, mit einem Rechteck mit Diagonalen von schwarzen Linien; auch Schiffbrücken erhalten Gelb, die Kähne werden mit schwarzen Umrifsen bezeichnet.

Für die farbige Ausführung der Karten ist dem Leser zu empfehlen: Doll's Anleitung zum Zeichnen und Ausarbeiten geometrischer Pläne und topographischer Karten. Carlsruhe, 1867, sowie auch in Bezug auf die schwarze Manier: Neutze's theoretisch-praktische Schule des Situationszeichnens nach Modellen. Cassel, Vollmann.

§. 424.

Die Ausarbeitung der Karten nach schwarzer Manier wendet man meistens nur bei einem Mafsstabe an, der kleiner als $\frac{1}{10000}$ ist.

1. Bei Bauwerken zeichnet man die Umrifse und durchzieht die Flächen mit parallelen Linien; bei ausgezeichneten Gebäuden wird diese Reihe noch von einer zweiten sie schneidenden überzogen. Mauern bezeichnet man durch dickere Striche; Plankenzäune durch feine Linien; bei Lattenzäunen erhalten diese Linien noch kleine Punkte; Heckenzäune werden durch kleine nach Unten offene Halbkreise, die durch Striche verbunden sind, bezeichnet.

Für die einzelnen Arten der Gebäude wendet man charakterisierende Zeichen an und ergänzt auch durch beigesetzte Namen.

2. Das Wafser deutet man durch zusammenhängende feine Linien an; bei den stehenden Gewäfsern sind es gerade Linien, bei den fliefsenden sanft gebogene Linien, die in der Richtung der Strömung gezogen werden. Bei den Sümpfen, wo die Wafseroberfläche unterbrochen ist, sind die geraden Linien unzusammenhängend, welche wieder bei dem Moraste Zickzacke oder Flammen bilden. Wegen der stets wellenförmigen Oberfläche des Meeres und der Seen werden diese auch wie die Ströme bezeichnet. Bei den Flüfsen zieht man die Linien um so dichter, je tiefer sie sind und um so gerader, je rascher die Strömung ist. Die Ufer werden schraffiert; trockene Flüfse punktiert. Von Schleusen und Wehren werden die Umrifse angegeben.

3. Bei der Bezeichuung des Bodens giebt man bei den Getreidefeldern die Furchen durch Linien an. Für den Graswuchs wählt man kleine aufrecht stehende Striche, die man nach dem verschiedenen Boden verschieden grofs nimmt und um so dichter stellt, je dichter das Gras steht. Sand wird durch feine Pünktchen bezeichnet; ist er mit Geröllen und Schutt gemengt, so werden gröfsere Punkte dazwischen gesetzt. Felsen zeichuet man so, wie sie von Oben gesehen erscheinen; auf ähnliche Weise stellt man Steinbrüche, Kies- und Lehmgruben dar. Bäume und Sträuche zeichnet man meistens im herabgelegten Zustande, etwa ähnlich der Contour des von der Seite gesehenen Baums. Weinbau bezeichnet man durch aufrechte, mit geschlängelten Linien umgebene Striche. Gärten durch punktierte Linien, den Wegen parallel.

4. Die Bezeichnung der Wege ist nach Beschaffenheit der Breite verschieden. Bei Kunststrafsen deutet man die Gräben durch zwei Paar dicht gestellte Linien an; Landstrafsen bekommen nur zwei Linien; gröfsere Feldwege eine dickere Linie; Fufswege eine punktierte Linie. Bei Brücken zeichnet man die Umrifse durch zwei Linien, deren Zwischenraum bei steinernen punktiert wird. Bei Zug- und Schiffbrücken wendet man die im vorigen Paragraphen angegebenen Bezeichnungen an, jedoch ohne Farben. Dämme und Deiche werden schraffiert.

§. 425.

Beim Beschreiben eines Planes soll man im Allgemeinen die Regel befolgen, dafs Norden Oben liegt und die Richtung der Schrift dem oberen Rande parallel ist; indessen werden die Namen der Flüfse, Strafsen, Wege u. s. w. diesen entlang geschrieben.

Hinsichtlich der Schriftarten wählt man meistens die stehende lateinische, Antiqua-, oder die liegende, Cursivschrift, auch wohl andere. Bei der Schrifthöhe richtet man sich theils nach dem vorhandenen Platze, theils nach der Bedeutung des Gegenstandes. Bei ökonomischen Karten werden die Flurtheile mit arabischen Ziffern numeriert und auf das Inhaltsverzeichniss bezogen; oder es wird der Inhalt in die Parcellen eingetragen.

Zum Orientieren einer Karte wird an einer passenden leeren Stelle die Richtung des magnetischen Meridians, so wie die Mittagslinie, hingezogen.

Endlich mufs noch ein Transversalmafsstab, nach welchem die Karte aufgetragen ist, gewöhnlich unter den Titel des Plans, gezeichnet werden

D. Abbildung der Unebenheiten des Erdbodens.

§. 426.

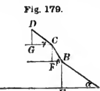
Da die Zeichenebene als Horizontalprojectionsebene auch die Horizontalprojectionen der Oberfläche eines unebenen Terrains mit enthält, so ist jetzt noch anzugeben, wie man durch eine der Natur der Sache angemeſsene Bezeichnuug die Unebenheiten der Erdoberfläche darstellen kann. Die erste richtige, auf wissenschaftliche Principien sich stützende Bergzeichnungstheorie wurde vor etwa 70 Jahren von dem Sächsischen Major Lehmann eingeführt und beruht zum Theil auf dem optischen Satze, daſs für parallele Lichtstrahlen die Helligkeit einer Fläche, unter übrigens gleichen Umständen, dem Cosinus ihres Neigungswinkels gegen die Horizontalebene proportional ist, wonach sich also eine Scale der Beleuchtung für alle Neigungswinkel von 0° bis 90° aus den trigonometrischen Tafeln aufstellen lieſse und das Maximum der Helligkeit durch Weiſs ohne Schattierung, das Minimum durch vollen Schatten, also durch Schwarz, bezeichnet werden könnte. Da aber in der Natur nur die aus Felsen bestehenden Bergabhänge unter einem gröſseren Winkel als 45° gegen den Horizont geneigt sind, alle übrigen aber kleinere Neigungswinkel als 45° bilden, so nahm Lehmann für das Minimum der Helligkeit einen Neigungswinkel von 45° an und stellte zur Darstellung jeder anderen weniger geneigten Fläche die allerdings nur annäherungsweise richtige Regel auf, daſs die Masse des Schwarzen sich zu der des Weiſsen eben so verhalten solle, wie ihr Neigungswinkel zum Ergänzungswinkel zu 45° sich verhält. Dadurch erhält man folgende Scale:

Neigungswinkel Grade	Verhältniſs des Schwarzen zum Weiſsen.	Abgekürztes Zahlen-Verhältniſs.
0	0 : 45	0 : 9
5	5 : 40	1 : 8
10	10 : 35	2 : 7
15	15 : 30	3 : 6
20	20 : 25	4 : 5
25	25 : 20	5 : 4
30	30 : 15	6 : 3
35	35 : 10	7 : 2
40	40 : 5	8 : 1
45	45 : 0	9 : 0

Drückt man also die verhältniſsmäſsige Masse des Schwarzen und Weiſsen durch gerade schwarze Striche und dazwischen liegende weiſse

Räume aus, so dafs die letzte Columne der vorstehenden Scale das Verhältnifs der Dicke des Strichs zu dem Zwischenraume zweier Striche bezeichnet, so wird man aus einem richtig schraffierten Berge nicht nur die Gröfse der Abdachung, sondern auch die Höhe jedes beliebigen Punktes derselben über der durch den Fufs gehenden Horizontalebene bestimmen können, welches insbesondere für den Militair von Wichtigkeit ist. Denn stellt z. B. $ABCD$ (Fig. 179) einen Theil der Abdachung eines Berges vor, so sind durch die Länge der Schraffierstriche die Linien AE, BF, CG, durch das Verhältnifs des Schwarzen zum Weifsen die Böschungswinkel α, β, γ bekannt und daher $BE = AE \operatorname{tg} \alpha$, $CF = BF \operatorname{tg} \beta$, $DG = CG \operatorname{tg} \gamma$.

Fig. 179.



§. 427.

Um nun einen nach §. 393 aufgenommenen Berg auf dem Papier abzubilden, trägt man die auf der Mefstischplatte befindlichen Umfangslinien der verschiedenen Horizontalebenen auf die Zeichenebene, giebt den Schraffierstrichen nach der bekannten Böschung mittelst der Scale des vorigen Paragraphen die erforderliche Dicke und an den betreffenden Stellen die bemerkte Richtung. Es ist aber noch zu bemerken, dafs die Dicke der Striche nur so grofs sein mufs, dafs sie in einer passenden Entfernung in einander zu verfliefsen scheinen, damit das Auge den Eindruck einer gewissen Dunkelheit, zugleich aber den einer gleichmäfsig beleuchteten Fläche erhält. Was die Länge der Striche innerhalb zweier Curven betrifft, so müfsen sie so lang gemacht werden, als es die Geschicklichkeit der Hand erlaubt, zugleich sind sie aber auch so kurz zu halten, dafs sie an den Stellen, wo sie wegen der vorhandenen Krümmung des Abhanges nicht parallel liegen können, weder an dem einen Ende zu fein, noch an dem anderen zu dick gemacht werden müfsen.

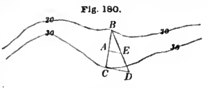
Anmerkung. Von allen Vorlagen über das Schraffieren der Berge bilden die von Lehmann eingeführten die zweckmafsigsten. M. vgl. Lehmann's Lehre der Situations-Zeichnung u. s. w. Mit 17 Kupfertafeln. Dresden, 1816.

§. 428.

Ein zweites Mittel, um ohne Verticalprojectionen die Terrainunebenheiten auf Karten darzustellen, besteht in der Verzeichnung der schon im §. 392 erwähnten Niveaucurven. Denkt man sich nämlich durch einen Berg in bestimmten, aber gleichen Verticalabständen Horizontalebenen gelegt, dafs die kürzeste Linie zwischen je zwei Punkten zweier

auf einander folgender Curven ganz in die Bergfläche fällt, so wird man aus der mehr oder weniger genäherten Lage der Curven auf die Neigung des Bergabhanges schliefsen können, so wie auch aus den beigesetzten Höhencoten die Höhe jedes beliebigen Punktes des Terrains sich bestimmen läfst. Denn ist z. B. A (Fig. 180) die Projection eines zwischen den Curven 20 und 30 liegenden Punktes, dessen Höhe über der Horizontalebene durch 30 bestimmt werden soll, so ziehe man durch A die Linie BC normal auf die beiden Curven, setze CD normal auf $BC = 10$ Fufs und ziehe BD, welche die zwischen den Curven 20 und 30 durch A gehende Linie des Bergabhanges sein wird, so wie durch A die Normale AE auf BC. Dann ist

Fig. 180.



$$AE : CD = AB : BC, \text{ folglich } AE = \frac{CD \cdot AB}{BC},$$

woraus die gesuchte Höhe sich ergiebt.

§. 429.

Was die Darstellung der Berge auf illuminierten Plänen betrifft, so ist zu beachten, dafs wenn man die Lehmann'sche Schraffiermethode mittelst der Zeichenfeder dabei anwenden wollte, manche Terrainbezeichnung, namentlich für eine Gebirgsgegend, dadurch an Deutlichkeit sehr verlieren würde. Obgleich man nun auch durch Striche mit dem Pinsel mittelst schwacher schwarzer Tusche bei einzelnen und wenig ansteigenden Bergen dem Verhältnifs des Schwarzen zum Weifsen sich nähern und auch die allmählichen Uebergänge von dem Dunklen zum Hellen dadurch erreichen kann, dafs man bei den stärkeren Neigungen die mit schwächeren Tönen begonnenen Striche mit stärkerer Tusche nachzieht; so bleibt diefs Verfahren bei Karten, auf deren schnelle Vollendung es ankommt, doch immer nur ein sehr Zeit raubendes und daher nur anwendbares, wenn man eine sorgfältige Ausführung beabsichtigt. In den gewöhnlichen Fällen scheint es daher hinreichend, wenn man die Niveaucurven durch feine Linien andeutet und durch Anlegen und Verwaschen mit schwarzer Tusche die mehr oder weniger starke Beleuchtung ausdrückt und besonders die Aufdämmungen, Ufer, Hohlwege u. dgl. m. durch Zeichnung deutlich darstellt.

E. Prüfung einer Flurmefsung.

§. 430.

Diese kommt vorzugsweise nur bei den ökonomischen Karten in Betracht und geschieht dadurch, dafs man von festliegenden Punkten

aus Linien quer über die Flur mifst, dann die Punkte bemerkt, in welchen die Linien von den innern Begränzungslinien geschnitten werden und eben so auch die normalen Abstände nicht zu entfernt liegender Dreieckspunkte bestimmt. Dann trägt man diese Linien auf das Papier und vergleicht die gemefsenen Längen und Abstände mit den entsprechenden auf der Karte. Eben so wird die Gröfse einzelner Parcellen in verschiedenen Gegenden der Flur bestimmt und der berechnete Inhalt mit dem der Karte verglichen. Bei diesen Vergleichungen dürfen die Statt findenden Unterschiede die durch bestimmte Gesetze erlaubten Fehler nicht übersteigen, falls die Mefsung nicht für unrichtig erkannt werden soll.

F. Das Copieren der Karten.

§. 431.

Bei dem Copieren einer Karte soll entweder derselbe Mafsstab beibehalten oder ein kleinerer angenommen werden, denn im Allgemeinen sind durch das Copieren vorzunehmende Vergröfserungen, wegen der zunehmenden Gröfse der Fehler, viel unzuverläfsiger als Verkleinerungen.

Im ersten Falle geschieht die Copierung entweder durch Durchzeichnen oder Durchpausen mittelst transparenten Oel- und Strohpapiers oder durch ein Netz von Quadraten, das man sowohl auf die Originalkarte, als auf die zu entwerfende Copie trägt und in welch letzteres Netz man Alles das zeichnet, was auf der Originalkarte in den entsprechenden Quadraten sich findet.

Soll aber eine Karte, auf einen andern Mafsstab reducicrt, copiert werden, so beruht das Verfahren auf dem planimetrischen Satze, dafs die Flächen ähnlicher Polygone wie die Quadrate ähnlichliegender Seiten sich verhalten. Man überzieht dann die Originalkarte ebenfalls mit einem Quadratnetz, mifst die Länge der entstandenen Rechtecksseiten a und b, berechnet dann nach dem obigen Satze die Länge der ähnlichliegenden Seiten α nnd β, trägt aus ihnen das Quadratnetz der Copie zusammen und zeichnet endlich mittelst des Reductionszirkels Alles wie vorhin aus. Ist das Verhältnifs, in welchem die Originalkarte verkleinert werden soll, $1 : \frac{m}{n}$, so ist $\alpha = \frac{a}{n} \sqrt{(mn)}$, $\beta = \frac{b}{n} \sqrt{(mn)}$ zu nehmen.

Bei den Verjüngungen wendet man bequem eigene Werkzenge an, die unter dem Namen Storchschnabel oder Pantographen*) bekannt sind.

---

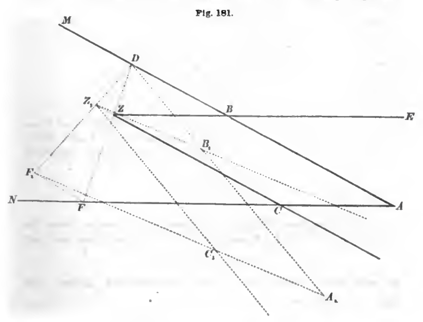
*) Von παν, παντος ganz und γραφειν schreiben.

§. 432.

Dio Construction und der Gebrauch des (älteren) Pantographen beruht auf folgenden Betrachtungen.

In Fig. 181 seien AM und AN zwei gerade Linien, mit welchen zwei andere ZE und ZF_1 so verbunden sind, dafs die Theile AB, AC, ZB und ZC ein Parallelogramm bilden. In der Linie AM sei D ein unverrückbarer Punkt, um welchen das Parallelogramm drehbar ist, F ein beliebiger Punkt der Geraden AN, aber Z liege in der Verbindungslinie DF. Während also der Winkel MAN sich beliebig vergröfsert

Fig. 181.



oder verkleinert, wird bei der Drehung des Liniensystems um D jeder Punkt desselben seine Lage nur in sofern ändern können, als $ABCZ$ ein Parallelogramm bleibt. Kommt nun bei dieser Drehung um einen bestimmten Winkel der Punkt F nach F_1, und Z nach Z_1, so bleibt Z_1 immer in der Verbindungslinie von D und F und es findet die Proportion Statt:

$$ZZ_1 : FF_1 = DB : DA.$$

Denn construiert man das Liniensystem in seiner durch die Drehung um D entstandenen Lage, so kommt A nach A_1, B nach B_1, C nach C_1. Da nun nach der Voraussetzung

$$BD : BZ = AD : AF,$$

aber $BD = B_1 D$, $BZ = B_1 Z_1$, $AD = A_1 D$ und $AF = A_1 F_1$ ist,

so ist auch $\quad B_1 D : B_1 Z_1 = A_1 D : A_1 F_1,$

und da ferner $\quad D B_1 Z = D A_1 F_1$ ist,

so ist $\quad \Delta B_1 D Z_1 \infty \Delta A_1 D F_1,$

folglich auch $\quad B_1 D Z_1 = A_1 D F_1.$

Da nun diese beiden Winkel den gemeinschaftlichen Scheitel D haben, nach der Voraussetzung aber die Punkte D, Z und F in einer Geraden liegen, so werden auch D, Z_1 und F_1 in einer Geraden liegen müfsen.

Da ferner $\quad DZ : DF = BZ : AF$

und auch $\quad DZ_1 : DF_1 = B_1 Z_1 : A_1 F_1,$

aber $\quad BZ = B_1 Z_1$ und $AF = A_1 F_1$ ist,

so ist $\quad DZ : DF = BZ_1 : A_1 F_1,$

folglich auch $\quad \Delta DZZ_1 \infty \Delta DFF_1$

und daher $\quad Z_1 Z \mathrel{\#} F_1 F,$

so wie $\quad ZZ_1 : FF_1 = DZ : DF = DB : DA.$

Führt man demnach den Punkt F auf dem Umfange einer Figur herum, so wird Z eine ihr ähnliche Figur darstellen. Findet mithin zwischen DB und DA ein vorgeschriebenes oder gegebenes Verhältnifs Statt, nämlich

$$DA : DB = n : 1,$$

so wird auch $\quad DF : DZ = n : 1$

und umgekehrt.

Für ein gegebenes Verjüngungsverhältnifs $n : 1$ werden daher die Punkte B und C so in den Linien AM und AN zu bestimmen sein, dafs

$$DB = \frac{DA}{n} = \frac{a}{n}$$

ist, wenn durch a die Länge von DA bezeichnet wird; alsdann wird $ZZ_1 = \frac{1}{n} FF_1$ sein.

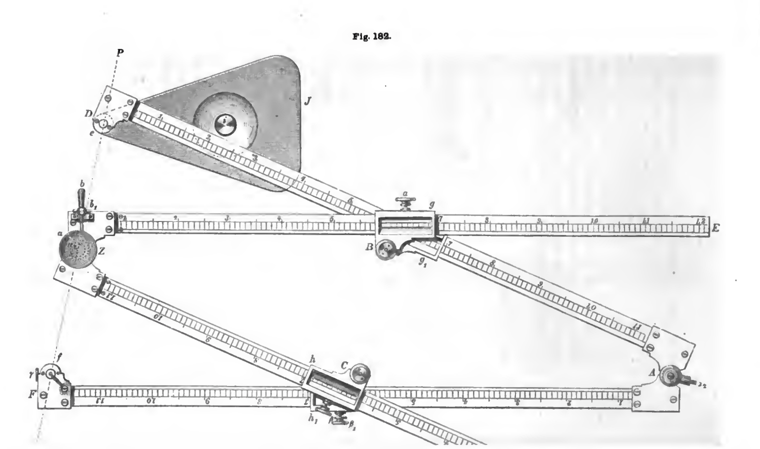
§. 433.

Auf den im vorigen Paragraphen angegebenen Sätzen beruht die Construction und der Gebrauch des in den Figg. 182—184 im Drittel wahrer Gröfse dargestellten Pantographen. Fig. 182 zeigt seinen Grundrifs, Fig. 183 die Seitenansicht und Fig. 184 die Vorderansicht durch die Linie PQ. Er besteht aus zwei Paar Armen (Stäben) von Holz oder Metall, AD und AF, ZE und ZG, welche in A und Z mit festen, in den Berührungsstellen B und C mit beweglichen Charnieren versehen sind. Die Arme des in Rede stehenden Pantographen sind von Holz.

Den beweglichen Charnieren kann durch ihre daran befestigten ausgeschnittenen Schieber g, g_1, h und h_1 eine solche Stellung gegeben



Fig. 182.



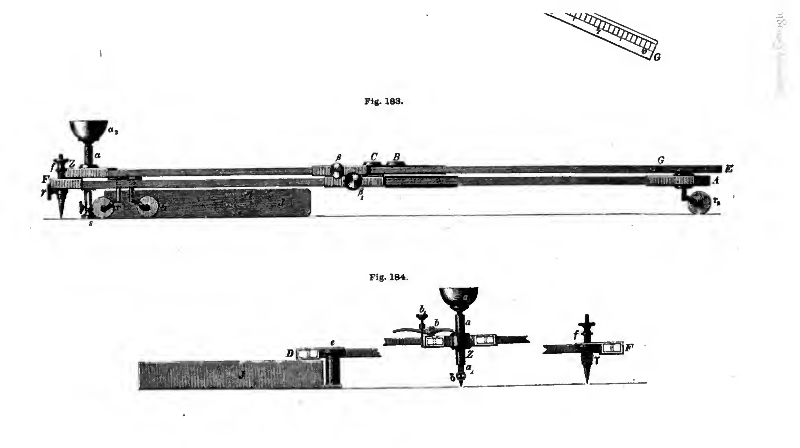


Fig. 183.

Fig. 184.



werden, dafs die Arme das Parallelogramm $ABCZ$ bilden. Durch vier Druckschrauben α, α_1, β und β_1 können die Arme in den Schiebern festgestellt werden. Die Fafsung an D trägt bei e eine cylindrische Hülse, welche sich mit dem Pantograph um einen auf dem hinlänglich schweren Bleistück J befindlichen Zapfen drehen läfst. Eine sphärische Aushöhlung der oberen Fläche des Bleistücks hat einen Knopf i zum Anfafsen. An dem Charnier Z ist eine cylindrische Hülse a zur Aufnahme des Zeichenstifts vorhanden, welcher aus einer dermafsen zugespitzten Bleifeder besteht, dafs ihre scharfe Spitze genau in der senkrechten Achse ihrer Hülse a_1 liegt. Durch das Druckschräubchen δ wird die Bleifeder in der richtigen Höhe befestigt. Hierzu läuft a_1 nach Oben in eine hohle Halbkugel a_2 aus, in welche vor dem Zeichnen so viel Schrotkörner gelegt werden, dafs die Spitze der Bleifeder das Papier berührt. Soll das letztere nicht geschehen, so wird (Fig. 184) der vordere Arm des Hebels b, mit welchem er unter einen in der Hülse a_1 befestigten und aus a hervortretenden Stift fafst, also auch der Zeichenstift gehoben und kann dann letzterer durch Anziehen des Stellschräubchens b_1 in dieser Lage erhalten werden. Die an F befindliche Fafsung trägt wiederum eine Hülse zur Aufnahme des aus Elfenbein verfertigten zugespitzten Führers f, der in der Hülse durch das Druckschräubchen γ so befestigt werden kann, dafs seine Spitze das Papier berührt. Nach dem vorigen Paragraphen müfsen die Achsen des Zapfens bei D, des Zeichenstiftes und des Führers in derselben Verticalebene liegen.

Jeder der vier Arme enthält eine Eintheilung in 120 gleiche Theile (10 . 12 Zoll), in einer in der Zeichnung angegebenen Ziffernfolge. Mit den bei B und C sich befindenden Schiebern sind zum genauen Einstellen der Arme nach dem vorgeschriebenen Verjüngungsverhältnifs noch Verniers angebracht, welche noch Zehntel der vorhin erwähnten Theile angeben. Endlich ruhen die vier Arme noch auf drei kleinen Laufrollen r, r_1, r_2 und auf einer bei F angebrachten Säule s.

§. 434.

Der Gebrauch des Pantographen, zum Copieren der Karten erklärt sich zwar schon aus seiner Construction und der im §. 432 gegebenen Theorie im Allgemeinen leicht, indessen dürften doch folgende Bemerkungen nicht überflüfsig sein.

Zunächst sind nach dem gegebenen Verjüngungsverhältnifs die Schieber mit ihren Verniers an der richtigen Stelle der Arme zu befestigen, welches aus dem Ausdruck des §. 432

$$DB = \frac{a}{n}$$

sich ergiebt. Sollte also z. B eine gegebene Karte auf $\frac{1}{4}$ ihrer Fläche,

also auf $\frac{1}{2}$ nach den Liniengröfsen oder nach 2 : 1 verjüngt werden, so ist der Index jedes Verniers auf $\frac{120}{2} = 60$ zu stellen. Wäre ferner die Originalkarte, deren Mafsstab 100 Ruthen anf 9 Zoll enthält, so zu verkleinern, dafs 250 Ruthen auf 9 Zoll gehen, so ist $n = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$, also $DB = \frac{120}{\frac{5}{2}} = 48$, jeder Index mithin anf 48 zu stellen.

Auch ist zum Copieren ein hinlänglich grofser Tisch von etwa 6 Fufs Länge und Breite zu wählen, dessen Mitte etwa zum Drehungspunkt D genommen wird. Die auf dem Tische ausgebreitete Originalkarte mag zunächst nur eine solche Gröfse haben, dafs von dem Führungsstift des Pantographen die äufsersten Enden derselben erreicht werden können.

Dann ist auch noch eine besondere Sorgfalt auf die Lage der Spitze des Zeichenstifts zu verwenden, dafs nämlich die in die Hülse a_1 (Fig. 184) geschobene Bleifeder nicht allein genau centrisch zugespitzt ist, sondern auch die Spitze in der Achse der Hülse liegt. Man erfährt letzteres, wenn bei einer Drehung der Bleifeder in ihrer Hülse, nachdem man in die Schale a_2 die erforderlichen Hagelkörner gelegt hat, die Spitze stets anf demselben Punkte bleibt.

Man fafse nun die Gränzen der Originalkarte mit einem Rechteck ein und verschiebe das mit einer glatten Oberfläche versehene Papier für die Copie auf dem Tische so lange, bis drei Eckpunkte des nach der gegebenen Verjüngung auf demselben construierten Rechtecks von dem Zeichenstift getroffen werden, wenn der Führungsstift auf die correspondierenden Punkte des Originals gebracht wird. In dieser Lage befestige man nun mit Sorgfalt sowohl das vollkommen glatt aufgelegte Original, als das eben so ausgebreitete Blatt für die Copie.

Führt man alsdann den Führer sorgfältig auf den Begränzungen aller Parcellen der Originalkarte herum, so wird der gleichmäfsig fortgleitende Zeichenstift die verlangte Copie geben. Soll während der Bewegungen des Führers der Zeichenstift aufser Thätigkeit gesetzt werden, so wird mittelst des Hebels a der Zeichenstift so lange von dem Papiere abgehoben. Von Zeit zu Zeit wird auch untersucht, ob während des Zeichnens sowohl der Drehungspunkt D als das Zeichenpapier ihre anfängliche Lage unverändert beibehalten haben, was durch Einstellen auf die Eckpunkte des umzogenen Rechtecks mit Leichtigkeit geprüft werden kann.

Hat aber die Originalkarte eine solche Gröfse, dafs der Führer des festgelegten Pantographen nicht alle Begränzungen erreichen kann, so theilt man das umfafsende grofse Rechteck in so viel kleinere, dafs jedes derselben nach dem im Vorhergehenden angegebenen Verfahren zur Copie zu benutzen ist, und construiert die ähnlichen Rechtecke auch auf dem Blatte für die Copie. Nach der Copierung der

Parcellen jedes einzelnen derselben ist dann das Original und die Copie nach den construierten Linien so entsprechend zu verschieben, dafs die Fortsetzung sich genau an den bereits copierten Theil anschliefst. Zweckmäfsig ist es, wenn aufser den erwähnten Rechtecken auch noch andere Linien auf dem Original und der Copie vor jeder Verschiebung gezogen werden, welche bei der Fortsetzung der Operation zum genauen Anschlufs benutzt werden können.

Anmerkungen. 1. Werden in dem beschriebenen Pantographen der Drehungspunkt D und der Zeichenstift Z gegenseitig vertauscht, so findet nur der Unterschied Statt, dafs während man mit dem Führer den Umfang der Originalfigur umfährt, die durch den Zeichenstift entstandene Figur die entgegengesetzte Lage von der auf dem Original hat. Auch ist dann das Verjüngungsverhältnifs nicht durch $DF : DZ$ (Fig. 181), sondern durch $ZF : ZD$ dargestellt.

2. Ueber den Mailänder Pantograph vgl. m. H. g. I. §. 512.

II. Die Berechnung des Flächeninhalts aufgenommener Fluren.

§. 435.

Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1) der Flächeninhalt läfst sich unmittelbar aus den auf dem Felde gemefsenen Stücken berechnen und 2) er wird aus der aufgetragenen Horizontalprojection der Flur gefunden. Da das Auftragen der Figuren und das Abnehmen der Länge der Linien nach einem verjüngten Mafsstabe offenbar gröfseren oder kleineren Fehlern unterworfen ist, so ist einleuchtend, dafs die erste Art der Flächenberechnung Vorzüge vor der zweiten Art darbietet, daher jene immer bei der genauen Bestimmung des Inhaltes der Grundstücke, Feldmarken u. s. w., die letztere aber nur dann angewandt werden sollte, wenn ein Mafsstab von wenigstens $\frac{1}{1000} - \frac{1}{1500}$ zum Grunde gelegt ist, oder wenn nicht die gröfste Genauigkeit gefordert wird.

A. Inhaltsbestimmung aus gemefsenen Linien, und die Gröfse der Fehler in der Flächenberechnung.

§. 436.

1. Ist die Flur nach der Dreiecksmethode aufgenommen, so erhält man den Inhalt der Dreiecke, wenn die Summe der drei Seiten a, b und c durch s bezeichnet wird, durch die Formel

$$A = \sqrt{[\tfrac{1}{2} s (\tfrac{1}{2} s - a)(\tfrac{1}{2} s - b)(\tfrac{1}{2} s - c)]}.$$

Hat man auf diese Weise die Gröfse eines Vierecks durch Hülfe der einen Diagonale berechnet, so giebt die durch die andere Diagonale vollzogene Berechnung des Vierecks die Proberechnung ab. Es ist daher nur zu untersuchen, wie grofs die aus den unvermeidlichen Fehlern der Mefsung entspringende Differenz, d. h. wie grofs der gefundene

Unterschied mit Rücksicht auf §. 287 bei beiden Resultaten sein darf, um von ihnen das arithmetische Mittel nehmen zu können.

Bezeichnet A den Inhalt eines Oblongums, dessen Seitenlinien a und b sein mögen, so ist bei völlig fehlerfreier Mefsung $A = ab$. Ist aber der bei der Mefsung der Linien a und b begangene Fehler beziehungsweise $= \pm \Delta a$ und $\pm \Delta b$, so erhält man zum Inhalte:

$$(a \pm \Delta a)\ (b \pm \Delta b) = ab \pm a \,.\, \Delta b \pm b \,.\, \Delta a + \Delta a\, \Delta b.$$

Der Unterschied zwischen dem gröfsten und kleinsten der durch die Vorzeichen entstehenden vier Resultate ist demnach

$$a \,.\, \Delta b + b \,.\, \Delta a + \Delta a\, \Delta b.$$

Bezeichnet man diesen Unterschied in dem Flächeninhalte gegen A durch ΔA, so ist

$$\Delta A = a \,.\, \Delta b + b \,.\, \Delta a + \Delta a\, \Delta b.$$

Werden, was vorausgesetzt werden mufs, die Linien mit derselben Genauigkeit gemefsen, so darf man die dabei begangenen Fehler den Linien proportional setzen, also

$$\Delta a = \frac{1}{n}\, a, \quad \Delta b = \frac{1}{n}\, b$$

annehmen, mithin wird

$$\Delta A = a \,.\, \frac{1}{n}\, b = b \,.\, \frac{1}{n}\, a + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \,.\, a b.$$

Wegen der Kleinheit des Bruchs $\frac{1}{n}$ darf man aber ohne merklichen Fehler das dritte Glied des obigen Ausdrucks vernachläfsigen und demnach wird

$$\Delta A = a \,.\, \frac{1}{n}\, b + b \,.\, \frac{1}{n}\, a = 2 \,.\, \frac{1}{n}\, ab = 2 \,.\, \frac{1}{n}\, A,$$

so dafs daher das Verhältnifs des Fehlers in der Flächenberechnung zwei Mal so grofs ist, als das Verhältnifs des Fehlers in der Linienmefsung.

Da aber jedes Polygon auf ein Oblongum zurückgeführt werden kann, so gilt die obige Bestimmung auch bei jeder aus Linienmefsungen vorgenommenen Berechnung.

Auf die obige Art berechnet man alle Vierecke und Dreiecke der Flur und erhält aus der Summe der Partialinhalte den Inhalt des von den geraden Linien gebildeten Polygons.

Die Gröfse der von den Polygonseiten und den krummlinichten Begränzungen eingeschlofsenen Flächen findet man durch die Berechnung der durch die gemefsenen Coordinaten entstandenen Trapeze und Dreiecke. Nimmt man die Berechnung jedes einzelnen Stücks für sich vor, so ist nur zu berücksichtigen, welche Flächen additiv und welche subtractiv sind. Die Resultate der Rechnungen setzt man in ein eigenes Inhaltsverzeichnifs.

2. Sind einzelne Dreiecke mit dem Winkelkreuz u. s. w. aufgenommen, ist b die gemeinschaftliche Grundlinie zweier Dreiecke, deren Höhen h und h_1 sind, so ist der Inhalt des Vierecks

$$A = \frac{b\,(h + h_1)}{2}.$$

B. Inhaltsbestimmung aus gemefsenen Linien und Winkeln.

§. 437.

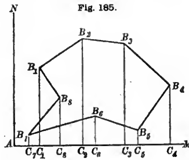
Nachdem nach §§. 305—309 aus den gemefsenen Linien und Winkeln die Coordinaten aller Winkelpunkte des Polygons in Bezug auf eine bestimmte Achse berechnet sind und alle Ordinaten gezogen gedacht werden, so zerfällt das Polygon in Dreiecke und Trapeze, die man zwar nach den bekannten Regeln der Planimetrie, doch aber auch mittelst des folgenden Satzes berechnen kann, indem dadurch die Berücksichtigung wegfällt, welche von den Flächen als subtractiv zu nehmen sind.

Man erhält den Inhalt eines Polygons aus den Coordinaten seiner Winkelpunkte, wo auch der Ursprung genommen werden mag, wenn man die Abscisse (oder Ordinate) jedes Winkelpunktes von der Abscisse (oder Ordinate) des zweiten darauf folgenden Winkelpunkts subtrahiert, den Rest mit der Ordinate (oder Abscisse) des zwischenliegenden Winkelpunkts multipliciert, alle diese Producte addiert und von der Summe die Hälfte nimmt, oder, wenn man die Abscisse des ersten, zweiten dritten .... Winkelpunkts durch x_1, x_2, x_3 ...., die zugehörigen Ordinaten durch y_1, y_2, y_3 .... und den Inhalt des Polygons durch A bezeichnet,

$$A = \tfrac{1}{2}\,[(x_3 - x_1)\,y_2 + (x_4 - x_2)\,y_3 + \dots + (x_1 - x_{r-1})\,y_r + (x_2 - x_r)\,y_1].$$

Denn ist $B_1\,B_2\,B_3\,\dots\,B_8$ (Fig. 185) ein gegebenes Polygon, AM die Abscissen-, AN die Ordinatenachse, also A der Ursprung der Coordinaten, so ist

Fig. 185.



$$A = B_1 B_2 C_1 C_2 + B_2 B_3 C_2 C_3 + B_3 B_4 C_3 C_4 - B_4 B_5 C_4 C_5 - \dots\dots\dots\dots + B_7 B_8 C_7 C_8 - B_8 B_1 C_8 C_1$$

oder

$$A = \tfrac{1}{2} [(y_2 + y_1)(x_2 - x_1) + (y_3 + y_2)(x_3 - x_2) + (y_4 + y_3)(x_4 - x_3) + \dots (y_8 + y_7)(x_8 - x_7) + (y_1 + y_8)(x_1 - x_8)]$$

oder, wenn man die angedeuteten Multiplicationen vollzieht.

$$\begin{aligned} A = \tfrac{1}{2} [&(y_2 x_2 + y_1 x_2 - y_2 x_1 - y_1 x_1) \\ &+ (y_3 x_3 + y_2 x_3 - y_3 x_2 - y_2 x_2) \\ &+ (y_4 x_4 + y_3 x_4 - y_4 x_3 - y_3 x_3) \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ (y_1 x_1 + y_8 x_1 - y_1 x_8 - y_8 x_8)], \end{aligned}$$

woraus nach Aufhebung der positiven und negativen Glieder und nach Absonderung des gemeinschaftlichen Factors der obige Ausdruck sich ergiebt.

Die Berechnung der von den krummlinichten Begränzungen und den Polygonseiten eingeschlofsenen Stücke geschieht wie im vorigen Paragraphen.

C. Inhaltsberechnung aus der Zeichnung.

§. 438.

Die durch das Auftragen der Dreiecke oder Polygone entstandenen geradlinicht begränzten Flächen zerlegt man entweder durch sich nicht schneidende Diagonalen in Dreiecke und berechnet diese einzeln, indem man jede Diagonale als gemeinschaftliche Grundlinie zweier Dreiecke ansieht und dann die Fläche von je zwei Dreiecken durch den Ausdruck $A = \frac{b\,(h + h')}{2}$ findet. Oder man zieht durch das Innere oder aufserhalb des Polygons eine Linie und durch alle Eckpunkte Normalen auf jene, die man nöthigenfalls bis zur gegenüberliegenden Polygonseite verlängert, so wird das Polygon in Trapeze zerlegt, die man nach dem vorigen Paragraphen berechnen kann. Zieht man die Parallelen so nahe an einander, dafs man die zwischenliegenden Linien ohne merklichen Fehler als gerade ansehen kann, so kann man auch den Inhalt einer von krummen Linien begränzten Figur bestimmen. Ist eine nur annähernd richtige Flächeninhaltsbestimmung gestattet, so kann man zur Erleichterung der Rechnung längs der Curven so gerade Linien ziehen, dafs die auf beiden Seiten liegenden Stücke sich ausgleichen und das dadurch entstandene Polygon nach dem Vorhergehenden berechnen.

Löscht man darauf alle mit der Bleifeder gezogenen Hülfslinien weg und nimmt eine abermalige Berechnung mittelst anderer Hülfslinien vor, so dient das erhaltene zweite Resultat zur Probe. Bei

Unterschieden, welche innerhalb der zulässigen Fehlergränzen liegen, nimmt man von beiden Resultaten das arithmetische Mittel.

§. 439.

So lange nun die gegebene ebene Figur blofs von geraden Linien oder von einfachen Curven, deren Gesetz bekannt ist, begrenzt wird, kann die Bestimmung ihres Inhalts im Allgemeinen immer auf bekannte einfache Weise ausgeführt werden. Bei krummlinichten Begränzungen aber, bei denen kein Gesetz erkannt werden kann, ist man nur auf ein Näherungsverfahren angewiesen und wenn die zu berechnenden Parcellen in grofser Zahl vorhanden sind, wird die Arbeit nicht allein ermüdender, sondern verlangt auch einen nicht geringen Zeitaufwand.

Man war deshalb schon längst darauf bedacht, durch die Anwendung mechanischer Hülfsmittel die Berechnung des Inhaltes möglichst zu vereinfachen und zu erleichtern, und da besonders während der letzteren Decennien, wegen der fast in allen Ländern ausgeführten Landes-, Kataster- und ökonomischen Aufnahmen, der ausgedehnten Strafsen- und Eisenbahnanlagen u. s. w., die Inhaltsbestimmungen ebener Figuren mehr als je gefordert wurden, so haben auch besonders die letzteren Decennien einen nicht geringen Reichthum an der Erfindung mechanischer Vorrichtungen zur Inhaltsbestimmung aufzuweisen, welche man allgemein mit dem Namen der **Planimeter** belegt. Man kann besonders zwei Hauptarten derselben von einander unterscheiden. Die eine Art läfst den Inhalt der gegebenen Figuren direct durch die Kenntnifs einer durch dieselben gegebenen Flächengröfse, mittelst Anwendung eines mehr oder weniger mechanischen Verfahrens erkennen, und fordert nur die Bekanntschaft der Gesetze der Elementar-Geometrie. Durch die Planimeter der zweiten Art aber wird der Inhalt einer ebenen Figur blofs durch Umfahren ihres Umfanges mit der Spitze eines Führers bestimmt. Sie bilden mechanisch das Integral der Fläche entweder für rechtwinklichte Coordinaten, $\int y\,dx$, oder für Polarcoordinaten, $\int \frac{1}{2} r^2 d\varphi$. In dem ersten Falle stellt also das Integral die Summe der unendlich kleinen Rechtecke von der Basis dx und der Höhe y dar, in welche sich die Fläche zerlegen läfst; in dem anderen die unendlich kleinen Dreiecke, deren Grundlinie $r\,d\varphi$ und deren Höhe r ist.

Anmerkung. Das Geschichtliche dieser Planimeter findet der Leser in H. g. I. §. 519. Eben daselbst, §. 515 u. f. findet man auch den Glasplanimeter, den Oldenburg'schen und Wagner'schen Planimeter, den Westfeld'schen Ringmefser u. e. a. beschrieben.

§. 440.

1. Der Planimeter von Oldendorp.

Dieser in Fig. 186 in halber wahrer Gröfse dargestellte Planimeter besteht in einem quadratischen Rahmen $ABCD$ von Holz oder Messing, der, zweien Seiten desselben parallel, mit feinen Seidenfäden in dem Abstande von 2 Ruthen des der Karte zum Grunde liegenden verjüngten Mafsstabes überspannt ist. Die Ecken des Rahmens enthalten Charniere, durch welche demselben eine rautenförmige Gestalt ertheilt und daher der für die quadratische Gestalt angenommene Mafstab bis zu einer gewifsen Gränze hin mehr oder weniger verkleinert werden kann. Ein dazu gehöriger Schlüfsel dient zum Fesstellen, so wie ein an der Rahmenseite AB längs eines daran befestigten Stiftes ab verschiebbarer Draht cd zum Orientieren beim Berechnen. Die auf den Seiten AC, BD befindlichen Knöpfe e, f dienen zum Anfafsen des Planimeters.

Aufserdem gehört zu demselben der in Fig. 187 dargestellte Zirkel EFG, dessen Schenkel durch eine Schraubenstange e_1 f_1 verbunden sind und deren Spitzen durch eine Stellschraube e_1 eine Entfernung von 60 Ruthen (falls der Morgen 120 Quadratruthen enthält) erhalten. In dem einen Schenkel ist ein kleines Rädchen g mit 50 Zähnen und einer entsprechenden Eintheilung drehbar, so wie auf demselben eine Feder h angebracht ist, die in einen Einschnitt des Rädchens springt, wenn der Zirkel bis zu 60 Ruthen Weite geöffnet ist.

Vor dem Gebrauche legt man den Planimeter auf den Mafstab der Karte, verschiebt den Rahmen so weit, dafs die Fäden von 10 zu 10 Ruthen Entfernung genau mit 10 Ruthen des Mafsstabes übereinstimmen und stellt die Charniere fest. Auch giebt man den Zirkelspitzen genau einen Abstand von 60 Ruthen, zieht das Stellschräubchen e_1 an und stellt die Feder h auf 0 der Eintheilung des Rädchens. Legt man darauf den Planimeter auf die zu berechnende Figur, so werden die Fäden 2 Ruthen hohe Trapeze abschneiden, deren Gröfse man also dadurch mifst, dafs man für die halbe Summe der parallelen Seiten die mit ihnen parallele Mittellinie des Trapezes mit dem Zirkel bestimmt. So oft dieser daher bis zu 60 Ruthen ausgespannt ist, was durch Einspringen der Feder in den folgenden Einschnitt des Rädchens kenntlich gemacht wird, so oft hat man die Gröfse eines Morgens erhalten. Darauf schliefst man den Zirkel wieder und setzt auf diese Weise das Mefsen der Mittellinien von Trapez zu Trapez fort. Dann giebt die Anzahl der fortgeschobenen Einschnitte auf der Eintheilung die Zahl der Morgen.

Hatte man anfangs dem Planimeter die Lage gegeben, dafs der obere Faden des Netzes als Berührungslinie eines Theils der Be-



Fig. 186.

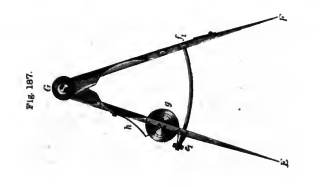


Fig. 187.

gränzungscurve erscheint, so werden meistens über dem oberen und unterhalb des unteren Fadens noch Flächenstücke übrig bleiben, die entweder annähernd als Dreiecke oder als andere Flächentheile entweder durch Schätzung, oder durch Mefsung der Grundlinie und Höhe zu bestimmen und daher den vorhin erhaltenen Morgen als Quadratruthen-Gröfsen zuzusetzen sind.

§. 441.

2. Der Planimeter von Hansen.

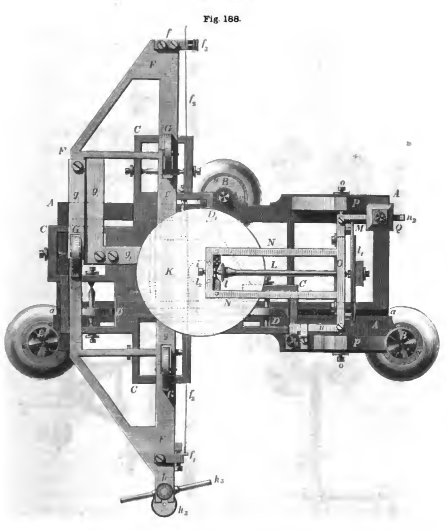
Dieser von dem Mechanikus Ausfeld in Gotha verfertigte Planimeter ist in Figg. 188—190 im Drittel wahrer Gröfse im Grundrifs, und in der Vorder- und Seitenansicht, mit Hinweglafsung einzelner Theile dargestellt.

Den Fufs bildet ein 2 Linien starker Messingrahmen AAA von $12\frac{1}{2}$ Zoll Länge und $4\frac{1}{2}$ Zoll mittlerer Breite. Durch die drei Stellschrauben BBB mit hölzernen Unterlegscheiben kann derselbe so gestellt werden, dafs die auf ihm ruhenden Schlitten horizontal gestellt werden können, oder wenigstens keine freiwillige Bewegung nach der einen oder anderen Seite bekommen.

Der untere Schlitten besteht aus einer 4 Linien dicken Metallplatte $CCCC$ mit 6 Durchbrechungen. In jeder derselben ist eine massive Metallrolle, deren stählerne Achse zwischen Schraubenspitzen sich dreht, angebracht. Durch drei dieser Rollen, DDD_1, wird die Bewegung der Schlitten der Längsrichtung des Fufsgestelles nach bewirkt, indem zwei derselben, DD, um eine sichere Führung der Schlitten zu erzielen, in einer Rille aa des Fufses laufen, während die dritte D_1 flach aufläuft. Die drei anderen Rollen, EEE_1, dienen zur Unterlage des trapezförmigen oberen Schlittens FFF von $17\frac{1}{2}$ Zoll Länge und 4 Zoll Breite.

Durch die zuletzt erwähnten Rollen EEE_1 kann dem oberen Schlitten eine Bewegung ertheilt werden, welche zu der des unteren Schlittens normal steht. Die unter der längeren Schiene liegenden Rollen EE laufen ebenfalls in einer an der Unterfläche des Schlittens angebrachten Rille, während die dritte E_1 glatt unter dem Schlitten liegt. Zur Vermeidung des Herabgleitens des Schlittens und zur Erreichung einer sicheren Bewegung desselben wird er durch drei auf seine Oberfläche drückende Leitrollen GGG mittelst daran befestigter Federn ggg sanft an die unteren Rollen gedrückt, indem die Federn an eine Platte $g_1 g_1$ geschraubt sind, die auf einer auf dem unteren Schlitten stehenden Säule g_2 ruht. An den beiden Enden der längeren Schiene sind zwei Ansätze befestigt, zwischen denen ein um die Trommel der Drehscheibe sich schlingender feiner Metalldraht $f_2 f_2$ befestigt ist und

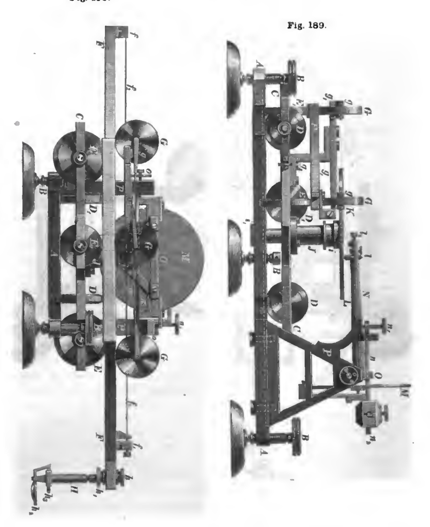
Fig. 188.



der durch eine an dem einen Ansatze vorhandene Stellschraube f_3 gehörig gespannt werden kann. Aufserdem ist an dem einen äufsersten Ende der längeren Schiene zwischen gabelförmigen Ansätzen der Führer angebracht, welcher in Fig. 189 aber weggelafsen ist. Er besteht aus einem Cylinder H, dessen oberes Ende in ein Schraubengewinde ausläuft und der durch zwei Knopfschrauben $h\,h_1$ an der Schiene verstellt und

Fig. 190.

Fig. 189.



befestigt werden kann. Das untere Ende der Säule trägt ein zwischen Schraubenspitzen drehbares Convexglas h_2 mit einem in seiner Mitte eingerifsenen kleinen Kreise, dessen Mittelpunkt auf dem Umfange der zu mefsenden Figur herumgeführt wird und wobei das Glas zugleich

als vergröfsernde Loupe dient. Zur Bewegung des Führers dient der die Säule umgebende Hebel h_3.

Auf dem unteren Schlitten ist noch die hohle cylindrische Säule J befestigt, welche einen senkrecht stehenden Zapfen aufnimmt, dessen oberes Ende die Trommel i mit der darauf befestigten Drehscheibe K trägt. Zur Befestigung des Zapfens dient die Mutter i_1.

Die Drehscheibe von fast 5 Zoll Durchmefser ist auf ihrer Oberfläche genau eben abgeschliffen, und damit sie die nöthige mäfsige Reibung der darauf liegenden Rolle l veranlafst, ist sie mit einem dünnen aber gleichmäfsig dicken Papier überzogen.

Der äufsere Durchmefser der Trommel beträgt $9\frac{1}{4}$ hannoversche Linien.

Die durch die Drehscheibe bewegliche, doppelt konisch geformte Rolle l, welche mit ihrem scharfen Rande auf dem Papier der Drehscheibe ruht und deren berührender Durchmefser von der Einheit abhängt, in welcher die auszumefsende Fläche ausgedrückt werden soll, ist auf das eine Ende der cylindrischen Hauptachse L geschoben, während das andere ein kleines Getriebe und einen daran befestigten Zeiger l_1 (Fig. 188) trägt, welcher sich auf der in hundert gleiche Theile getheilten Scheibe, dem Zifferblatt, M dreht und die Hundertstel einer Umdrehung der Rolle erkennen läfst. Der kleine Stahlzapfen, welcher in dem der Rolle l zunächst liegenden Ende der Hauptachse L steckt, ruht auf dem verschmälerten Ende einer plattenförmigen Feder, die unterhalb der an dem Rahmen NN festgeschraubten Platte v befestigt ist. Durch das Anziehen des Stellschräubchens v_1 kann die Feder etwas niedergedrückt und dadurch dann die Hauptachse von der Spitze der Stellschraube l_2, die zur Moderierung des Ganges der Hauptachse dient, entfernt werden. Der Stahlcylinder des anderen Endes der Hauptachse tritt in einen, am Zifferblatte befestigten Bock und wird durch eine stählerne Vorlegplatte mittelst des Schräubchens l_3 gehalten. Der Rahmen NN läfst sich durch den Hebel n mittelst der Stellschraube n_1 um eine dem Drathe $f_2 f_2$ parallele Achse etwas auf- und niederbewegen und dadurch auch die Rolle l von der Drehscheibe abheben. Der Rahmen bildet mit dem parallelepipedischen Arme O ein Ganzes und ist letzterer zwischen Schraubenspitzen oo auf den beiden, auf dem Fufsgestelle befestigten Böcken PP drehbar. Das eine Ende des Armes O trägt den erwähnten Hebel n, das andere, nach der entgegengesetzten Seite hin den Hebel n_2 für das Gegengewicht Q, um den Druck der Rolle auf die Drehscheibe nach Erfordern zu vermehren oder zu vermindern. Eine seitliche Verlängerung des einen Bocks bildet auf ihrer Oberfläche den Stützpunkt für die Stellschraube n_1. Indem die Rolle l durch andere auf die Achse L zu steckende Rollen vertauscht wird, kann man leicht andere Einheiten der Fläche erhalten.

Noch ist zu bemerken, dafs alle Schrauben, deren Spitzen als Umdrehungsachsen dienen, mit Gegenmuttern versehen, überhaupt alle Theile mit grofser Sorgfalt gearbeitet sind, um eine möglichst richtige und gleiche Bewegung zu erzielen.

Durch den erwähnten Zeiger l_1 erfährt man an dem auf dem Arme O befestigten eingetheilten Zifferblatte M unmittelbar die Einheiten der Fläche bis zu Hundert. Um aber auch die Zahl der Hunderte und Tausende ohne besondere Zählung der Umdrehungen ablesen zu können, sind noch hinter dem Zifferblatte Getriebe und Zahnräder mit der erforderlichen Zahl Zähne angebracht, durch welche beziehungsweise eine 10 und 100 Mal langsamere Bewegung bewirkt wird, welche in Einschnitten auf der Vorderfläche des Zifferblatts durch zwei andere kleinere Zifferblätter abzulesen ist. (M. vgl. H. g. I. Fig. 283.)

§. 442.

Nach §. 439 wird durch die Planimeter der zweiten Art der Inhalt einer auf der Karte gegebenen ebenen Figur von beliebiger Gestalt durch blofses Umfahren ihrer Peripherie mittelst einer, wie beim Pantographen nach allen Richtungen beweglichen, Spitze bestimmt. Sie stellen demnach den Ausdruck des Infinitesimal-Calculs $\int y\,dx$ mechanisch dar. Eine hierauf gestützte Theorie, so wie auch die von Hansen angebrachten Verbefserungen des Wetli'schen Planimeters findet man in H. g. I. S. 645 u. f.

Ein von Hansen angegebener elementarer Beweis über den Hauptsatz desselben ist folgender:

Bezeichnet r den Halbmefser der Trommel bis in die Mitte des Drathes; r_1 den Halbmefser der Rolle; ρ den Abstand des Berührungspunkts der Rolle vom Mittelpunkt der Scheibe; φ den Drehungswinkel der Scheibe; v den Drehungswinkel der Rolle, beide im Bogenmafs; x die Länge der Bewegung des Führers, der Abscissenachse entsprechend, und y die Länge der Bewegung parallel zur Ordinatenachse, so ist zunächst zu zeigen, dafs der Planimeter die Fläche eines Rechtecks mifst, wenn der Führer die Seiten desselben in einer Richtung durchläuft, welche den wachsenden Zahlenwerthen des Zifferblatts entspricht.

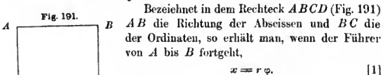


Fig. 191.

Bezeichnet in dem Rechteck $ABCD$ (Fig. 191) AB die Richtung der Abscissen und BC die der Ordinaten, so erhält man, wenn der Führer von A bis B fortgeht,

$$x = r\,\varphi. \quad [1]$$

Da sich aber während dieser Bewegung der Ab-

stand ρ nicht ändert, wickelt sich auf der Rolle ein Bogen von der Länge

$$\rho \varphi = r_1 v \qquad [2]$$

ab, folglich ist, wenn man aus [1] den Werth für φ in [2] substituiert,

$$\rho x = r r_1 v, \qquad [3]$$

welcher Werth der, der Bewegung des Zeigers zugehörigen Ablesung auf dem Zifferblatte entspricht. Geht nun der Führer von B nach C, so ändert sich nur der Abstand ρ, der nun in $(\rho \pm y)$ übergeht, während der Zeiger denselben Stand behält.

Wird darauf der Führer von C bis D bewegt, so entsteht eine der Bewegung von A bis B entgegengesetzte, aber gleiche Drehung der Scheibe, also ist

$$-x = -r\varphi$$

und auf der Rolle wickelt sich ein Bogen von der Länge

$$(\rho \pm y)\varphi = r_1 v_1$$

ab, es ist daher analog der Gleichung [3]

$$-(\rho + y)x = -r r_1 v_1. \qquad [4]$$

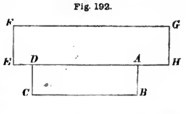
Bewegt sich nun endlich der Führer von D bis A zurück, so erfolgt auch hierbei keine Drehung der Scheibe, aber es verwandelt sich der Abstand des Berührungspunkts der Rolle $\rho \pm y$ wieder in ρ. Es ist daher auch die Ablesung auf dem Zifferblatte der in D gleich. Verbindet man nun die Gleichungen [3] und [4] durch Addition, so erhält man

$$y x = r r_1 (v - v_1).$$

Da nun aber xy die Fläche des Rechtecks $ABCD$ darstellt und $r r_1$ bei demselben Planimeter constant ist, so ist die Summe der Drehungen des Zeigers der Fläche des Rechtecks proportional.

Wird nun ferner mit dem Rechteck $ABCD$ ein zweites $EFGH$, wie Fig. 192 zeigt, verbunden, so giebt bei der Bewegung des Führers längs AE, EF, FG, GH, HA, AB, BC, CD und DA der Planimeter die Summe beider Rechtecke an; weil aber hierbei die Bewegung des Führers längs AD gegen die von DA sich aufhebt, so kann auch die Bewegung des Führers längs der Zwischenlinie AD weggelafsen werden. Und da

Fig. 192.



man endlich jede beliebige krummlinichte Figur in lauter Paralleltrapeze von so kleiner Höhe, als man will, zerlegen, jedes derselben aber wieder in ein Rechteck verwandeln kann, deren Summe dann der Fläche der

Figur gleich ist, dabei aber wieder, wie vorhin, die Bewegungen des Führers längs der Zwischenlinien weggelafsen werden können: so hat auch bei dieser Ableitung der oben erwähnte Hauptsatz des Planimeters seine Gültigkeit.

Ueber den Gebrauch des Planimoters vgl. m. H. g. I. §. 527 u. f.

§. 443.

3. Der Polar-Planimeter von Amsler.

Die Haupttheile des in Fig. 193 im Grund- und Aufrifs in natürlicher Gröfse dargestellten Polar-Planimeters sind der parallelepipedische Stab A, der cylindrische Stab B und die zur Aufnahmo des ersteren dienende Hülse C, welche in normaler Lage noch zwoi parallelepipedische Fortsätze D und E enthält, von welchen wieder der letztere in einen dagegen normal liegenden Ansatz F ausläuft.

Der Stab A wird in der Hülse durch Reibung festgehalten, zu welchem Zwecke die letztere an ihren Enden geschlitzt ist, so dafs die durch die Einschnitte gebildeten Lappen federnd auf den Stab wirken. Das andere Ende desselben trägt den verticalen Fahrstift G.

Der knieförmige Fortsatz H des cylindrischen Stabes B, dessen anderes Ende den Nadeleinsatz J trägt, nimmt den zwischen der Hülse und dem Ansatze F sich drehenden Stahlcylinder K auf, wodurch beide Arme gegen einander um einen Winkel von 160^0—170^0 sich drehen lafsen. Drückt man die Spitze des Nadeleinsatzes in das Papier, so läfst sich um dieselbe als Pol der ganze Apparat auf der Papierfläche und dadurch der Fahrstift auf dem Umfange der zu berechnenden Figur auf dieselbe Weise herumführen, wie beim Pantographen der Führer auf dem Umfange der zu copierenden Figur herumgeführt wird.

Zwischen den beiden Fortsätzeu D und E liegt die Stahlachse L der Laufrolle M in einer Verticalebene, welche durch die Achse des Cylinders K und die Spitze des Fahrstifts geht, oder dieser Ebene parallel ist. Der zugeschärfte Rand der Laufrolle liegt mit einem seiner Punkte auf dem Papiere und bildet derselbe daher mit den Spitzen des Nadeleinsatzes und des Fahrstiftes den dritten Stützpunkt des Planimeters auf dem Papiere. Bei der Bewegung des Fahrstiftes werden demnach immer andere und andero Punkte des Umfanges der Laufrolle mit dem Papiere zur Berührung gebracht, indem jedes Fortrücken derselben aus einem Fortgleiten in der Richtung ihrer Achse und einem Wälzen rechtwinklicht zu jener Richtung sich zusammensetzt.

Um diese Bewegungen mefsen zu können, ist an der Laufrolle die Trommel N befestigt, deren äufsere Mantelfläche hundert gleiche Theile enthält, die durch einen Vernier, der auf der Mantelfläche eines an dem Fortsatze D angebrachten Cylindersectors m sich findet, noch in

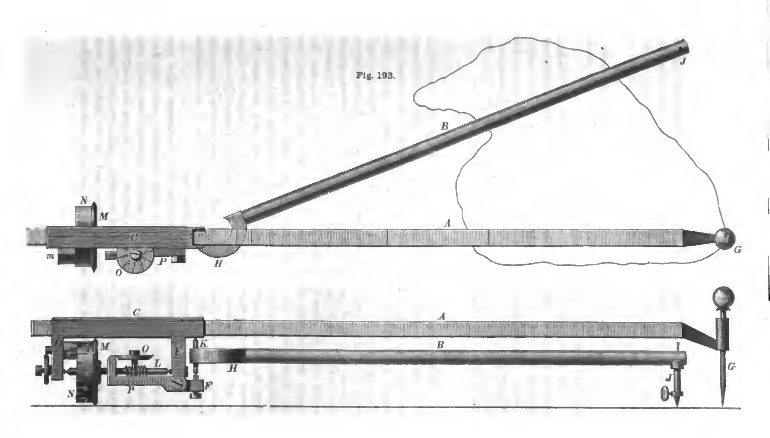


Fig. 193.

Zehntel getheilt werden können. Zur bequemeren Ablesung der ganzen Umdrehungen der Rolle bis zu Zehn enthält ihre Achse eine Schraube, durch welche die, 10 gleiche Theile enthaltende Scheibe *O* mittelst der auf der vorliegenden Platte *P* stehenden Achse in drehende Bewegung versetzt werden kann.

Sowohl die Achse *K*, als die Achse *L* drehen sich zwischen Schraubenspitzen und hat die letztere, zur Erzielung einer sanften und gleichmäfsigen Bewegung noch eine Gegenmutter.

Die Entfernung des Fahrstifts von der Achse *K* bestimmt die Flächeneinheit, in welcher die Mafsangaben des Instruments ausgedrückt sind, weshalb während jeder Mefsung der Stab *A* in seiner Hülse eine unveränderte Stellung behalten mufs. Zur Einstellung des Stabes vor dem jedesmaligen Gebrauch wird auf seiner Oberfläche eine Theilung aufgetragen (§. 445), zu welcher die in die Verlängerung der Achse des Stahlcylinders *K* fallende Kante *c* der Hülse *C* als Index dient.

§. 444.

Nachdem nun der Stab *A* in seiner Hülse bis zu der zugehörigen Eintheilung verschoben ist, setzt man den Planimeter, wie Fig. 193 zeigt, auf das Papier, drückt die Spitze des Nadeleinsatzes ein, bringt die Spitze des Fahrstifts auf einen beliebigen, bezeichneten Punkt (den Ausgangspunkt) des Umfanges der Figur und liest den Stand der Laufrolle ab, indem man zuerst den auf der Scheibe *O* abgeschnittenen Theilstrich, z. B. 4, und die auf der Trommel abgeschnittenen ganzen Theilstriche, z. B. 25 uud am Vernier noch ihre Zehntel, z. B. 8, notiert, erhält also die vierziffrige Zahl 4.258. Dann verfolgt man mit der Spitze des Fahrstifts den Umfang der Figur nach der Richtung, wie die Zeiger einer Uhr sich bewegen, bis man auf den Anfangspunkt zurückkommt und notiert dann abermals die vierziffrige Zahl, die aus dem Stande der Laufrolle sich ergiebt. Zieht man dann die erste Ablesung von der zweiten ab, so ist die Differenz der Inhalt der Figur in derjenigen Flächeneinheit, auf welche der Stab *A* eingestellt wurde, sobald die Nadeleinsatzspitze aufserhalb der umfahrenen Figur sich befindet, die hingegen noch um eine constante Zahl *N* zu vermehren ist, wenn die Spitze innerhalb der Figur liegt.

Wegen der bequemeren Handhabung des Planimeters wird man übrigens das erste Verfahren immer dann anwenden, wenn die Ausdehnung der Figur es erlaubt. Bei geraden Umfangslinien kann man sich auch eines kurzen und leichten Lineals zur Führung des Fahrstifts bedienen. Endlich ist auch noch zu bemerken, dafs wenn der Umfang der Figur von dem Fahrstifte von Links nach Rechts umfahren wird, die zweite Ablesung nur dann gröfser als die erste, also die gebildete

Differenz positiv ist, wenn die Nadelspitze aufserhalb der Figur liegt. Liegt letztere aber innerhalb, so kann die Differenz auch negativ sein.

§. 445.

Eine Theorie des in Rede stehenden Planimeters, auf elementarem Wege abgeleitet, enthält sowohl die Broschüre des Erfinders, als auch die im 4. Bande der neuen Folge des Civil-Ingenieurs, Freiberg, 1858, S. 1 sich findende Abhandlung vom Prof. J. Weisbach. Eine mit Zugrundelegung der höheren Analysis dargestellte Theorie vom Prof. Dr. Wittstein findet der Leser in II. g. I. S. 659 u. f. Hier mag noch eine ebenfalls auf die höhere Analysis gegrüudete, von einem meiner ausgezeichneten früheren Zuhörer, dem Ingenieur F. H. Reitz in Hamburg *) mir mitgetheilte Theorie folgen, die ihrer Einfachheit und Präcision wegen vor den vorhergehenden Theorien den Vorzug verdient.

Nach dem Vorhergehenden wird bei dem Amsler'schen Planimeter die Flächenangabe durch den Weg gemacht, den ein Punkt des Umfanges der Laufrolle nach Umfahrung der Figur mittelst des Fahrstifts zurücklegt, so dafs es darauf ankommt, einen analytischen Ausdruck für diese Länge zu bestimmen.

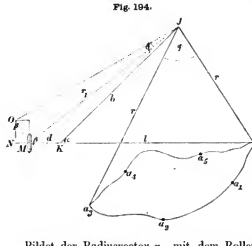
Nennt man den veränderlichen Abstand des Pols J vom Fahrstift G den Radiusvector, so wird die Bewegung der Laufrolle lediglich, theils durch die Verlängerung und Verkürzung, theils durch die Drehung des Radiusvectors bewirkt. Kommt nun der Fahrstift beim Umfahren der Figur wieder zum Ausgangspunkte zurück, so haben selbstverständlich die durch die Verlängerung und Verkürzung des Radiusvectors verursachten Bewegungen eines Punktes des Umfanges der Laufrolle in gleichem Mafse, aber in entgegengesetztem Sinne Statt gefunden. Es wird demnach die Summe der unendlich kleinen Bewegungen des Fahrstifts vom Pole ab. gleich der Summe der unendlich kleinen Bewegungen nach dem Pole hin gleich, also die algebraische Summe der dadurch bewirkten Bewegungen eines Punktes der Laufrolle gleich Null sein, so dafs demnach nur die durch die Drehung des Radiusvectors verursachten Bewegnngen eines Punktes der Laufrolle auf die Angabe des Instruments einen Einflufs äufsern werden.

Dreht sich nun in Fig. 194, in welcher wieder J den Pol, G den Fahrstift, K die Drehungsachse und M die Laufrolle bezeichnet, der Radiusrector r, also auch r_1 um den unendlich kleinen Winkel $\partial \varphi$, so geht die Bewegung der Laufrolle gleichsam in zwei Acten vor sich, indem dieselbe zunächst durch Vorwärtsgleiten, parallel der Rollen-

*) F. H. Reitz, Theorie des Amsler'schen Planimeters, Hamburg, 1868.

armlänge KM, den Weg MN, und darauf durch **Drehung** den Weg NO zurücklegt. Die Summe dieser letzten Wege, also $\int NO$, ist demnach der Weg, den der Berührungspunkt zwischen der Laufrolle und der Figurebene, durch die Bewegung des Fahrstifts beim Umfahren des Umfanges der Figur beschreibt. Dieser Weg, ein Kreisbogen auf der Laufrolle, kann an der Trommel der Laufrolle abgelesen werden und bestimmt in folgender Weise die Fläche der Figur.

Fig. 194.



Bildet der Radiusvector r_1 mit dem Rollen- und Fahrarm MKG den Winkel β, so ist, da $MO = r_1 \partial \varphi$, $NO = r_1 \partial \varphi \cos \beta$; so dafs es nun noch darauf ankommt, $r_1 \cos \beta$ durch die Polarmlänge $JK = b$, die Fahrarmlänge $KG = l$, die Rollenarmlänge $MK = d$ und den Radiusvector r auszudrücken.

Im Dreieck MIK ist

$$r_1 \cos \beta = \frac{r_1^2 + d^2 - b^2}{2d}.$$

Ferner in den Dreiecken MIK und IKG

$$r_1^2 = b^2 + d^2 + 2bd \cos \alpha$$

und

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + l^2 - r^2}{2bl},$$

woraus folgt

$$r_1^2 = b^2 + d^2 + \frac{d(b^2 + l^2 - r^2)}{l},$$

mithin

$$r_1 \cos \beta = \frac{b^2 + d^2 + \frac{d(b^2 + l^2 - r^2)}{l} + d^2 - b^2}{2d},$$

oder

$$= \frac{b^2 + l^2 + 2dl}{2l} - \frac{r^2}{2l}.$$

Man erhält also $NO = \frac{b^2 + l^2 + 2dl}{2l} \partial \varphi - \frac{r^2}{2l} \partial \varphi$

und daher $\int NO = \frac{b^2 + l^2 + 2dl}{2l} \int \partial \varphi - \frac{1}{2l} \int r^2 \partial \varphi.$

Liegt also 1) der Pol aufserhalb der Figur, so durchläuft der Winkel φ das Intervall von 0 bis $+\varphi$, wenn der Fahrstift die Linie $a a_1 a_2 a_3$, der Radiusvector also die Fläche $I a a_1 a_2 a_3 I$ beschreibt; das Intervall von 0 bis $-\varphi$, wenn der Fahrstift den Weg $a_3 a_4 a_5 a$ zurücklegt, der Radiusvector also die Fläche $I a_3 a_4 a_5 a I$ beschreibt. Man hat also:

den Weg eines Punktes der Laufrolle (Differenz der Ablesungen) nach der Umfahrung der Figur $a a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a$

$$\left\{ \begin{aligned} &= \frac{b^2+l^2+2dl}{2l} \int_0^{+\varphi} \partial \varphi - \frac{1}{2l} \int_0^{+\varphi} r^2 \partial \varphi \\ &+ \frac{b^2+l^2+2dl}{2l} \int_0^{-\varphi} \partial \varphi + \frac{1}{2l} \int_0^{-\varphi} r^2 \partial \varphi \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{+\varphi}^{-\varphi} r^2 \partial \varphi;$$

da aber $\frac{1}{2} \int_{+\varphi}^{-\varphi} r^2 \partial \varphi$ die zu berechnende Fläche F, durch Polarcoordinaten ausgedrückt, darstellt, so entspricht die an dem Instrumente gemachte Differenz der Ablesungen a, also dem Ausdrucke $\frac{F}{l}$, also erhält man den Inhalt der Figur durch $F = a l$.

Liegt 2) der Pol innerhalb der Figur, so ist, da alsdann, Statt zwischen $+\varphi$ und $-\varphi$, zwischen 0 und 2π zu intergrieren ist, da der Radiusvector eine volle Umdrehung macht,

der Weg eines Punktes der Laufrolle (Differenz der Ablesungen) nach der Umfahrung der Figur

$$\left\{ \begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \frac{b^2+l^2+2dl}{2l} \partial \varphi - \frac{1}{2l} \int_0^{2\pi} r^2 \partial \varphi \\ &= \frac{b^2+l^2+2dl}{l} \pi - \frac{1}{2l} \int_0^{2\pi} r^2 \partial \varphi \end{aligned} \right.$$

also $$F = a l + C.$$

Die Constante ist durch einen Kreis repräsentiert, der vom Fahrstift beschrieben wird, wenn der Pol im Mittelpunkt dieses Kreises befindlich und die Rolle so liegt, dafs sie sich bei der Umdrehung des Fahrstifts nicht dreht, also die erweiterte Rollenebene durch den Pol geht.

Es ergiebt sich ferner, dafs die Gröfsen d und b nur auf die Constante von Einflufs, auf die Richtigkeit der Angaben des Instruments aber ohne Einflufs sind; nur wird vorausgesetzt, dafs die Rollenachse MK und der Fahrarm KG parallel sind.

§. 445 a.

Damit nun die auf der Rolle gemachte Ablesung unmittelbar den gesuchten Flächeninhalt in der Flächeneinheit der Karte darstellt, kann

der Stab A in Fig. 193 in seiner Hülse verschoben werden und ist daher seine Länge b so zu nehmen, dafs das Rechteck aus dieser Länge b und der Einheit der Ablesung auf der Rolle der Flächeneinheit der Karte gleich ist.

Der oben beschriebene, vom Mechaniker Pfaff in Hannover verfertigte Planimeter hat in Millimetern folgende Dimensionen: $b = 156$, $d = 30{,}7$, während l bis 166 verlängert werden kann; der Durchmefser 2ρ der Rolle $= 19{,}6$.

Soll nun z. B. der Inhalt der Figur so ausgedrückt werden, dafs nach dem gröfseren der bei dem vormaligen Hannoverschen Landes-Oekonomie-Collegium angewandten Mafsstabe von $\frac{1}{2133{,}3}$ Verjüngung jede Ablesung von $\frac{1}{1000}$ des Umfanges der Rolle 1 Quadratruthe darstellt,

so ist $\frac{1}{1000}$ des Umfanges der Rolle $= \frac{2\rho\pi}{1000}$ Millimeter.

Da aber 1 Hannoverscher Fufs $= 0{,}29209$ Meter ist, so ist 1 Quadratruthe

$$= \frac{16 \,.\, 16\,(292{,}09)^2}{(2133{,}3)^2} \text{ Millimeter,}$$

$$\text{woraus dann } l = \frac{256 \,.\, (292{,}09)^2}{(2133{,}3)^2} : \frac{2\rho\pi}{1000} = 77{,}9 \text{ Millimeter}$$

sich ergiebt.

§. 446.

Es ist schon im §. 438 erwähnt, dafs jede aus der Zeichnung gemachte Inhaltsbestimmung eine Proberechnung fordert, um vor groben Fehlern gesichert zu sein. Schon aus diesem Grunde würde daher bei der Flächenbestimmung an einander hängender Parcellen auch die Berechnung des Ganzen erfordert. Zugleich soll aber dadurch auch einer nachtheiligen Fehleranhäufung in der Flächenangabe des ganzen Verbandes der Parcellen vorgebeugt werden. Bei der Anwendung der Planimeter von Hansen und Amsler wird man daher so viele der Parcellen zusammenzufafsen haben, dafs die Bestimmung dieses Ganzen für sich möglich ist und dann erst die Berechnung der einzelnen Parcellen vornehmen. Es ist nicht zu erwarten, dafs die Summe der Flächen der Parcellen mit der Gesammtfläche genau übereinstimmt. Ist die Differenz zwischen beiden nur eine solche, dafs die zu diesem Zwecke aufgestellten gesetzlichen Bestimmungen nicht überschritten werden, so wird es dann noch auf eine Verbefserung der gefundenen Flächen der einzelnen Parcellen ankommen. Werden diese Flächen der Reihe nach durch a, b, c ...., deren Summe durch S bezeichnet, stellt aber Σ die Gesammtfläche vor und überschreitet der additive oder subtractive Rest $S - \Sigma = r$ die gestattete Abweichung nicht, so wird r auf die einzelnen Parcellen proportional zu vertheilen sein. Be-

zeichnen nun α, β, γ .... beziehungsweise die anzubringenden Verbeſserungen, so ist

$$\alpha : r = a : S, \text{ folglich } \alpha = \frac{r}{S} a,$$

$$\text{eben so wird} \quad \beta = \frac{r}{S} b,$$

$$\dots\dots\dots$$

sein, und daher, weil $\alpha + \beta + \gamma + \dots = \frac{r}{S}(a + b + \dots) = r$ ist, werden

$$a + \alpha, \ b + \beta, \ c + \gamma \dots$$

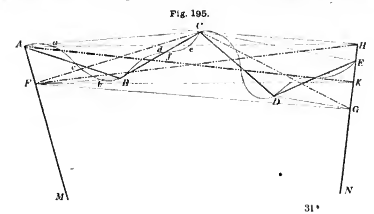
die definitiven Flächen der einzelnen Parcellen bezeichnen.

III. Die Regulierung der Begränzungen und die Theilung aufgenommener Flächen.

§. 447.

In nicht seltenen Fällen werden die gemeinschaftlichen Gränzen zweier benachbarter Feldmarken, insbesondere dann, wenn bei keiner derselben eine Aufnahme und Theilung Statt gefunden hat, entweder einen gebrochenen Linienzug oder selbst eine unregelmäſsige Curve bilden, so daſs es, abgesehen von der erleichterten Inhaltsbestimmung und Theilung, schon aus mehrfachen staatswirthschaftlichen Rücksichten geboten wird, eine solche Gränze entweder in eine nicht so vielfach gebrochene oder in eine geradlinichte umzuändern. In dem ersteren Falle wird es auf die wiederholte Anwendung der planimetrischen Aufgabe: ein $n$eck in ein $(n - 1)$eck zu verwandeln, und auf einige Sätze über die Vergleichung der Flächen der Dreiecke ankommen, und darf die praktische Ausführung auf der Karte hier als bekannt vorausgesetzt werden. Ist z. B. in Fig. 195 $ABCDE$ die Gränze zweier auf beiden

Fig. 195.



Seiten dieses gebrochenen Zuges liegender Grundstücke, so erhält man nach Wegschaffung der Ecken B, D und C, so wie nach Verlegung des Punktes F nach A, beziehungsweise $MFCGN$, $MFHN$ und $MAKN$, welche der anfänglichen Figur $MABCDEN$ gleich sind. Legt man den Satz zum Grunde, daſs man einen kleinen Theil einer Curve, deren Krümmung sich nicht merklich ändert, als gerade betrachten kann, so könnte man durch dasselbe Verfahren auch krummlinichte Gränzen von Grundstücken allmählich in geradlinichte verwandeln; allein zur Vermeidung vieler Eckpunkte ist es gerathener, einen Punkt A der Curve mit einem zweiten B, diesen mit einem dritten C u. s. w. so durch eine Gerade AB, BC.... zu verbinden, daſs die hinzukommenden Stücke Aac, Bdf...., den abgeschnittenen cbB, feC.... beziehungsweise gleich sind, um dann, wie vorhin, die geradlinichte Gränze FH oder AK zu erhalten.

§. 448.

Ist nun von einem aufgenommenen und kartierten Verbande von Grundstücken nach II der Flächeninhalt jeder Parcelle und der ganzen Flur ermittelt; sind auch, wo es zuläſsig war, nach dem vorigen Paragraphen die gebrochenen oder krummlinichten Gränzen zweier benachbarter Fluren in geradlinichte oder weniger gebrochene verwandelt: so wird insbesondere bei einer Feldmark das nächste Geschäft des Geometers, ehe die Verkoppelung und Theilung vorgenommen werden kann, darin bestehen, die erforderlichen Gewannen- und Feldwege in geraden Linien so festzulegen, daſs jeder Eigenthümer ungehindert und ohne Beschädigung seines Nachbarn auf sein Grundstück kommen und dasselbe nach seinem Ermeſsen benutzen kann. Dasselbe gilt von der Correction der flieſsenden Gewäſser, der Beseitigung von Rainen und Sümpfen und von der Anlage der Gräben zur Be- und Entwäſserung, insbesondere bei den Wiesenflächen, um eine kunstgerechte Behandlung derselben zu ermöglichen. Auch Umwandlungen in der Cultur, soweit dieſs als zweckmäſsig erscheint, sind zu erwägen, so daſs mit Rücksicht auf die Beschaffenheit des Bodens und sonstige Verhältnisse, Ackerland gegen Wiesen, Wald gegen Ackerland und umgekehrt auszutauschen ist.

Zur Erzielung einer leichteren und beſseren Bewirthschaftung der Grundstücke wird endlich eine möglichste Zusammenlegung (Verkoppelung, Consolidation) der in der ganzen Feldmark oder in den einzelnen Gewannen derselben zerstreut durch einander liegenden und dadurch weniger bauwürdigen Parcellen in angemeſsen gröſsere Flächen von möglichst regelmäſsiger Gestaltung zu bewerkstelligen sein.

§. 449.

Nach allen diesen Vorarbeiten wird dann die letzte Aufgabe des Geometers darin bestehen, die aufgenommenen und kartierten Fluren im Ganzen oder in einzelnen Abtheilungen nach vorgeschriebenen, bestimmten Verhältnissen so zu theilen, dafs jeder der Grundeigenthümer sein früheres Besitzthum, in Gröfse und Werth ungeschmälert und nur der Lage und Form nach verändert, wieder erhält.

Im Allgemeinen bleibt diese Aufgabe unbestimmt; da aber die Theilungslinien gerade sein und eine solche Lage haben müfsen, dafs die Theile eine der angemefsenen Bauwürdigkeit entsprechende regelmäfsige Gestalt bekommen, so wird hierdurch die Aufgabe bestimmt. Sie wird aber für den Geometer im Allgemeinen eine rein planimetrische sein und sich immer auf Polygone von bestimmter Gestalt beziehen, deren Gränzen durch die gegebenen Bestimmungen zwar bedingt, aber doch möglichst wenig gebrochen herzustellen sind.

Da aber der Werth eines Grundstücks nicht allein von seiner Gröfse, sondern auch von der Ergiebigkeit seines Bodens und von der Leichtigkeit seiner Bewirthschaftung, mithin von der Lage des Grundstücks gegen die Himmelsgegenden, von der Bodenbeschaffenheit und von der Entfernung von dem Wohnsitze des Besitzers, abhängt: so wird unter Berücksichtigung aller dieser Umstände durch sachkundige Oekonomen der Werth der Einheit des Flächenraums, z. B. der Werth einer Quadratruthe (§. 13) bestimmt und meistens im Geldwerthe dargestellt. Diesen Werth der Einheit nennt man die Bonität des Grundstücks. Bezeichnet also W den Werth eines Grundstücks, G seine Gröfse in der angenommenen Einheit dargestellt, B seine Bonität, so ist, da Gröfse und Bonität mit dem Wertho im directen Verhältnisse stehen, der Werth des Grundstücks

$$W = B\,G.$$

Für ein anderes Grundstück, wofür W_1, B_1 und G_1 dieselbe Bedeutung haben, ist also

$$W_1 = B_1\,G_1$$

und daher

$$W : W_1 = B\,G : B_1\,G_1.$$

Ist demnach $B = B_1$, so ist

$$W : W_1 = G : G_1,$$

d. h. die Werthe zweier Grundstücke von gleicher Bonität sind ihren Flächengröfsen proportional.

§. 450.

Bei der Theilung einer der Gröfse nach gegebenen Fläche von gleicher Bonität kommt es selbstverständlich auf die gegebene Gröfse der abzuschneidenden Theile oder ihr Verhältnifs unter einander an.

Das Verfahren wird nur durch verschiedene Bedingungen wegen der Lage der Theilungslinien ein verschiedenes sein. Soll z. B. (Fig. 196) ein Dreieck ABC durch Linien, die von einem Winkelpunkte B ausgehen, in Theile zerlegt werden, die sich wie $m:n:o:p$ verhalten, so mache man, wenn

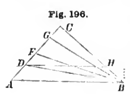


Fig. 196.

$$Ac = b \text{ und } m + n + o + p = s$$

gesetzt wird,

$$AD = \frac{b}{s}\, m, \quad DF = \frac{b}{s}\, n \quad \text{u. s. w.},$$

dann sind DB, FB.... die verlangten Theilungslinien.

In der Praxis wird man aber von dieser Art der Theilung wenig Gebrauch machen, da die bei B sich bildenden spitzen Flächen wenig oder gar nicht benutzt werden können.

Soll von einem Dreieck ABC dessen Fläche $= G$ ein Stück CDH von gegebener Gröfse g, parallel mit einer Seite abgeschnitten werden, so ist

$$G : g = CB^2 : CH^2 = a^2 : x^2,$$

woraus dann $x = a\sqrt{\frac{G}{g}}$ folgt, welchen Werth man nun von C bis H abtragen kann, um $HD \nparallel AB$ zu ziehen.

So liefse sich daher die Theilungslinie für jedes beliebige Theilungsverhältnifs berechnen und es würden sich auch, nicht nur für Dreiecke, sondern auch für andere Polygone leicht Theilungen unter anderen Bedingungen in Hinsicht auf die Richtung der Theilungslinien bestimmen lafsen, die aber für die Praxis wenig anwendbar sind. Man findet viele Aufgaben dieser Art u. a. in Netto's Handbuch der Vermefsungskunde, Berlin, 1820, II. S. 58 u. f.

Meistens wird bei den Theilungen der Felder die Richtung der Theilungslinien willkürlich genommen werden können und nur die Bedingung zu erfüllen sein, die Theilungslinien so zu ziehen, dafs die Interessenten von den begränzenden Wegen ab freien Zutritt zu ihrem Grundstücke haben und in den entstehenden neuen Theilen keine zu spitzen Winkel entstehen. Der Geometer wird bei der Vermefsung einer Feldmark gewöhnlich ein älteres Vermefsungsregister, oder ein Lagerbuch, oder doch Angaben vorfinden, welche die angebliche Gröfse jedes einzelnen Ackerstücks enthalten und deren Verschiedenheiten von der wahren Gröfse theils den anzulegenden Gewaunenwegen, Abzugsgräben u. s. w., theils Zufälligkeiten zuzuschreiben sein werden. Es wird demnach darauf ankommen, nach dem Verhältnifs, welches zwischen der wahren Gröfse einer Abtheilung einer Feldmark und der angeblichen Statt findet, für jeden Besitzer den ihm zukommenden Theil zu

berechnen und hiernach zuzutheilen. Ist z. B. die angebliche Gröſse der in einer Feldabtheilung liegenden, den Interessenten A, B, C, D.... gehörigen Stücke $= a, b, c, d \ldots$, deren Summe $= S$ sein mag, die zu vertheilende Summe aber $= \Sigma$, so wird die Gröſse der den Besitzern A, B, C.... durch Theilung zukommenden Stücke

$$\alpha = \frac{\Sigma}{S} \cdot a,\ \beta = \frac{\Sigma}{S} \cdot b,\ \gamma = \frac{\Sigma}{S} \cdot c,\ \delta = \frac{\Sigma}{S} \cdot d \ldots$$

sein, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ die Gröſsen der zu vertheilenden Stücke bezeichnen.

§. 451.

Aufgabe. Von einer Figur ein Stück von vorgeschriebener Gröſse A abzuschneiden.

Ist $ABCDEF$ (Fig. 197) die gegebene Figur, in welcher die Theilungslinien von AF und DE begränzt werden sollen, so ziehe man durch B die Linie GH in der Richtung, welche etwa die Theilungslinien erhalten sollen und berechne die Gröſse a der Figur $ABCDGH$. Dann bleibt über HG noch ein Stück abzuschneiden, welches

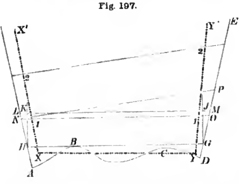
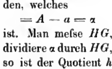


Fig. 197.



$= A - a = \alpha$

ist. Man meſse HG, dividiere α durch HG, so ist der Quotient h der Höhe des Oblongums $HGIK$ gleich, welches den Inhalt α hat. Verlängert man demnach KI bis L und M, so ist das Stück $ABCDML$ um die Gröſse der beiden Dreiecke GIM und HLK gröſser als α. Berechnet man also den Inhalt der beiden Dreiecke $= \beta$, und schneidet unterhalb LM ein Oblongum ab, welches $= \beta$ ist, so wird in den meisten Fällen die neue Theilungslinie NO keine weitere wesentliche Verschiedenheit von der Gröſse des abzuschneidenden Oblongums hervorbringen. Im entgegengesetzten Falle kann man das vorige Verfahren wiederholen und alsdann auch über NO noch mehrere andere Stücke von gegebenem Inhalte abschneiden.

Soll aber die folgende Theilungslinie nicht mehr der vorhergehenden parallel sein, sondern etwa eine mit NP parallele Richtung haben, so berechnet man zunächst die Gröſse des Stücks NOP und verfährt dann weiter, wie oben angegeben ist.

Sind schliefslich die Theilungslinien richtig bestimmt, so mifst man auf den Linien XX' und YY', deren Richtungen durch festgelegte Punkte bestimmt sind, die Entfernungen $X1$, $X2$.... $Y1$, $Y2$.... und steckt diese auf dem Felde nach der Mefskette ab.

§. 452.

Soll die Theilung mit Rücksicht auf Bonität geschehen, so ist in der im §. 449 angegebenen Proportion

$$W : W_1 = BG : B_1 G_1$$

bereits der Satz ausgesprochen, dafs die Werthe zweier an Gröfse und Bonität verschiedener Grundstücke sich verhalten, wie die Producte von Gröfse und Bonität.

Setzt man nun $W = W_1$ und $B = 1$, so ist

$$G = B_1 G_1,$$

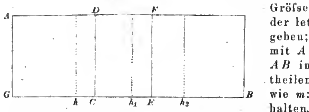
d. h. das Product aus der Gröfse in die Bonität eines Grundstücks bestimmt die Gröfse eines anderen Grundstücks von demselben Werthe, dessen Bonität = 1 ist. Hierdurch ist es möglich, die Gröfse eines Grundstücks auf die Gröfse eines anderen von gleichem Werthe, dessen Bonität 1 ist, zurückzuführen, mithin die Gröfsen verschiedener Grundstücke von ungleicher Bonität auf gleiche Bonität zu bringen, oder ungleichartige Gröfsen auf gleichartige zu reducieren.

Sind nicht die Bonitäten der Grundstücke, sondern nur ihre Verhältnifszahlen gegeben, so treten letztere als Factoren in den vorhin genannten Producten auf, da selbstverständlich das Verhältnifs der Flächengröfsen dadurch nicht geändert wird.

§. 453.

Aufgabe. Von dem Rechteck AB in Fig. 198 sind die Verhältnifszahlen der Bonitäten $b : b_1 : b_2$ der drei Rechtecke AC, DE, FB und die Gröfsen G, G_1, G_2 der letzteren gegeben; man soll mit AG parallel AB in 4 Theile theilen, die sich wie $m:n:o:p$ verhalten.

Fig. 198.



Nach dem vorigen Paragraphen sind die auf die Bonität 1 reducierten Flächen der Rechtecke AC, DE und FB beziehungsweise bG, $b_1 G_1$, $b_2 G_2$, also die des Rechtecks $AB = bG + b_1 G_1 + b_2 G_2 = \Sigma$.

Setzt man $m + n + o + p = s$, so sind die auf die Bonität 1 reducierten Gröfsen der abzuschneidenden Stücke

$$\frac{\Sigma}{s} \cdot m = A, \quad \frac{\Sigma}{s} \cdot n = A_1, \quad \frac{\Sigma}{s} \cdot o = A_2, \quad \frac{\Sigma}{s} \cdot p = A_3.$$

Bezeichnet man also den Abstand der 3 Theilungslinien, von G in GB beziehungsweise durch h, h_1 und h_2 und die Länge von AG durch a, so ist $\frac{A}{a} = h$, $\frac{A + A_1}{a} = h_1$ und $\frac{A + A_1 + A_2}{a} = h_2$, wodurch also die Theilungslinien sich ergeben.

Anmerkung. Weitere Aufgaben, die aber in der Praxis im Ganzen wenig Anwendung finden, findet man in Netto's Vermefsungskunde a. a. O.

§. 454.

Ist die zu theilende, dem Inhalte S nach bekannte Figur kein Rechteck, sondern von beliebiger Gestalt und Begränzung und behalten $b, b_1, b_2, G, G_1, G_2, m, n, o, p$ dieselbe Bedeutung, so ist auch wieder $bG + b_1 G_1 + b_2 G_2 = \Sigma$ die auf die Bonität 1 reducierte Fläche der gegebenen Figur. Eben so stellen auch

$$\frac{\Sigma}{s} \cdot m = A, \quad \frac{\Sigma}{s} \cdot n = A_1, \quad \frac{\Sigma}{s} \cdot o = A_2, \quad \frac{\Sigma}{s} \cdot p = A_3$$

die auf die Bonität 1 reducierten Gröfsen der abzuschneidenden Stücke dar; es sind also die Theilungslinien nach dem im §. 451 angegebenen Verfahren zu bestimmen, sobald Σ mit S übereinstimmt. Ist aber $\Sigma \lessgtr S$, so sind, wie im §. 450 angegeben ist, Statt $A, A_1, A_2, A_3 \ldots$ die Werthe

$$\frac{\Sigma}{S} A = a, \quad \frac{\Sigma}{S} A_1 = a_1, \quad \frac{\Sigma}{S} A_2 = a_2, \quad \frac{\Sigma}{S} A_3 = a_3 \ldots.$$

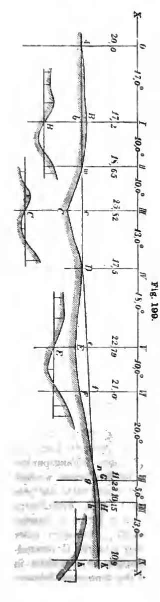
zu berechnen und diese dann zur Vertheilung zu bringen.

IV. Die Entwerfung der Nivellementspläne.

§. 455.

Das Auftragen des Grundrifses geschieht nach §. 420 u. 421.

Zum Auftragen der Profilrifse zieht man eine gerade Linie als Horizontale in einer solchen Höhe meistens über dem Anfangspunkte, dafs alle andere Punkte des Terrains unterhalb derselben liegen, weshalb noch vor dem Auftragen das Gefälle sämmtlicher Terrainpunkte auf jene Haupthorizontale bezogen werden mufs. Man trägt die berechneten Zahlenwerthe in eine Rubrik, welche man den im §. 386 u. f. angegebenen Nivellementstabellen unter der Ueberschrift: „Ordinaten unter der Haupthorizontale" noch zufügt. Darauf trägt man die Horizontalprojectionen der Stationslängen auf der Horizontalen ab, errichtet in den Endpunkten Normalen, trägt auf diesen aus der genannten Columne das Gefälle der einzelnen Punkte ab und verbindet die so erhaltenen Punkte durch Linien.


Fig. 199.

Die durch Längennivellements entstandenen Profile nennt man **Längenprofile**, die nach Quernivellements construierten **Querprofile**. Diese zeichnet man so unter die ersteren, dafs die Horizontale des Querprofils rechtwinklicht durch die nach Unten verlängerte Ordinate des Punktes im Längenprofile geht, durch welchen das Querprofil gelegt wurde. Der Durchschnittspunkt beider Linien ist dann der Nullpunkt des Profils, von welchem ab nach der Rechten und Linken die rechts und links gemefsenen Abscissen getragen werden. Fig. 199 erläutert die construierten Profile.

Beim Auftragen der Stationslängen wendet man meistens einen Mafsstab von $\frac{1}{2500}$ an, beim Auftragen des Gefälles aber einen 5 bis 10 Mal gröfseren, wodurch freilich die Profile nicht die wahre Gestalt des Erdbodens darstellen.

Die Terrainlinie wird mit schwarzer Tusche ausgezogen und nach Unten mit brauner Farbe verwaschen; bei Flüfsen und Gräben nimmt man Blau. Auch werden die Ordinatenlängen und ihre Horizontalentfernungen eingetragen.

Zweites Buch.

Grundzüge der höheren Geodäsie,

oder

die Aufnahme und Kartierung solcher gröfserer Erdstrecken, wobei die Erdoberfläche nicht mehr als eben angesehen werden darf.

Uebersicht.

§. 456.

1. Bei der Aufnahme eines so grofsen Theiles der Erdoberfläche, dafs derselbe nicht mehr als eben angesehen werden darf, beobachtet man zwar im Allgemeinen ein ähnliches Verfahren, wie das im 4. Abschnitt der 2. Abtheilung des ersten Buches angegebene ist; allein manche der dort dargestellten Arbeiten erleiden hier mehr oder weniger eine Modification, theils in Bezug auf die Wahl der Mefswerkzeuge, theils in Bezug auf die Ausführung der Aufnahme.

2. Auch hier verschafft man sich zunächst eine allgemeine Kenntnifs der aufzunehmenden Erdstrecke und wählt zu den Winkelpunkten eines über das aufzunehmende Land zu legenden Dreiecksnetzes besonders wichtige fixe Punkte, wohin insbesondere Sternwarten, Hauptthürme in den Städten und anderen Wohnörtern, oder andere hoch gelegene Punkte gehören. Während aber dort meistens ein einziges Dreiecksnetz ausreicht, werden hier, je nach der Gröfse der aufzunehmenden Erdstrecke, Dreiecksnetze verschiedener Ordnungen zu bestimmen sein, die mit einander in einer solchen Verbindung stehen, dafs jeder Dreieckspunkt erster Ordnung auch ein Dreieckspunkt zweiter Ordnung, jeder der zweiten Ordnung angehörige Dreieckspunkt auch ein solcher der dritten Ordnung ist, jede Ordnung zugleich aber ein Dreiecksnetz für sich bildet. Die Dreiecke der letzten Ordnung dürfen dann nur eine solche Gröfse haben, dafs zwei bis drei ihrer Winkelpunkte auf eine Platte des zur Detailaufnahme anzuwendenden Mefstisches fallen.

3. Während es bei der Aufnahme kleinerer Erdstrecken genügte, die Coordinaten der Dreieckspunkte auf die durch den einen Winkelpunkt gelegte Mittagslinie und das ihr zugehörige Perpendikel zu beziehen, indem die Meridiane der verschiedenen Dreieckspunkte als parallel angesehen werden durften: müfsen hier, wenigstens die Hauptpunkte des Dreiecksnetzes, auf einen bestimmten Meridian und den Aequator bezogen werden; die Meridiane und Perpendikel erscheinen hier also als convergente Bogen gröfster Kreise, von denen jene in den beiden Weltpolen, diese in zwei diametral gegenüber liegenden Punkten des Aequators sich schneiden. Hier ist daher die Lage wenigstens des einen Winkelpunkts vom Dreiecksnetz der ersten Ordnung durch seine geographische Breite (Polhöhe) und Länge, so wie das Azimuth einer Seite in Beziehung auf den Horizont jenes Punktes zu bestimmen, weil daraus dann die geographische Breite und Länge des anderen Endpunktes der Seite, so wie das zugehörige Azimuth, und so auch für jeden anderen Dreiecksnetzpunkt abgeleitet werden kann. Zu den erwähnten Mefsungen wird aber ein Universalinstrument, oder ein astronomischer Theodolith oder ein Höheninstrument (§. 96), aufserdem aber die Kenntnifs des Zeitmafses erfordert.

4. Zu der Mefsung der Basis des Dreiecknetzes reichte dort (1. Buch, Abth. 2, Abschn. 4) ein System von hölzernen Mefsstäben aus, hier werden jetzt nur metallene Mafsstäbe, aus zwei verschiedenen Metallen zusammengesetzt, angewandt; die Erfüllung der dabei zu stellenden Bedingungen, die Sorgfalt und der Aufwand an Hülfsmitteln, welche bei der Mefsung angewandt werden müfsen, macht die Arbeit zu einer der mühseligsten und zugleich kostbarsten Operationen des Geodäten.

5. Dort hatte man es nur mit ebenen Dreiecken zu thun, die Berechnung der Coordinaten ihrer Winkelpunkte erforderte daher nur die Anwendung der ebenen Trigonometrie. Hier bilden die Dreiecke der ersten Ordnung immer sphärische Dreiecke, wovon also der sphärische Excess bestimmt werden mufs, um sie in Bezug auf die unvermeidlichen Fehler ausgleichen und nach dem Legendre'schen Satze, oder nach der Gaufs'schen Projectionsmethode als ebene Dreiecke behandeln zu können.

6. Selbstverständlich ist endlich auch in Betreff der Festlegung der Hauptpunkte der zu entwerfenden geographischen Karte hier ein von dem früheren abweichendes Verfahren anzuwenden.

§. 457.

Die bei der Landesvermefsung vorzunehmenden Arbeiten werden daher nach der getroffenen Auswahl der Dreieckspunkte, bis zur Detailaufnahme folgende sein:

1) Feststellung und Bestimmung der Länge der Basis,
2) Mefsung der Winkel der Dreiecke und des Azimuths einer Seite des Dreiecksnetzes,
3) Bestimmung der geographischen Lage der Dreieckspunkte,
4) Ausgleichung der Winkel nach der Methode der kleinsten Quadrate und
5) Berechnung der Seiten, Höhen und Coordinaten des Dreiecksnetzes.

I. Aufnahme und Berechnung des Dreiecksnetzes.

A. Die Bestimmung der Basis.

§. 458.

Das Terrain, auf welchem die Basis für das Dreiecksnetz gemefsen werden soll, mufs wo möglich eine horizontale Ebene oder doch nur wenig und stetig gegen den Horizont geneigt sein. Küstengegenden, oder lange geradlinicht fortlaufende Flufsthäler, oder, wenn es die Umstände gestatten, eine ausgedehnte Eisfläche, werden dazu vorzugsweise sich eignen. Wo möglich ist die Basis eine Seite des Dreiecksnetzes erster Ordnung. Bei kleineren Länderaufnahmen mifst man auch wohl, wenn das Terrain die Mefsung der Basis von der bezeichneten Länge nicht gestattet, eine kürzere Basis und verbindet diese dann mit der einen Seite des Dreiecksnetzes erster Ordnung durch ein besonderes Netz von Dreiecken. Mit welcher Genauigkeit diefs zu erreichen ist, zeigt Schwerd in seinem Werke: die kleine Speierer Basis u. s. w. Speier, 1822.

Die Endpunkte der Basis, wie auch die auf erhöhten Punkten, oder auf ebener Erde liegenden Stationspunkte des Dreiecksnetzes erster Ordnung, bezeichnet man dauerhaft durch Pfeiler von Stein, die 3 bis 4 Fufs über den Boden hervorragen und dem Winkelmefser und Heliotrop zur Unterlage dienen. Für die Basis ist dann unter dem Pfeiler in die Erde ein Quader eingemauert, auf dessen Oberfläche ein vertical stehender Metallcylinder eingegraben ist, dessen Achse senkrecht unter dem auf der Oberfläche des Pfeilers bemerkten Winkelpunkte liegt. Die Mittelpunkte der Kreise der vorstehenden Cylindergrundflächen bezeichnen den Anfangs- und Endpunkt der Basis.

Zu den 4 Mefsstäben wendet man jetzt fast nur Stäbe von Eisen mit damit verbundenem Zink an. Sie endigen nach Reichenbach in keilförmige Schneiden von Stahl, von denen die eine, eine horizontale, die andere eine verticale Lage hat. Die Mefsstangen von Repsold wurden an einem Ende durch eine senkrechte Ebene abgeschnitten, während das andere kugelförmig abgedreht wurde; sie setzen immer

eine horizontale Lage bei der Mefsung der Linie voraus, welches bei der ersteren Einrichtung nicht erfordert wird.

Die Gröfse der Zwischenräume der Schneiden zweier auf einander folgender Mefsstäbe wird durch Glaskeile bestimmt (§. 460).

§. 459.

Der Mefsapparat, wie er zu der Mefsung der Grundlinie bei der Gradmefsung in Ostpreussen von Bessel*) angegeben wurde, besteht aus vier Mefsstangen, von denen die eine in Fig. 200 im Sechszehntel wahrer Gröfse mit dem verticalen Durchschnitt des umschliefsenden Holzkastens dargestellt ist.

Die Fig. 201 zeigt in halber wahrer Gröfse die einzelnen Theile desselben, theils in der Seitenansicht, theils im Durchschnitt. Die nämlichen Theile sind überall mit denselben Buchstaben bezeichnet.

Jeder der vier Mefsstäbe besteht aus einer parallelepipedischen Stange ff, etwa 2 Toisen lang, 12 Linien breit und 3 Linien dick. Auf ihm liegt ein Stab von Zink zz von derselben Dicke und der halben Breite. An dem vorderen Ende sind beide Stäbe durch Schrauben und Löthung fest mit einander verbunden; bis zum anderen Ende sind sie zwar ohne Verbindung, aber durch genaues Abhobeln berühren sich ihre Ebenen so innig als möglich, so dafs bei beiden eine gleiche Temperatur angenommen werden darf. An beiden Enden des Zinkstabes sind Stahlstücke $\chi\chi_1$ mit horizontal liegenden keilförmigen Zuschärfungen aufgelöthet. Eben so ist auch auf das verlängerte freie Ende der Eisenstange ein Stahlstück mit senkrecht stehenden keilförmigen Zuschärfungen $s_1 s$ ebenfalls durch Schrauben und Löthung befestigt.

Die Entfernung χs wird demnach die Länge des Mefsstabes bestimmen, die Aenderung in der Entfernung $\chi_1 s_1$ durch die Wärme aber die Aenderung der erwähnten Länge, also ein Metallthermometer zur Bestimmung dieser Aenderung, darstellen. Werden daher die Ausdehnungen des Eisens und Zinks durch die Wärme als proportional angenommen, so sind auch die Veränderungen der Entfernung $\chi_1 s_1$ und der Länge χs des Mefsstabes, den Angaben des Metallthermometers proportional.

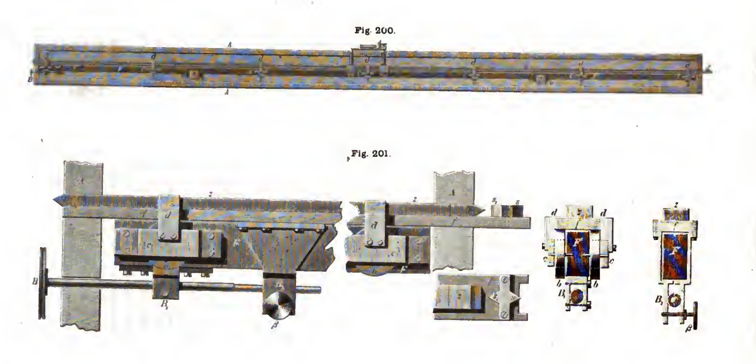
Jeder der Mefsstäbe wird von einem Holzkasten AA umgeben, aus dessen Endwänden nur die keilförmigen Schneiden $\chi\chi_1$ der Zink- und das Stahlstück $s_1 s$ der Eisenstange hervorragen.

Zur Vermeidung der Biegung hat die Mefsstange in Entfernungen von beinahe 2 Fufs, sieben Ruhepunkte, welche angebracht sind an

*) Gradmefsung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit Preussischen und Rufsischen Dreiecksketten. Ausgeführt von Bessel und Baeyer. Berlin, 1838.

Fig. 200.

Fig. 201.



einer 6 Linien dicken und 14 Linien hohen Eisenstange *FF*, die durch die ganze Länge des Kastens geht und in gleichen Abständen (etwa ¼ der ganzen Länge) von den Enden auf zwei, in dem Kasten befestigten gabelförmigen Trägern $a\,a_1$ (Fig. 200) ruht. Zu diesem Zwecke ist an der Unterfläche der Eisenstange ein halbkreisförmiges Stück Eisen $\alpha\,\alpha_1$ festgelöthet, das an jeder Seite einen Zapfen trägt, welcher in den Gabeln des Trägers liegt. Um aber hierbei den Einfluſs jeder Aenderung der Gestalt und Länge des Kastens auf die Eisenstange zu vermeiden, ist das Zapfenloch des einen Trägers a_1 nicht kreis- sondern ovalrund ausgedreht.

Die erwähnten sieben Ruhepunkte liegen auf der Oberfläche eben so vieler Rollenpaare *b*, *b*, *b* .... (Fig. 201), deren Zapfen theils in der Eisenstange *FF*, theils in seitlich an derselben festgeschraubten Lagern *cc* .... ruhen. Die höchsten Punkte dieser etwas ungleichen Durchmeſser haltenden Rollen ragen sehr wenig über die Oberfläche der Eisenstange hervor und ist der Durchmeſser derselben so bestimmt, daſs eine ausgespannte Metallsaite alle zugleich berührt, wenn die Eisenstange auf ihren Trägern liegt, so daſs die Oberflächen der Rollen, obgleich die Eisenstange durch ihr eigenes Gewicht gebogen wird, in einer Ebene liegen.

Ohne die Eisenstange zu berühren, ruht also der Meſsstab auf den sieben Rollenpaaren und kann durch eine Mikrometerschraube, deren Kopf *B* aus dem Kasten hervorragt, leicht ihrer Länge nach bewegt werden. Die Klemme B_1 für die Kugel der Schraube ist durch Zugschrauben an der Eisenstange, die Klemme B_2 für die Mutter an der Meſsstange *ff* befestigt. Durch die Klemmschraube β kann der etwa eintretende todte Gang beseitigt werden. Damit durch diese Bewegung die Meſsstange keine seitliche Verschiebung erleidet, sind an jedem Rollenpaare Klammern *ddd* .... angebracht, welche den Zink- und Eisenstab fast berühren.

Zur Meſsung der Neigung des Meſsstabes dient eine in seiner Mitte angebrachte und aus einer Oeffnung in dem Deckel des Kastens hervortretende Röhrenlibelle. Sie ruht auf den Grundebenen zweier senkrecht gestellter Cylinder, welche von Klammern ausgehen, die an der Eisenstange *FF* so befestigt sind, daſs die Meſsstange zwischen den Klammern sich frei bewegen läſst. Das eine Ende der Libellenunterlage enthält die Mutter einer mit einem eingetheilten Kopfe versehenen Mikrometerschraube, das andere Ende gestattet eine Drehung zwischen Schraubenspitzen. Die Gröſse der Umdrehung des Schraubenkopfes kann an einer auf der Libellenunterlage angebrachten Scalenplatte gemeſsen werden. Ueber die Bestimmung der zu einer Schraubenumdrehung gehörigen Neigung der Meſsstange und der Angabe der zu der hori-

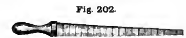
zontalen Lage der Meſsstange gehörigen Theilung vgl. m. die Anm. zu §. 461. In H. g. I. Fig. 231 ist der Libellenapparat dargestellt.

Zur Bestimmung der Länge der Meſsstäbe für bestimmte Grade der Temperatur oder zur Vergleichung der Temperatur des Meſsstabes mit der Temperatur der Luft im Kasten dient ein Quecksilberthermometer, welches in der Mitte zwischen dem vorhin erwähnten Apparate und dem einen Ende der Meſsstange, etwa einen Zoll über der letzteren befestigt ist. Durch eine in dem Deckel des Kastens angebrachte Glasscheibe, die auch zu ihrem Schutz durch einen Deckel von Holz zu verschlieſsen ist, kann die Ablesung bequem ausgeführt werden.

§. 460.

Wie schon erwähnt, wird die Gröſse der Zwischenräume des Metallthermometers, zwischen χ_1 und s_1 sowohl, als auch zwischen den Schneiden zweier auf einander folgender Meſsstäbe durch Glaskeile bestimmt, deren einer in Fig. 202 dargestellt ist.

Fig. 202.



Die von Bessel angewandten Glaskeile wurden dadurch erhalten, daſs sie in einem Stück geschliffen wurden, dessen dickeres Ende etwas mehr als 2 Linien und dessen dünneres Ende etwas weniger als 0,8 Linien dick war, und dasselbe dann durch parallele Ebenen in etwa 3 Linien breite Stücke geschnitten wurde. Zwischen zwei Punkten der Keile, an welchen ihre Dicke sehr nahe 0,8 und 2 Linien betrug, wurden 120 Striche in gleichen Entfernungen so gezogen, daſs sie zu der den Winkel der schiefen Ebenen gehörenden Halbierungslinie normal standen. Da die Länge zwischen den 120 Strichen 41 Linien betrug, also je zwei etwa 0,33.... Linien von einander entfernt waren, so war jeder nach dem dickeren Ende zu liegende Strich um 0,01 Linien länger, als der vorhergehende, so daſs also mittelst der Keile noch Tausendstel einer Linie durch Schätzung bestimmt werden können, wenn die Dicke der Keile an den verschiedenen Punkten ihrer Eintheilungen genau bekannt ist. Das zu diesem Zwecke von Bessel angewandte Verfahren ist in dem oben citierten Werke S. 15 näher beschrieben.

§. 461.

Wegen der Unmöglichkeit, die vier in Anwendung zu bringenden Meſsstäbe vollkommen gleich lang zu machen, wird es zur Bestimmung der wahren Länge derselben, in Bezug auf ein gegebenes Originalmaſs, zunächst darauf ankommen, die Längen derselben mit einander zu ver-

gleichen. Werden die Ausdehnungen des Eisens und Zinks durch die Wärme einander proportional angenommen, so ist diese Vergleichung durch die Angaben des Metallthermometers (§. 459) ohne Weiteres möglich, indem man die Veränderungen der Entfernung $\chi_1 s_1$ (Fig. 201) mit der proportionalen Veränderung der Länge der Mefsstange χs, mit einer bestimmten constanten Länge vergleicht. Bezeichnet man daher für einen der Mefsstäbe die Angabe des Metallthermometers durch a, das Verhältnifs seiner Veränderung zu der Veränderung der Länge des Stabes durch $1 : m$, die zu a gehörige Länge des Stabes durch l und die zu $a = 0$ gehörige durch λ, indem bei gleicher Temperaturänderung das Eisen sich weniger ausdehnt, als das Zink, es also eine Temperatur geben mufs, bei welcher $\chi_1 s_1 = 0$ ist, so ist

$$l = \lambda - a m.$$

Diese Gleichung wird für jeden der vier Stäbe vorhanden sein und nur für jeden andere Werthe der darin vorkommenden Gröfsen liefern. Es ist daher

für den Mefsstab Nr. 1 $l_1 = \lambda_1 - a m_1$
„ „ „ „ 2 $l_2 = \lambda_2 - b m_2$
„ „ „ „ 3 $l_3 = \lambda_3 - c m_3$
und „ „ „ „ 4 $l_4 = \lambda_4 - d m_4$.

Setzt man nun

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4 L$$

und bezeichnet die Abweichung jeder einzelnen von dem mittleren Werthe L beziehungsweise durch x_1, x_2, x_3, x_4, so ist

$$\lambda_1 = L + x_1$$
$$\lambda_2 = L + x_2$$
$$\lambda_3 = L + x_3$$
$$\lambda_4 = L + x_4.$$

Da nun die Summe dieser Werthe $4 L$, also $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ sein mufs, so erhält man durch Substitution der Werthe für $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$

$$l_1 = L + x_1 - a m_1$$
$$l_2 = L + x_2 - b m_2$$
$$l_3 = L + x_3 - c m_3$$
$$l_4 = L + x_4 - d m_4,$$

so dafs es nur noch darauf ankommt, die Werthe von x_1, $x_2 \ldots$ und von m_1, $m_2 \ldots$ zu bestimmen, um die Mefsstäbe mit einander vergleichen zu können. Ist also L bekannt, so sind auch die absoluten Längen der Mefsstäbe gegeben.

Zu der Bestimmung der Werthe von x_1, $x_2 \ldots$ und m_1, $m_2 \ldots$ dienen eigens construierte Apparate, welche man **Comparatoren** nennt.

Der Raum gestattet nicht, das Verfahren zur Bestimmung der Gröfsen x_1, $x_2 \ldots$ durch die Comparatoren und der Constanten L

durch das gegebene Originalmafs (1 Toise) zu beschreiben, es mufs vielmehr der Leser auf das citierte Werk von Bessel und Baeyer verwiesen werden. Eine Andeutung des Verfahrens, so wie eine Beschreibung und Zeichnung des einen Comparators und des anzuwendenden Hülfsapparats zur Bestimmung von L nach der gegebenen Toise, findet man in H. g. I. S. 563 u. f. Nunmehr beginnt die unmittelbare Mefsung der Basis.

Anmerkung. Durch die Comparatoren wird man auch in den Stand gesetzt, nicht nur die der horizontalen Lage des Mefsstabes entsprechende Stellung der Trommel der Mikrometerschraube, sondern auch die einer Umdrehung der Schraube entsprechende Höhenänderung des einen Endes des Mefsstabes oder dessen Neigung gegen den Horizont zu bestimmen. Drückt l die Länge des Mefsstabes, i seine Neigung gegen den Horizont aus, so ist $l \cos i$ die auf die horizontale Ebene reducierte Länge desselben und $l \sin i$ die Erhöhung des einen Ende über dem andern. Nur ist nicht zu übersehen, dafs vor der Multiplication des l mit cos i und sin i noch die eingeschobene Dicke n des Glaskeils gegen den folgenden Mefsstab hinzugefügt werden mufs, so dafs dann die Reduction auf den Horizont durch $l + n(1 - \cos i)$ und die Erhöhung durch $(l + n) \sin i$ bezeichnet wird.

§. 462.

Die Vorbereitung zur Mefsung der Basis besteht in einer möglichsten Planierung des Bodens und in dem Ausstecken ihrer Richtung, um den Brettern, auf welche die Böcke für die Unterlage der Kasten der Mefsstäbe gestellt werden, die entsprechende Lage zu geben. Dazu dienen weifs angestrichene Pfähle, welche in 60 bis 70 Fufs Entfernung in den Boden getrieben und mittelst des Fernrohrs eines Theodolithen eingerichtet werden. Jedes Brett ruht auf drei Pfählen, oder bei härterem Boden, auf drei eisernen Nägeln, wodurch das Brett eine horizontale Lage erhalten kann. Die Böcke von Eichenholz sind etwa 18 Zoll hoch und können durch aufgesetzte Gewichte belastet werden.

Das hintere Ende des Kastens, nämlich dasjenige, aus welchem die horizontale Schneide χ des Mefsstabes und der Kopf B der Mikrometerschraube (Fig. 201) hervorragen, ruht auf der Spitze einer Schraube, die sich an dem darunter stehenden Bocke befindet und kann durch letztere nach Umständen erhöht und erniedrigt werden. Das vordere Ende des Kastens, also das, aus welchem die verticale Schneide s des Mefsstabes hervorragt, ruht dagegen auf einer Linie, welche durch die Seite eines auf einem Brette angebrachten Halbcylinders gebildet wird. Diefs Brett liegt nicht unmittelbar auf der Oberfläche des Bocks, sondern ruht auf zwei Paaren von Keilen, welche, mit ihren Schärfen zusammengeschoben, eine Erhöhung oder Erniedrigung und zugleich, nach einer aufgesetzten Setzwage, eine horizontale Lage der Cylinderseite möglich machen. Das Brett wird so gestellt, dafs die Cylinderseite normal zur Achse des Kastens steht, dessen Ende etwa zwei Fufs

über den untenstehenden Bock hervorragt. Durch diese Einrichtungen ist daher jeder Kasten vollständig und sicher unterstützt.

§. 463.

In der vorher angegebenen Lage der Meſsstäbe beginnt die Meſsung der Linie damit, daſs man den in die Richtung der Linie gebrachten Meſsstab I., falls dieſs zuläſsig ist, mit seiner horizontalliegenden Schneide bis nahe vor den Anfangspunkt der Basis (§. 458), und durch Anwendung der Schraube *B* (Fig. 201) die Schneide mit ihm zur Berührung bringt. Kann aber der Meſsstab nicht in die vorhin vorausgesetzte Lage gebracht werden, so ist die horizontale Schneide desselben bis auf eine durch einen genau abgeglichenen Maſsstab meſsbare Entfernung und dann bis zur Endfläche des Meſsstabes zur Berührung zu bringen. Den Meſsstab I. bringt man in die Richtung der Linie durch Zeichen, welche ein Beobachter an dem in derselben aufgestellten Passageninstrument giebt, welches durch das Erscheinen des bei *s* (Fig. 201) liegenden Einschnitts am vorderen Ende des Meſsstabes, unter dem Faden des Instruments, beurtheilt werden kann. Sobald der Meſsstab I. richtig liegt, wird Nr. II. aufgelegt, der horizontale Keil χ durch die Stellschraube des hinteren Bocks bis zur Achsenhöhe von Nr. I. gestellt und durch Seitenbewegung, mittelst des Passageninstruments, in die Richtung der Linie gebracht. Auſserdem bringt man durch Anwendung der Stellschraube *B* des Stabes II. seine horizontale Schneide so weit vor die senkrechte Schneide des Stabes I., daſs der Zwischenraum durch den Glaskeil gemeſsen werden kann. Ebenso stellt man Nr. III. und IV. auf. Darauf werden die Luftblasen der Libellen eingestellt und an dem Meſsstabe Nr. I. abgelesen:

1. die Angabe der Schraube an der Libelle,
2. das Quecksilberthermometer,
3. der Werth am Glaskeil am Metallthermometer und
4. der Werth am Glaskeil zwischen den Schneiden der Stäbe Nr. I. und Nr. II.

An dem Stabe Nr. II. werden dieselben Ablesungen 1. bis 3., und Statt 4., der Werth am Glaskeil zwischen Nr. II. und Nr. III. gemacht.

Darauf stellt man den Meſsstab Nr. I. vor Nr. IV., macht die vorigen Ablesungen an Nr. III. und wiederholt auch die Ablesung am Glaskeil zwischen Nr. II. und Nr. III.

Auf diese Weise wird die Meſsung fortgesetzt und nur noch das anzuwendende Verfahren anzugeben seiu, wodurch von Bessel*) der Punkt festgelegt wurde, bis zu welchem man am ersten Abend gelangte, um aus ihm am folgenden Morgen wieder zu beginnen.

*) A. a. O. S. 44.

An dem vorläufig bestimmten Punkte, an welchem man aufhören wollte, wurde ein starker Pfahl eingerammt, auf dessen Oberfläche, die mit der Erdoberfläche gleich war, eine Einrichtung mit 2 Schrauben befestigt war, durch welche eine, einen Punkt tragende Silberplatte nach zwei auf einander normal stehenden Richtungen längs der Pfahloberfläche bewegt werden konnte.

Wenn die Mefsung bis zu dem Pfahle vorgerückt war, so stellte man noch den folgenden, über ihn hinausgehenden Mefsstab auf und mafs mittelst des Glaskeils den Abstand seiner Schneide von der des vorangegangenen. Darauf brachte man durch Anwendung der erwähnten Schrauben den Punkt auf der Silberplatte genau unter die Spitze des von der horizontalen Schneide des Stabes herabhängenden und gegen den Luftzug gehörig geschützten Lothes. Am nächsten Morgen wurde dann der nämliche Mefsstab durch dasselbe Mittel in die am vorangegangenen Abend vorhandene Lage gebracht, so dafs nunmehr in der vorhin angegebenen Art weiter fortgefahren werden konnte. Selbstverständlich wurde während der Nacht der Pfahl mit der darauf befestigten Vorrichtung auf geeignete Weise geschützt.

War die letzte Mefsstange, vor der Ankunft an dem mit dem Anfangspunkte gleich bezeichneten Endpunkte der gegebenen Linie, aufgestellt, so wurde zur Bestimmung der Entfernung ihrer Schneide von dem Endpunkte ein gerader, etwa 4 Zoll starker hölzerner Stab, an dessen einer Kante eine gerade Linie gezogen war, so abgeschnitten, dafs sie den Zwischenraum zwischen der Mefsstange und dem Cylinder des Endpunktes fast ausfüllte und durch eine Setzwage in gleicher Höhe mit der Cylinderfläche horizontal gestellt. Dann wurde die Mefsstange nach Erfordernifs erhöht oder erniedrigt, bis die Schneide in der Ebene des Holzstabes war und dann mittelst eines genauen Fufsmafses von Eisen der erwähnte Abstand gemefsen.

Eine vollständige Beschreibung der Bestimmung der Grundlinien der Gradmefsung in Ostpreufsen und der Küstenvermefsung findet der Leser in der mehrfach citierten Gradmefsung u. s. w. von Bessel und Baeyer, so wie in Baeyer's Küstenvermefsung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie. Berlin, 1849.

§. 464.

Sind nun die Mefsstangenlängen in der Normaltemperatur des Originalmafses ausgedrückt; ist ferner aus der an der Trommel des Libellenapparats gemachten Ablesung der Neigungswinkel jeder einzelnen Stange bestimmt, und nach §. 461, Anm., auf den Horizont reduciert, so ergiebt sich aus diesen reducierten Längen, so wie aus den Glaskeildicken zwischen den Endpunkten der einzelnen Mefsstäbe und den

an den Endpunkten der Basis durch besondere Mefsstäbe noch ermittelten Längenstücken, die Länge der Basis. Diese ist daher als auf einer der Meeresoberfläche parallelen, in der mittleren Höhe der Grundlinie befindlichen Fläche gemefsen, anzusehen. Da nun durch den Ausdruck $(l + n) \sin i$ (§. 461, Anm.), der für jeden einzelnen Mefsstab gilt, auch die Höhe des einen Endpunktes der Basis gegen den anderen sich ergiebt, so wird es nur darauf ankommen, die Höhe der beiden Endpunkte zu kennen, um dann aus der mittleren Höhe der Basis ihre Reduction auf die Meeresfläche unter der Voraussetzung, dafs die Erde eine Kugel ist, auszuführen. Bezeichnet also r den Halbmefser der Erde für das Niveau des Meeres, h die mittlere Höhe über dem Meere, B die Länge der gemefsenen Basis und B_1 die auf den Meereshorizont reducierte Länge, so ist, da

$$B : B_1 = r + h : r$$

$$\frac{B - B_1}{B} = \frac{r + h - r}{r + h} = \frac{h}{r + h},$$

$$\text{also } B - B_1 = B \, . \, \frac{r}{r + h} = B\left(\frac{h}{r} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{h^3}{r^3} \ldots.\right)$$

welche Gröfse daher von B zu subtrahieren ist, um B_1 zu finden. Da aber $\frac{h}{r}$ höchstens $\frac{1}{9000}$ beträgt, so können die folgenden Glieder $- \frac{h^2}{r^2} + \frac{h^3}{r^3} \ldots.$ vernachläfsigt werden.

Die Höhen der Endpunkte der Basis werden trigonometrisch bestimmt, woraus dann h sich ergiebt.

B. Mefsung der Winkel der Dreiecke und des Azimuths einer Seite des Dreiecksnetzes.

§. 465.

Nachdem die Winkelpunkte des Dreiecksnetzes gewählt sind, werden dieselben, wenn sie nicht durch Thürme dargestellt sind, welche zugleich die Aufstellung des Winkelmefsers gestatten, kenntlich zu machen und zu der Unterlage des Winkelmefsers einzurichten sein. Punkte auf Bergkuppen oder Anhöhen, welche eine freie und möglichst weite Aussicht gestatten, erhalten zur Sichtbarmachung meistens vierseitige mit einem Visierbalken versehene Pyramiden, wie eine solche in Fig. 125 von II. g. l. dargestellt ist. Sind die Dreieckspunkte durch Pfeiler von Stein, Mauerwerk oder Holz bestimmt, so dienen die über dem Winkelpunkte errichteten Heliotrope zur Signalisierung; bei den vorhin erwähnten Thürmen bildet die Helmstange den Einvisierungspunkt. In den Fällen, wo grofse Wälder eine weite Aussicht hindern und auch keine Durchhaue mehr gestattet sind, werden höhere Aufstellungspunkte

erfordert, die dann auch zum Signalisieren dem Heliotrop die Unterlage darbieten. Eine Aufstellung dieser Art ist in Fig. 122 in II. g. I. gegeben.

Für die Dreieckspunkte der Ordnung, welche zugleich zum Detailmefsen benutzt werden, sind die Signalisierungen in §§. 209 u. f. angegeben.

Zur Aufstellung der Winkelmefser dienen die vorhin erwähnten Pfeiler oder Stative. Auf Thürmen, Leuchtthürmen, Schornsteinen u. s. w. werden dazu oft eigene Gestelle anzubringen sein, die dann auch zum Signalisieren benutzt werden können.

§. 466.

Zur Mefsung der Horizontalwinkel werden Universalinstrumente oder s. g. Repetitionstheodolithe angewandt, die bei den Dreieckspunkten der ersten und zweiten Ordnung an ihren Verniers oder Schraubenmikrofkopen eine Ablesung von mindestens einigen Sekunden gestatten.

Für die Dreiecke der folgenden Ordnungen lafsen sich etwas kleinere Apparate anwenden. Ist bei der Mefsung der Winkel in Thürmen die Aufstellung des Stativs mit Schwierigkeiten verknüpft, oder ganz unzuläfsig, so kann der Pistor-Martins'sche Reflexionskreis oder der Steinheil'sche Prismenkreis angewandt werden. Zur Reduction dieser gemefsenen schiefliegenden Winkel auf den Horizont des Standorts (§. 258) sind dann aber noch nach §. 256 die Neigungen der Winkelschenkel gegen den Horizont zu bestimmen.

Die Winkelmefsung selbst geschieht von verschiedenen Punkten des Limbus aus nach der im §. 230 angegebenen Methode, wobei dann das in den §§. 225 — 229 Gesagte zu berücksichtigen ist. Den im §. 229 angegebenen Schematen zur Manualführung ist dann noch eine Columne für Bemerkungen hinzuzufügen.

Kann man sich nicht im Scheitel des zu mefsenden Winkels aufstellen, so mifst man gleich anfangs die zum Centrieren nöthigen Elemente, die man ebenfalls in eine besondere Columne des Manuals trägt, und verfährt bei der Berechnung nach §. 236. Da aber hierbei die Kenntnifs der Abstände der einvisierten Winkelpunkte vom Scheitelpunkte des Winkels vorausgesetzt wird, so sieht man die aus den Beobachtungen gefundenen (nicht ausgeglichenen), nöthigenfalls aber auf den Horizont reducierten Winkel als Dreieckswinkel an und berechnet nach der ebenen Trigonometrie aus ihnen und einer bekannten Seite, wobei man selbstverständlich von dem die Basis enthaltenden Dreiecke ausgeht, die nöthigen Dreiecksseiten also nur annähernd oder provisorisch; dabei braucht die Rechnung nur auf 5 Decimalen ausgeführt zu werden.

An einem Universalinstrumente oder einem Höhenapparate mifst man aufserdem zur Berechnung der Höhenunterschiede der Dreieckspunkte auf jedem Stationspunkte nach §§. 245 u. f. die Zenithdistanzen aller anderen sichtbaren Winkelpunkte.

Bei der Gradmefsung in Ostpreufsen wurde dabei folgendes Verfahren angewandt. Nachdem von einem Punkte aus das Instrument auf alle anderen sichtbaren Punkte der Reihe nach 2 Mal eingestellt und abgelesen war, wurde der Verticalkreis umgelegt und die Beobachtungsreihe in umgekehrter Reihenfolge der Punkte wiederholt. Durch diese Anordnung der Beobachtungen wurde nicht allein der Indexfehler aus dem Resultate geschafft, sondern auch die sehr nahe Gleichzeitigkeit des Mittels aus den verschiedenen Beobachtungszeiten jedes Punktes erlangt.

Ueber die zu Horizontal- und Verticalmefsungen geeignete Tageszeit vgl. m. §§. 237 u. 249.

§. 467.

Bei der Bestimmung des Azimuths einer Seite des Dreiecksnetzes wird man wo möglich diejenige Seite nehmen, welche die durch die beiden Meridianzeichen einer Sternwarte des Landes bestimmte Richtung des Meridians schneidet. Zählt man dann, wie es schon im 4. Abschn. der 2. Abth. des 1. Buches angegeben ist, vom südlichen Theil des Meridians durch Westen, Norden und Osten von 0^0 bis 360^0 fort, so läfst sich in dem zu bestimmenden Durchschnittspunkte beider Linien das Azimuth der Seite mittelst eines Azimuthalinstrumentes ohne Weiteres mefsen.

In Ermangelung solcher Meridianzeichen kann man aber nach §. 344 den Meridian durch den einen Endpunkt der Seite abstecken und dann das Azimuth derselben wieder, wie vorhin angegeben, bestimmen. Da aber von der richtigen Bestimmung des Azimuths auch die richtige Berechnung des Azimuths aller anderen Seiten des Dreiecksnetzes abhängt: so wird man entweder das Azimuth oder die Richtung des Meridians gern noch durch andere astronomische Beobachtungen prüfen, wozu aber die Kenntnifs des Zeitmafses erforderlich ist.

Das Zeitmafs.

§. 436.

Das Mefsen der Zeit beruht auf der Voraussetzung einer gleichförmigen Bewegung, die uns in der Rotation der Erde, oder der scheinbaren Umdrehung der Himmelskugel als die gleichförmigste Bewegung in der Natur dargeboten wird. Man nennt den Zeitraum zwischen zwei auf einander folgenden Culminationen desselben Fixsterns einen

Sterntag oder einen Tag in Sternzeit. Um aber eine Vergleichung dieser Zeit an verschiedenen Oertern der Erde möglich zu machen, nimmt man an jedem Orte den Anfangspunkt des astronomischen Sterntages, oder 0^h Sternzeit, in dem Augenblicke, wo der Widderpunkt *) durch den Ortsmeridian geht und zählt von da bis zur nächsten Culmination in ununterbrochener Folge 24 Stunden, so dafs also an einem Orte 1^h, 2^h, 3^h .... Sternzeit ist, wenn der Stundenwinkel**) des Widderpunkts, oder seine Rectascension ***), 1^h, 2^h, 3^h .... beträgt. Es ist indessen zu bemerken, dafs man das Datum der Tage der nachher erwähnten mittleren Zeit beibehält und in den astronomischen Ephemeriden †) für jeden Mittag dieser mittleren Zeit die Sternzeit angiebt, welche diesem Zeitpunkte entspricht und die von da ab dann weiter fortgezählt wird. Eine nach Sternzeit richtig gehende Uhr wird daher nur im Frühlingsanfange mit einer nach der Sonne gehenden Uhr im Mittage übereinstimmen, am längsten Tage aber im Mittage 6^h Abends, am Herbstaequinoctium 12^h Mitternacht und am kürzesten Tage 6^h Morgens des folgenden Datums zeigen.

Aus diesem Grunde kann aber die Sternzeit, so bequem für viele astronomische Beobachtungen, für das bürgerliche Leben nicht zum Zeitmafse benutzt werden. Eben so wenig ist diefs aber bei der eigentlichen oder wahren Sonne, wegen ihrer scheinbaren ungleichförmigen Bewegung in der Ekliptik, und daher auch eben so wenig bei der Uebertragung derselben auf den Aequator der Fall. Um nun aber dennoch die Beziehung auf die scheinbare Sonnenumwälzung nicht aufzugeben, nimmt man neben der, die Ekliptik mit ungleichförmiger Bewegung durchlaufenden wahren Sonne, eine zweite Sonne an, welche die Ekliptik mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der nämlichen Zeit durchläuft, zugleich aber mit der wahren Sonne in den Endpunkten der grofsen Achse (dem Perihel oder der Sonnennähe und dem

*) Der Frühlings- oder Widderpunkt ist derjenige Durchschnittspunkt der Sonnenbahn oder Ekliptik mit dem Himmelsaequator, in welchem die Sonne bei ihrem scheinbaren Umlauf um die Erde aus dem südlichen Theil der Ekliptik in den nördlichen tritt, während der andere der Herbst- oder Wagenpunkt genannt wird.

**) Vgl. §. 344 Anm. **).

***) Das im Aequator genommene Mafs des sphärischen Winkels, der von den Declinationskreisen des Gestirns und des Widderpunkts gebildet wird. Die Rectascensionen (geraden Aufsteigungen) werden vom Widderpunkt ab in östlicher, also in einer mit der Revolution der Erde übereinstimmenden Richtung genommen und meistens in Stunden, Minuten und Sekunden angegeben. Durch Rectascension und Declination (nördliche oder südliche) wird daher die Lage eines Gestirns an der Himmelskugel bestimmt.

†) Die gebräuchlichsten sind der Nautical Almanac, das Berliner astron. Jahrbuch und die Connaissance des temps.

Aphel oder der Sonnenferne) zusammentrifft. Dann denkt man sich noch eine dritte Sonne, die mit ebenfalls gleichförmiger Bewegung so in dem Aequator sich bewegt, dafs ihre Rectascension immer der Länge*) der zweiten Sonne gleich ist. Diese dritte Sonne wird die **mittlere Sonne** und die nach ihrem Laufe gemefsene Zeit die **mittlere Zeit** genannt.

Ein mittlerer Sonnentag beginnt mit der Culmination der mittleren Sonne (mittlerer Mittag) und endigt mit der nächstfolgenden. Er wird zum astronomischen Gebrauch ebenfalls in 24 Stunden, für das bürgerliche Leben aber fast allgemein in 2 Mal 12 Stunden, jede Stunde in 60 Minuten u. s. w. getheilt. Bei dem astronomischen Gebrauche entspricht 0^h immer dem Mittage **des** Tages, welcher nach der bürgerlichen Rechnung dasselbe Datum hat, 24^h also dem Mittage des folgenden Tages, so dafs also nach astronomischer Zeitrechnung der mittlere Tag um 12^h später anfängt, als der bürgerliche.

§. 469.

Ist an irgend einem Tage ein Fixstern mit der mittleren Sonne zugleich durch den Meridian eines Orts gegangen, so ist die Erde, während ihrer Rotation, zugleich in ihrer Bahn, oder scheinbar die Sonne in der Ekliptik, um einen nachher zu bestimmenden Bogen von Westen nach Osten fortgerückt. Wenn also nach vollendeter Rotation der Erde, der Stern wieder culminiert, wird der Durchgang der östlich vom Meridian stehenden mittleren Sonne erst später erfolgen können. Da nun an jedem Tage die Sonne weiter nach Osten fortzurücken scheint, so wird auch an jedem folgenden Tage, in Bezug auf die Culmination der Sonne, der Stern immer zeitiger culminieren. Nach einer ganzen Umwälzung der Erde um die mittlere Sonne, wobei diese also den ganzen scheinbaren Umlauf im Aequator vollendet hat, werden beide Himmelskörper wieder gleichzeitig culminieren, dabei also der Stern eine Rotation mehr gemacht haben, als die mittlere Sonne. Zwischen zwei auf einander folgenden Durchgängen der Sonne durch den Widderpunkt, welchen Zeitraum man das **tropische Jahr** nennt, verfliefsen nun 366,24222 .... Sterntage, mithin wird die Sonne in derselben Zeit 365,24222 Mal durch den Meridian gegangen sein, und da

*) Die **Länge** eines Gestirns ist das in der Ekliptik genommene Mafs des sphärischen Winkels, welcher von den beiden durch den Pol der Ekliptik und durch den Widderpunkt (den **Kolur der Nachtgleichen** gelegten gröfsten Kreisen, **Breitenkreisen**) eingeschlofsen wird. Die Längen der Gestirne werden, wie die Rectascensionen, in derselben Richtung von Westen nach Osten gemefsen und bestimmen mit der (nordlichen oder südlichen) **Breite**, dem Abstande des Sterns von der Ekliptik, ebenfalls die Lage desselben auf der Himmelskugel.

man das tropische Jahr in eben so viele gleiche Tage getheilt hat, die man **mittlere Tage** nennt, so ist das tropische Jahr gleich 365 Tagen (t) 5 Stunden 48 Minuten 47,8091 Sekunden in mittlerer Zeit.

Da nun ferner

$$365,^{t}24222 : 1^{t} = 360^{0} : x,$$

so erhält man für

$$x = 0,^{0}985647 \ldots \text{ oder } 0^{0}\, 59'\, 8,''33,$$

gleich dem Stundenwinkel der mittleren Sonne oder der mittleren täglichen Bewegung der wahren Sonne, während dieselbe im Perihel 61′ 10″,1 und im Aphel 57′ 11,″7 beträgt.

§. 470.

Da bei einer im Kreise Statt findenden gleichförmigen Bewegung die in gleichen Zeiten durchlaufenden Bogen sich umgekehrt verhalten, wie die Umlaufszeiten, so ist:

$$\text{mittlerer Tag} : \text{Sterntag} = 366,24222 : 365,24222.$$

Folglich ist

$$\text{ein mittlerer Tag} = \frac{366,24222}{365,24222} = 1,0027379 \text{ Sterntagen}$$

oder, in Sekunden ausgedrückt, also mit 24 . 60 . 60 = 86400 multipliciert,

$$\text{ein mittlerer Tag} = 86636,55456 \text{ Sekunden}$$
$$= 24^{h} + (3^{m}\, 56^{s},555) \text{ Sternzeit.}$$

Ebenso ist

$$\text{ein Sterntag} = \frac{365,24222}{366,24222} = \frac{1}{1,002739} \text{ eines mittleren Tages,}$$
$$= 86164,091 \text{ Sekunden,}$$
$$= 23^{h}\, 56^{m}\, 4^{s},091,$$
$$= 24^{h} - (3^{m}\, 55^{s},909) \text{ mittlere Zeit.}$$

Zur Erleichterung der Rechnung bei der häufig vorkommenden Verwandlung der einen Zeit in die andere hat man für die Quotienten

$$\frac{24^{h} + 3^{m}\, 56^{s},555}{24^{h}}$$

und

$$\frac{24^{h} - 3^{m}\, 55^{s},909}{24^{h}}$$

für jede Stunde, Minute und Sekunde und Bruchtheile derselben Tafeln berechnet, welche man in den astronomischen Ephemeriden findet und deren Gebrauch sich ohne Weiteres ergiebt. In dem Nautical Almanac ist die Rechnung für die Stunden, Minuten und Sekunden bis auf 4 Decimalstellen der Sekunde, für die Hundertstel Sekunden aber bis auf 6 Decimalstellen ausgeführt.

§. 471.

Um aber die Sternzeit in mittlere Zeit und umgekehrt für eine bestimmte Zeit eines gegebenen Tages zu verwandeln, mufs man berücksichtigen, dafs man an einem bestimmten Orte 0^h Sternzeit hat, wenn daselbst am Frühlingsaequinoctium der Widderpunkt culminiert und dafs für die folgenden Tage des Jahres, die Sternzeit für jeden Mittag des mittleren Tages in den Ephemeriden angegeben ist. Deshalb mufs bei der Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit für einen gegebenen Tag, die Sternzeit des mittleren Mittags von der gegebenen abgezogen und für den Rest dann nach den erwähnten Hülfstafeln die Reduction ausgeführt werden. Bei der Verwandlung der mittleren Zeit in Sternzeit ist aus demselben Grunde dieselbe nach den Hülfstafeln zunächst in Sternzeit zu verwandeln und diese dann zu der Sternzeit im mittleren Mittage zu addieren.

Bezeichnet man daher die mittlere Zeit durch M, die Sternzeit wieder durch Σ und die Sternzeit für den mittleren Mittag durch Σ_0, so ist

$$M = (\Sigma - \Sigma_0)\,\frac{24^h - 3^m\,55^s{,}909}{24^h}$$

$$\text{und}\quad \Sigma = \Sigma_0 + M\,\frac{24^h + 3^m\,56^s{,}555}{24^h}.$$

Indessen bedarf die aus den Ephemeriden genommene Sternzeit Σ_0 dann noch einer Verbefserung, wenn der Meridian, für welchen die Ephemeriden berechnet sind, verschieden von dem ist, für welchen die Sternzeit benutzt werden soll und die offenbar dem Längenunterschiede der beiden Oerter proportional sein mufs.

§. 472.

Da nach dem 2. Kepler'schen Gesetze die wahre Sonnenzeit veränderlich ist, so wird auch die im Aequator mit gleichförmiger Bewegung gedachte mittlere Sonne der wahren Sonne bald voraus, bald hinter derselben zurück sein, also beziehungsweise früher oder später culminieren. Es läfst sich daher auch der Werth der wahren Sonnenzeit weder in mittlerer Zeit noch in Sternzeit ausdrücken, sondern man kann für einen gegebenen Zeitpunkt nur den Statt findenden Unterschied derselben angeben. Diesen Unterschied zwischen der mittleren und wahren Sonnenzeit, oder den Stundenwinkel der mittleren Sonne im wahren Mittage, nennt man die Zeitgleichung. Abgesehen von fast unmerklichen Verschiedenheiten darf angenommen werden, dafs die Zeitgleichung an dem nämlichen Tage für alle Meridiane sich gleich bleibt. Bezeichnet man sie durch Z, die wahre Zeit durch W, so ist

$$Z = M - W,$$

worin Z für vier Zeitpunkte im Jahre $= 0$, sonst aber additiv oder subtractiv ist, also ihr Zahlenwerth beziehungsweise zur wahren Zeit zugesetzt oder davon abgezogen oder zur wahren Zeit immer algebraisch addiert werden mufs, um die mittlere Zeit zu erhalten.

Bei der Verwandlung der wahren Zeit in mittlere ergiebt sich für jeden Meridian, für 0^h, M sogleich aus W und Z.

Für eine andere Tageszeit mufs aber die stündliche Veränderung der Zeitgleichung, wenn sie in den Ephemeriden nicht angegeben ist, berechnet werden, um Z zu finden.

Ist ferner der Meridian, für welchen die Ephemeriden berechnet sind, verschieden von dem, für welchen W gegeben ist, so ist Z auf den letzteren Meridian zu reducieren. Diese Verbefserung wird offenbar ein eben so grofser Theil der täglichen Aenderung der Zeitgleichung sein müfsen, als der in Zeit ausgedrückte Längenunterschied beider Meridiane von 24^h ist.

Bei der Verwandlung der mittleren Zeit in wahre genügt es, wegen der geringen täglichen Aenderung der Zeitgleichung schon, wenn man die Zeitgleichung an die gegebene mittlere Zeit anbringt und dann nach dem Vorhergehenden verfährt.

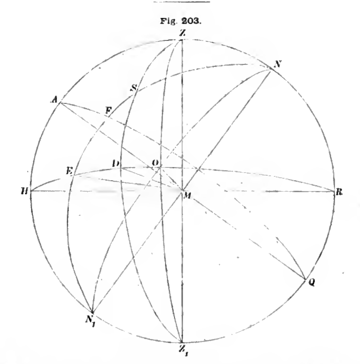
Beispiele für alle die angedenteten Reductionen findet der Leser in H. g. I. S. 161 u. f.

§. 473.

Aufgabe. Das Azimuth einer Seite MO des Dreiecksnetzes zu bestimmen, wenn die Polhöhe des Anfangspunktes M derselben als bekannt angenommen wird.

Es sei in Fig. 203 M der in den Mittelpunkt der Himmelskugel verlegte gegebene Anfangspunkt der im Horizonte liegenden Seite MO, Z sei das Zenith, $HDOR$ der Horizont von M, NN_1 die Weltachse, AFQ der Aequator, so ist $HAZN$ ein Theil des Meridians, also HR die Mittagslinie. Die Figur bezeichne die hohle Halbkugel auf der Westseite des Meridians und S einen Fixstern oder den Mittelpunkt der Sonne auf derselben, für eine bestimmte Zeit. Stellt ZSD den durch S gelegten Verticalkreis dar, so ist HMD das Azimuth von S, und, wenn man sich durch O den Verticalkreis ZO gelegt denkt, HMO das Azimuth des Punktes O oder der Linie MO für den Horizont von M. Mifst man daher an einem Universalinstrumente oder astronomischen Theodolith die scheinbare Zenithdistanz ζ des Fixsterns oder des Sonnenmittelpunktes und bemerkt zugleich die mittlere Zeit vor und nach dem Durchschlagen des Fernrohrs, woraus dann auch die Zeit im Mittel sich ergiebt; mifst man aufserdem den Horizontalwinkel

Fig. 203.



DMO zwischen den Punkten *S* und *O* und bestimmt die wahre Zenithdistanz *z* von *S*, so sind in dem sphärischen Dreiecke *NZS*, wenn φ die Polhöhe von *M* und δ die Declination des Sterns oder der Sonne für das Mittel der beiden Beobachtungszeiten bezeichnet, die 3 Seiten

$$ZN = 90^0 - \varphi = \psi,$$
$$ZS = z,$$
$$\text{und } SN = 90^0 - \delta = p$$

bekannt. Man kann daher den Winkel *SZN* oder *DMR*, also auch *HMD* berechnen und daher aus dem bekannten *DMO* den Winkel *HMO* finden.

Man erhält nach der sphärischen Trigonometrie, wenn man $z + \psi + p = s$ setzt, und das gesuchte Azimuth mit *A* bezeichnet

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2} s - z) \sin(\frac{1}{2} s - \psi)}{\sin \frac{1}{2} s \sin(\frac{1}{2} s - p)}}.$$

Hinsichtlich der Bestimmung der scheinbaren Zenithdistanz und der Berechnung der Declination des Fixsterns oder des Sonnenmittelpunkts zur Zeit der Beobachtung mufs der Leser auf H. g. I. §. 235 verwiesen werden, woselbst sich auch ein berechnetes Beispiel findet.

Die Mefsung der Zenithdistanz des Fixsterns oder des einen Sonnenrandes kann mit dem in den Figg. 41 und 42 dargestellten Universalinstrumente, oder auch mit den Apparaten der Figg. 102—105 v. II. g. I. *) vorgenommen werden.

§. 474.

Kann man in dem nach §. 344 oder dem vorigen Paragraphen abgesteckten Meridian einige Zeit einen der vorhin erwähnten Mefsapparate aufstellen, so dafs die Collimationslinie des Fernrohrs in die Richtung des Meridians fällt, und ist man aufserdem mit einer nach Sternzeit gehenden Uhr versehen, so kann man das etwaige geringe Azimuth des Instruments, d. h. die Abweichung der Collimationslinie des Fernrohrs von der Mittagslinie, am sichersten durch Beobachtung der Durchgänge zweier oder dreier Fixsterne an der Sternuhr und der Vergleichung derselben mit den bekannten Rectascensionen der Sterne finden, und den Fehler leicht durch die Verstellung des Obertheils des Instruments verbefsern. M. vgl. hierüber II. g. I. §. 192 u. f.

C. Bestimmung der geographischen Lage der Dreieckspunkte.

§. 475.

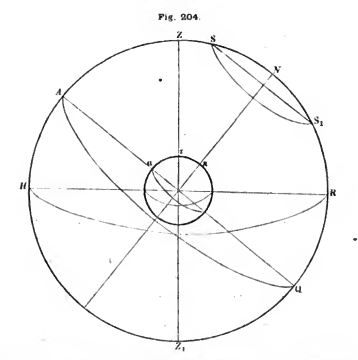
Zur Lagenbestimmung eines Ortes (Fig. 204) der Erde wird, da jeder sein eigenes Zenith Z hat, der Ort des letzteren gegen den einen Pol N, und der sphärische Winkel zu bestimmen sein, den sein Meridian $NZHZ_1$ mit dem Meridian eines bereits bekannten oder als bekannt angenommenen Ortes bildet. Da nun für den Ort Z, wenn AQ den Himmelsäquator und HR den Horizont darstellt, NR die **Polhöhe** φ, also $ZN = AH = 90^0 - \varphi$ die **Aequatorhöhe** genannt wird und weil die geographische Breite

$$az\,(= AZ) + ZN = ZN + NR = 90^0 \text{ ist,}$$

so ist **die geographische Breite eines Ortes immer seiner Polhöhe gleich.** Zu dem ersten Meridian nimmt man meistens den durch die Pariser oder Greenwicher Sternwarte gelegten an und nennt dann den Abstand des Meridians des Orts vom ersten Meridian, auf dem Erdäquator in östlicher Richtung gemefsen, **die geographische Länge** des Orts. Geht aber durch den zur Vergleichung dienenden Ort nicht der erste Meridian, so wird der sphärische Winkel beider Meridiane der **Längenunterschied** der beiden Oerter genannt. Die geographische Breite wird, wie die Declination eines Gestirns, in **nördliche** und

*) Letztere beide Apparate sind daselbst als „das neuere Universalinstrument von Frerk jun." und „der astronomische Theodolith von Meyerstein" dargestellt. Gegen diese Benennungen hat die Firma Ertel & Sohn in München Protest erhoben und die Priorität der Construction derselben beansprucht, daher das Irrige in dem genannten Werke hierdurch berichtigt wird.

Fig. 204.



südliche unterschieden und stets im Bogenmafs, die geographische Länge dagegen sowohl im Bogen- als Zeitmafs ausgedrückt.

§. 476.

Die **Bestimmung der geographischen Länge** eines Ortes ist viel mehr Schwierigkeiten unterworfen, als die der Breite desselben; man hat auch erst in neuerer Zeit die Mittel zur genauen Bestimmung der Länge eines Ortes aufgefunden. Die einfachste und bequemste Art bieten die **Chronometer** dar, wenn man deren Gang durch astronomische Zeitbestimmungen an demselben Orte (vgl. II. g. I. S. 272 u. f., so wie S. 225 u. f.) genau ermittelt hat. Bestimmt man dann den Stand T des Chronometers an diesem Orte bei irgend einer, auch an einem anderen Orte zu beobachtenden Himmelserscheinung, z. B. der Culmination der Sonne, und ist der Stand desselben Chronometers bei der beobachteten Culmination der Sonne an einem anderen Orte $= t$, so ist der Meridianunterschied beider Oerter $= T - t$ und zwar liegt der zweite Ort westlich von dem ersten, wenn $T - t$ negativ oder $t > T$, östlich dagegen, wenn $T > t$, also $T - t$ positiv ist. Andere

Mittel zur Bestimmung des Längenunterschiedes zweier Oerter sind durch die Berechnung der Mondfinsternisse und die Verfinsterung der Jupitersmonde, durch Monddistanzen, durch künstliche Signale u. s. w. gegeben, von denen hier aber keine Rede sein kann.

§. 477.

Aufgabe. **Die Polhöhe eines Punktes des Dreiecksnetzes zu bestimmen.**

1. Die einfachste Methode besteht in der Bestimmung der wahren Zenithdistanz z oder der wahren Höhe h eines Fixsterns, oder der Sonne S von bekannter Declination δ bei der Culmination derselben. Denn nach der bekannten Bezeichnung ist in dem sphärischen Dreiecke ZSN (Fig. 203), wenn t den Stundenwinkel ZNS darstellt,

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t,$$

oder, da $\cos t = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} t^2$ ist,

$$\sin h = \cos (\varphi - \delta) - 2 \cos \varphi \cos \delta \sin \tfrac{1}{2} t^2.$$

Für die Beobachtung im Meridiane ist $t = 0$, und daher

$$\sin h = \cos (\varphi - \delta) = \sin [90^0 - (\varphi - \delta)]$$

oder

$$\varphi = 90^0 + \delta - h,$$

wobei angenommen ist, dafs S nördliche Declination hat; ist δ südlich, so ist

$$\varphi = 90^0 - \delta - h.$$

2. Bestimmt man für einen Circumpolarstern *) die wahre Höhe h (oder die wahre Zenithdistanz) in beiden Culminationen, wie in Fig. 204 SR und $S_1 R$, so ist das arithmetische Mittel aus beiden der Polhöhe NR gleich. Hierbei ist nur darauf zu sehen, Sterne von solcher Declination zu nehmen, dafs sie bei der untern Culmination dem Horizont nicht zu nahe kommen.

3. Bestimmt man für einen aufserhalb des Meridians stehenden Stern von bekannter Declination die wahre Höhe h und zugleich die Zeit t der Beobachtung, so giebt wieder die Gleichung

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t$$

die Möglichkeit der Bestimmung von φ.

Zur bequemeren Berechnung setze man

$$\sin \delta = M \sin N$$

$$\text{und } \cos \delta \cos t = M \cos N,$$

so ist

$$\sin h = M \sin \varphi \sin N + M \cos \varphi \cos N,$$

*) Circumpolarsterne sind solche Fixsterne, für welche $\delta > 90^0 - \varphi$ ist, die also bei der scheinbaren täglichen Umdrehung der Himmelskugel zwei Mal durch den Meridian gehen, daher man auch eine obere und eine untere Culmination unterscheidet.

oder $\sin h = M \cos (\varphi - N)$,

folglich $\cos (\varphi - N) = \frac{\sin N \sin h}{\sin \delta}$.

Da nun aus den obigen Hülfsausdrücken

$$\operatorname{tg} N = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos t}$$

folgt, so ist N bekannt und daher φ zu bestimmen. Ob man $+ (\varphi - N)$ oder $- (\varphi - N)$ d. h. $N - \varphi$ zu nehmen hat, läfst sich leicht daraus erkennen, ob der Fufspunkt der von dem Sterne S (Fig. 203) auf den Meridian gefällten sphärischen Normale auf die Nord- oder Südseite des Zeniths Z fällt; in dem ersten Falle ist $N - \varphi$, im anderen $\varphi - N$ zu nehmen.

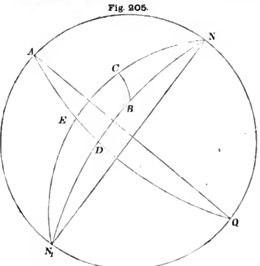
Anmerkung. Ueber die Bestimmung der Polhöhe nach anderen Methoden, z. B. nach Gaufs und Bessel vgl. m. u. a. Ulrich's Lehrb. der prakt. Geometrie, Göttingen, 1833. II. S. 94 u. f.

§. 478.

Aufgabe. Wenn die geographische Breite β und Länge λ eines Dreieckspunktes B (Fig. 205), so wie das Azimuth α einer durch ihn gehenden Seite (geodätischen Linie) $\frac{BC}{r}$ (unter r den Erdhalbmefser verstanden) $= d$ gegeben ist, die Breite β_1, die Länge λ_1 und das Azimuth α_1 derselben Seite für den Horizont von C zu bestimmen.

Man erweitere die beiden durch B und C gedachten Meridiane, bis sie sich in dem einen Pole N schneiden. Ist $QDEA$ der Aequator

Fig. 205.



und NQN_1A der erste Meridian, so ist $BD = \beta$, $CE = \beta_1$, $QD = \lambda$, $QE = \lambda_1$, $DBC = \alpha$ und $\widehat{ECB} = \alpha_1$, mithin in dem sphärischen Dreiecke NBC, $BN = 90^0 - \beta$, $BC = d$ und $CBN = B = 180^0 - \alpha$ gegeben und daher zu berechnen: $CN = 90^0 - \beta_1$, $CNB = N = \lambda_1 - \lambda$ und $NCB = C = \alpha_1 - 180^0$.

Man erhält daher nach den Gaufsischen Gleichungen:

1. $\cos \frac{1}{2}(C - N) \sin (45^0 - \frac{1}{2}\beta_1) = \sin [45^0 - \frac{1}{2}(\beta - d)] \sin (90^0 - \frac{1}{2}\alpha)$,
2. $\sin \frac{1}{2}(C - N) \sin (45^0 - \frac{1}{2}\beta_1) = \sin [45^0 - \frac{1}{2}(\beta + d)] \cos (90^0 - \frac{1}{2}\alpha)$,
3. $\cos \frac{1}{2}(C + N) \cos (45^0 - \frac{1}{2}\beta_1) = \cos [45^0 - \frac{1}{2}(\beta - d)] \sin (90^0 - \frac{1}{2}\alpha)$,
4. $\sin \frac{1}{2}(C + N) \cos (45^0 - \frac{1}{2}\beta_1) = \cos [45^0 - \frac{1}{2}(\beta + d)] \cos (90^0 - \frac{1}{2}\alpha)$.

Dividiert man 1 durch 2 und 3 durch 4, so erhält man

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(C - N) = \operatorname{tg}(90^0 - \tfrac{1}{2}\alpha) \frac{\sin [45^0 - \frac{1}{2}(\beta - d)]}{\sin [45^0 - \frac{1}{2}(\beta + d)]},$$

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(C + N) = \operatorname{tg}(90^0 - \tfrac{1}{2}\alpha) \frac{\cos [45^0 - \frac{1}{2}(\beta - d)]}{\cos [45^0 - \frac{1}{2}(\beta + d)]},$$

woraus die Winkel C und N, also auch $\lambda_1 = N + \lambda$ und $\alpha_1 = 180^0 + C$ sich ergeben.

Dividiert man ferner 1 durch 3, so erhält man

$$\operatorname{tg}(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta_1) = \operatorname{tg}[45^0 - \tfrac{1}{2}(\beta - d)] \frac{\cos \frac{1}{2}(C - N)}{\cos \frac{1}{2}(C + N)},$$

woraus β_1 sich ergiebt.

Einfacher erhält man aber β_1 aus

$$\sin (90^0 - \beta_1) : \sin d = \sin (180^0 - \alpha) : \sin (\lambda_1 - \lambda)$$

durch den Ausdruck

$$\cos \beta_1 = \frac{\sin d \sin \alpha}{\sin (\lambda_1 - \lambda)},$$

und unabhängig von λ_1 aus

$\cos (90 - \beta_1) = \cos (90^0 - \beta) \cos d + \sin (90^0 - \beta) \sin d \cos (180^0 - \alpha)$,

oder $\qquad \sin \beta_1 = \sin \beta \cos d - \cos \beta \sin d \cos \alpha$.

M. vgl. auch Ulrich's prakt. Geom. II. S. 57 u. f.

§. 479.

Um nun die Winkelpunkte des Dreiecksnetzes nach dem vorigen Paragraphen zu berechnen, geht man von einem Dreieckspunkte A aus, dessen geographische Breite und Länge bekannt ist, berechnet aus dem bekannten Azimuth der Seite AB und aus ihrer Gröfse, die Breite und Länge von B, so wie auch das Azimuth von AB in Bezug auf den Meridian durch B. Aus dem bekannten ausgeglichenen Winkel CBA und der Seite BC bestimmt man wieder die Breite und Länge von C, so wie das Azimuth von BC für den durch C gehenden Meridian. Eine Probe erhält man dadurch, dafs man den Winkelpunkt C nun noch aus dem Winkel BAC und aus CA berechnet. Auf diese Weise erhält man alle folgende Winkelpunkte des Dreiecksnetzes.

D. Ausgleichung der Winkelpunkte des Dreiecksnetzes.

§. 480.

Auch hier wird, wie im §. 365 in Bezug auf ein kleineres Dreiecksnetz angegeben ist, das Ausgleichungsgeschäft theils in der Ausgleichung der beobachteten Richtungen im Horizont der einzelnen Stationspunkte, theils in der Ausgleichung dieser Richtungen in Bezug auf die mathematische Begründung des Dreiecksnetzes bestehen. Wollte man nun in Bezug auf die Ausgleichung des Dreiecksnetzes auch hier, wie dort, alle diejenige Dreiecke, in deren Endpunkten alle Beobachtungen vorgenommen sind, zu einer Figur zusammenfafsen und nach den früher angegebenen Regeln verfahren, so würde die Berechnung der Verbefserungen erst dann beginnen können, wenn die Beobachtungen auf sämmtlichen Dreieckspunkten beendigt wären. Es ist daher in praktischer Hinsicht erforderlich, ein Verfahren anzuwenden, wodurch die Rechnung, theilweise und dem Fortschreiten der Aufnahme entsprechend, ausgeführt werden kann, ohne dadurch die Richtigkeit der Bestimmung zu beeinträchtigen.

§. 481.

Werden die Beobachtungen verschiedener Stationen, die nur in der Art ausgeführt wurden, dafs nicht alle Richtungen nach den sonst sichtbaren Punkten bestimmt werden konnten, so mit einander verbunden, dafs sich Dreiecke, Vierecke u. s. w. bilden, so bleiben die Gröfsen A, B, C.... der Gleichungen N. 19 nicht mehr unabhängig von einander, sondern es werden denselben noch Verbefserungen hinzuzufügen sein, die durch die Bedingungen des Dreiecksnetzes gefordert werden. (§. 351 u. f.) Dadurch werden aber in den Gleichungen N. 19, wenn Statt A, $A + (1)$, Statt B, $B + (2)$ u. s. w. gesetzt werden mufs, die Gröfsen (an), (bn).... ebenfalls Veränderungen erleiden, die durch $an + [1]$, $bn + [2]$ *).... bezeichnet werden mögen. Führt man daher diese Verbefserungen in die obigen Gleichungen ein, so erhält man die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} [1] = aa\,(1) + ab\,(2) + ac\,(3) + \ldots. \\ [2] = ab\,(1) + bb\,(2) + bc\,(3) + \ldots. \\ [3] = ac\,(1) + bc\,(2) + cc\,(3) + \ldots. \end{array}\right\} \quad \text{N. 42.}$$

u. s. w.

*) Diese Verbefserungen [1], [2].... sind nicht mit denselben Zeichen des §. 363 für gleichbedeutend zu halten, sondern beziehen sich hier auf Winkel.

Da man aber den Gleichungen N. 19 auch die Form

$$\left.\begin{array}{l} A = \alpha\alpha \,.\, an + \alpha\beta \,.\, bn + \alpha\gamma \,.\, cn + \ldots \\ B = \alpha\beta \,.\, an + \beta\beta \,.\, bn + \beta\gamma \,.\, cn + \ldots \\ C = \alpha\gamma \,.\, an + \beta\gamma \,.\, bn + \gamma\gamma \,.\, cn + \ldots \end{array}\right\} \quad \text{N. 43.}$$

u. s. w.

geben kann, so gehen diese wieder, wenn man darin die Verbefserungszahlen substituiert, über in:

$$\left.\begin{array}{l} (1) = \alpha\alpha\,[1] + \alpha\beta\,[2] + \alpha\gamma\,[3] + \ldots \\ (2) = \alpha\beta\,[1] + \beta\beta\,[2] + \beta\gamma\,[3] + \ldots \\ (3) = \alpha\gamma\,[1] + \beta\gamma\,[2] + \gamma\gamma\,[3] + \ldots \end{array}\right\} \quad \text{N. 44.}$$

u. s. w.

so dafs demnach die Gleichungen N. 42 und 44 die Abhängigkeit der Verbefserungen nach den auf einer Station vorhandenen Bedingungen in Bezug auf die Ausgleichung des Dreiecksnetzes darstellen und die auf jeder einzelnen Station unabhängig ausgeführt werden können. Es kommt daher nur noch darauf an, die Werthe der Coefficienten $\alpha\alpha$, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma \ldots$ zu bestimmen.

Substituiert man in N. 43 die Werthe für (an), (bn), $(cn) \ldots$ aus N. 19, so ergiebt sich

$$A = \alpha\alpha(aaA + abB + acC) + \alpha\beta(abA + bbB + bcC) + \alpha\gamma(acA + bcB + ccC),$$
$$B = \alpha\beta(\quad\text{"}\quad) + \beta\beta(\quad\text{"}\quad) + \beta\gamma(\quad\text{"}\quad),$$
$$C = \alpha\gamma(\quad\text{"}\quad) + \beta\gamma(\quad\text{"}\quad) + \gamma\gamma(\quad\text{"}\quad).$$

Ordnet man auf der rechten Seite nach A, B, C, so gehen die vorigen Gleichungen über in:

$$A = A(aa \,.\, \alpha\alpha + ab \,.\, \alpha\beta + ac \,.\, \alpha\gamma) + B(ab \,.\, \alpha\alpha + bb \,.\, \alpha\beta + bc \,.\, \alpha\gamma)$$
$$+ C(ac \,.\, \alpha\alpha + bc \,.\, \alpha\beta \,. + cc \,.\, \alpha\gamma),$$
$$B = A(aa \,.\, \alpha\beta + ab \,.\, \beta\beta + ac \,.\, \beta\gamma) + B(ab \,.\, \alpha\beta + bb \,.\, \beta\beta + bc \,.\, \beta\gamma)$$
$$+ C(ac \,.\, \alpha\beta + bc \,.\, \beta\beta + cc \,.\, \beta\gamma),$$
$$C = A(aa \,.\, \alpha\gamma + ab \,.\, \beta\gamma + ac \,.\, \gamma\gamma) + B(ab \,.\, \alpha\gamma + bb \,.\, \beta\gamma + bc \,.\, \gamma\gamma)$$
$$+ C(ac \,.\, \alpha\gamma + bc \,.\, \beta\gamma + cc \,.\, \gamma\gamma). \quad \text{N. 45.}$$

Sollen diese Gleichungen nun mit N. 43 übereinstimmen, so mufs jeder der Werthe von A, B und C unabhängig von den beiden anderen sein, welches aber nur dann möglich ist, wenn

in der 1. Gleichung $B = 0$ und $C = 0$,
" " 2. " $A = 0$ und $C = 0$,
und " " 3. " $A = 0$ und $B = 0$

gesetzt wird. Man erhält dann aus jeder der Gleichungen N. 45 drei andere,

$$\left.\begin{aligned}
1 &= aa\,.\,\alpha\alpha + ab\,.\,\alpha\beta + ac\,.\,\alpha\gamma, \\
0 &= ab\,.\,\alpha\alpha + bb\,.\,\alpha\beta + bc\,.\,\alpha\gamma, \\
0 &= ac\,.\,\alpha\alpha + bc\,.\,\alpha\beta + cc\,.\,\alpha\gamma, \\
0 &= aa\,.\,\alpha\beta + ab\,.\,\beta\beta + ac\,.\,\beta\gamma, \\
1 &= ab\,.\,\alpha\beta + bb\,.\,\beta\beta + bc\,.\,\beta\gamma, \\
0 &= ac\,.\,\alpha\beta + bc\,.\,\beta\beta + cc\,.\,\beta\gamma, \\
0 &= aa\,.\,\alpha\gamma + ab\,.\,\beta\gamma + ac\,.\,\gamma\gamma, \\
0 &= ab\,.\,\alpha\gamma + bb\,.\,\beta\gamma + bc\,.\,\gamma\gamma, \\
1 &= ac\,.\,\alpha\gamma + bc\,.\,\beta\gamma + cc\,.\,\gamma\gamma.
\end{aligned}\right\} \quad \text{N. 46.}$$

Nach der Gaufsischen Bezeichnungsart erhält man dann in Bezug auf die Abkürzungsformeln im §. 350

$$\left.\begin{aligned}
bn\,.\,1 &= -\frac{ab}{aa} \text{ aus der ersten Gruppe,} \\
&= 1 \;\;\text{„ „ zweiten „} \\
&= 0 \;\;\text{„ „ dritten „} \\
cn\,.\,1 &= -\frac{ac}{aa} \;\;\text{„ „ ersten „} \\
&= 0 \;\;\text{„ „ zweiten „} \\
&= 1 \;\;\text{„ „ dritten „}
\end{aligned}\right\} \quad \text{N. 47.}$$

während die Ausdrücke für $bb\,.\,1$ und $bc\,.\,1$ sich nicht ändern, hier aber nicht zur Anwendung kommen.

Eben so ist

$$\left.\begin{aligned}
cn\,.\,2 &= -\frac{ac}{aa} + \frac{ab}{aa}\cdot\frac{bc\,.\,1}{bb\,.\,1} \\
&= -\frac{bc\,.\,1}{bb\,.\,1} \\
&= 1
\end{aligned}\right\} \quad \text{N. 48.}$$

während der Ausdruck für $cc\,.\,2$ im §. 350 sich ebenfalls nicht ändert.

Ferner ergiebt sich nach N. 20 und 21 aus den obigen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{ab}{aa} &= bb\,.\,1\;\alpha\beta + bc\,.\,1\;\alpha\gamma, \\
1 &= bb\,.\,1\;\beta\beta + bc\,.\,1\;\beta\gamma, \\
0 &= bb\,.\,1\;\beta\gamma + bc\,.\,1\;\gamma\gamma.
\end{aligned}\right\} \quad \text{N. 49.}$$

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{ac}{aa} + \frac{ab}{aa}\;\frac{bc\,.\,1}{bb\,.\,1} &= cc\,.\,2\;\alpha\gamma \\
-\frac{bc\,.\,1}{bb\,.\,1} &= cc\,.\,2\;\beta\gamma \\
1 &= cc\,.\,2\;\gamma\gamma
\end{aligned}\right\} \quad \text{N. 50.}$$

Zur Bestimmung der Werthe für $\alpha\alpha$, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma \ldots.$ sind demnach die Auflösungsformeln:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma\gamma &= \frac{1}{cc\,.\,2} \\
\beta\gamma &= -\frac{bc\,.\,1}{bb\,.\,1}\cdot\frac{1}{cc\,.\,2} \\
\alpha\gamma &= \left(-\frac{ac}{aa}+\frac{ab}{aa}\cdot\frac{bc\,.\,1}{bb\,.\,1}\right)\frac{1}{cc\,.\,2} \\
\beta\beta &= \frac{1}{bb\,.\,1}-\frac{bc\,.\,1}{bb\,.\,1}\cdot\beta\gamma \\
\alpha\beta &= -\frac{ab}{aa}\cdot\frac{1}{bb\,.\,1}-\frac{bc\,.\,1}{bb\,.\,1}\,\alpha\gamma \\
\alpha\alpha &= \frac{1}{aa}-\frac{ab}{aa}\,.\,\alpha\beta-\frac{ac}{aa}\,.\,\alpha\gamma
\end{aligned}\right\} \quad \text{N. 51.}$$

Für das im §. 350, 1. angegebene Rechnungsbeispiel ist die Bestimmung der Werthe der Coefficienten der Gleichungen N. 44 am einfachsten und übersichtlichsten nach dem folgenden Schema auszuführen, welches insofern als Fortsetzung des Schemas zur obigen Rechnung (S. 352) anzusehen ist.

$an\,1$	aa 12,75	ab −4,25	ac −3,25	$bn\,0$	bb +10,75	bc −2,25	$cn\,0$	cc +8,75
	$\lg\frac{1}{aa}=0{,}89449-2$ $\frac{1}{aa}=0{,}07843$ $-\frac{ab}{aa}\alpha\beta=0{,}01852$ $-\frac{ac}{aa}\alpha\gamma=0{,}01416$ $\alpha\alpha=0{,}11111$	$\lg\frac{ab}{aa}=0{,}52288-1n$ $\lg\frac{1}{bb.1}=0{,}02996-1$ $\lg\frac{ab}{aa}\cdot\frac{1}{bb.1}=0{,}55284-2n$ $\frac{ab}{aa}\cdot\frac{1}{bb.1}=-0{,}03571$ $\frac{bc.1}{bb.1}\alpha\gamma=-0{,}01984$ $\alpha\beta=0{,}05555$ $\lg\alpha\beta=0{,}74468-2$ $\lg\frac{ab}{aa}\alpha\beta=0{,}26756-2n$ $\frac{ab}{aa}\alpha\beta=-0{,}01852$	$\lg\frac{ac}{aa}=0{,}40637-1n$ $\lg\alpha\gamma=0{,}77473-2$ $\lg\frac{ac}{aa}\alpha\gamma=0{,}15110-2n$ $\frac{ac}{aa}\alpha\gamma=-0{,}01416$		$\lg bb.1=0{,}97004$ $\lg\frac{1}{bb.1}=0{,}02996-1$ $\frac{1}{bb.1}=0{,}10714$ $\frac{bc.1}{bb.1}.\beta\gamma=-0{,}01895$ $\beta\beta=0{,}12609$ $\lg\frac{bc.1}{bb.1}=0{,}55284-1n$ $\lg\alpha\gamma=0{,}74473-2$ $\lg\frac{bc.1}{bb.1}.\alpha\gamma=0{,}29757-2n$ $\frac{bc.1}{bb.1}.\alpha\gamma=-0{,}01984$	$\lg-\frac{bc.1}{bb.1}=0{,}55284-1$ $0{,}17191-1$ $\lg\beta\gamma=0{,}72475-2$ $\beta\gamma=0{,}05306$ $\lg\frac{bc.1}{bb.1}=0{,}55284-1n$ $\lg\frac{ab}{aa}=0{,}52288-1n$ $0{,}07572-1$ $\frac{ab}{aa}\cdot\frac{bc.1}{bb.1}=0{,}11905$ $-\frac{ac}{aa}=0{,}25490$ $0{,}37395$ $\lg\ldots.=0{,}57282-1$ $\lg\frac{1}{cc.2}=0{,}17191-1$ $\lg\alpha\gamma=0{,}74473-2$ $\alpha\gamma=0{,}05556$ $\lg\frac{bc.1}{bb.1}=0{,}55284-1n$ $\lg\beta\gamma=0{,}72475-2$ $\lg\frac{bc.1}{bb.1}\beta\gamma=0{,}27759-2n$ $\frac{bc.1}{bb.1}\beta\gamma=-0{,}01895$		$\lg cc.2=0{,}82809$ $\lg\frac{1}{cc.2}=0{,}17191-1$ $\gamma\gamma=0{,}14856$

Die Gleichungen zwischen den Verbefserungen (1), (2) .... und [1], [2] .... sind daher nach N. 44:

$$(1) = 0{,}11111\,[1] + 0{,}05555\,[2] + 0{,}05556\,[3]$$
$$(2) = 0{,}05555\,[1] + 0{,}12609\,[2] + 0{,}05306\,[3]$$
$$(3) = 0{,}05556\,[1] + 0{,}05306\,[2] + 0{,}14856\,[3]$$

§. 482.

Diese Rechnungen, so wie die im §. 350, 1. ausgeführten Ausgleichungen der Beobachtungen auf den Stationen im Horizont sind es, welche stationsweise mit der weiter geführten Aufnahme des Dreiecksnetzes fortschreiten. Dann fafst man alle diejenigen Dreiecke zu einer Figur zusammen, in deren Winkelpunkten alle Beobachtungen der Richtungen vorgenommen sind, um die hier in Rede stehenden Ausgleichungen in Bezug auf das Dreiecksnetz auszuführen, zu welchem Zwecke aber bereits die Winkel- und Seitengleichungen insofern abgeleitet wurden, als man die Ausgleichungen auf den Stationspunkten von den Verbefserungen im Dreiecksnetz trennte.

Hier nehmen daher nach den obigen Beziehungen die Bedingungsgleichungen N. 26, welche auch in der Form

$$\mathfrak{A} = \alpha A + \alpha_1 B + \alpha_2 C + \ldots.$$
$$\mathfrak{B} = \beta A + \beta_1 B + \beta_2 C + \ldots.$$
$$\mathfrak{C} = \gamma A + \gamma_1 B + \gamma_2 C + \ldots.$$
u. s. w.

zu geben sind, die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \alpha\,(1) + \alpha_1\,(2) + \alpha_2\,(3) + \ldots. \\ \mathfrak{B} &= \beta\,(1) + \beta_1\,(2) + \beta_2\,(3) + \ldots. \\ \mathfrak{C} &= \gamma\,(1) + \gamma_1\,(2) + \gamma_2\,(3) + \ldots. \end{aligned}\right\} \quad \text{N. 52.}$$
u. s. w.

an.

Führt man nun wieder, wie im §. 351, die Correlaten I, II, III ein und drückt diese durch die Verbefserungen [1], [2], [3] .... aus, indem man die Gleichungen N. 44 mit ihnen multipliciert, so erhält man die ersten Correlatengleichungen

$$\left.\begin{aligned} [1] &= \alpha\ \mathrm{I} + \beta\ \mathrm{II} + \gamma\ \mathrm{III} + \ldots. \\ [2] &= \alpha_1\,\mathrm{I} + \beta_1\,\mathrm{II} + \gamma_1\,\mathrm{III} + \ldots. \\ [3] &= \alpha_2\,\mathrm{I} + \beta_2\,\mathrm{II} + \gamma_2\,\mathrm{III} + \ldots. \end{aligned}\right\} \quad \text{N. 53.}$$
u. s. w.

Substituiert man ferner die Werthe für [1], [2], [3] in den Gleichungen N. 44, so erhält man die zweiten Correlatengleichungen

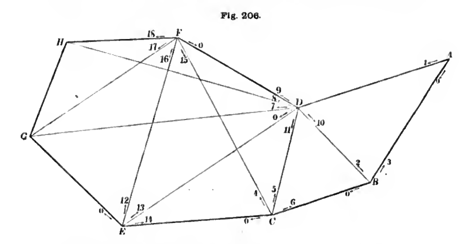
$$\left.\begin{aligned}(1) &= \mathfrak{a}\ \mathrm{I} + \mathfrak{b}\ \mathrm{II} + \mathfrak{c}\ \mathrm{III} + \dots\\(2) &= \mathfrak{a}_1\ \mathrm{I} + \mathfrak{b}_1\ \mathrm{II} + \mathfrak{c}_1\ \mathrm{III} + \dots\\(3) &= \mathfrak{a}_2\ \mathrm{I} + \mathfrak{b}_2\ \mathrm{II} + \mathfrak{c}_2\ \mathrm{III} + \dots\end{aligned}\right\}\quad \text{N. 54.}$$

u. s. w.

Werden nun die Werthe für (1), (2), (3) .... in die Bedingungsgleichungen N. 52 gesetzt, so erhält man die Normalgleichungen N. 29, deren Auflösung die Werthe für die Correlaten I, II, III .... giebt. Durch Substitution dieser letzteren in N. 54 endlich erhält man die gesuchten Verbeſserungen, welche den gegebenen für den Horizont ausgeglichenen Beobachtungen beizufügen sind.

Zur Erläuterung diene das folgende, aus der Baeyerschen preuſs. Küstenvermeſsung entnommene Beispiel des vorliegenden Dreiecksnetzes *A B C D E* .... in Fig. 206. Die Resultate auf den Stationspunkten,

Fig. 206.



mit Einschluſs der vorgenommenen Centrierungen und mit Hinzufügung der noch übrig bleibenden Verbeſserungen sind folgende:

1) Station *A*:	Object	*B*:	359° 59′ 59″,243.	
		D:	32° 21′ 48″,230 +	(1)
„ *B*:	„	*C*:	0° 0′ 0″	
		D:	54° 55′ 32″,889 +	(2)
		A:	153° 29′ 15″,931 +	(3)
„ *C*:	„	*E*:	0° 0′ 0″	
		F:	58° 6′ 53″,834 +	(4)
		D:	81° 9′ 28″,196 +	(5)
		B:	172° 11′ 5″,803 +	(6)

Station D: Object $E: 359^{0}\ 59'\ 28'',369$
$G:\ 55^{0}\ 59'\ 23'',814 + (7)$
$H:\ 77^{0}\ 20'\ 29'',884 + (8)$
$F:\ 82^{0}\ 23'\ 16'',496 + (9)$
$A: 221^{0}\ 39'\ 42'',452$ *)
$B: 270^{0}\ 44'\ 12'',596 + (10)$
$C: 304^{0}\ 47'\ 3'',858 + (11)$

" E: " $G:\ 0^{0}\ 0'\ 0''$
$F:\ 51^{0}\ 22'\ 37'',166 + (12)$
$D:\ 93^{0}\ 55'\ 18'',384 + (13)$
$C: 137^{0}\ 33'\ 28'',197 + (14)$

" F: " $D:\ 0^{0}\ 0'\ 0''$
$C:\ 19^{0}\ 21'\ 16'',018 + (15)$
$E:\ 55^{0}\ 3'\ 34'',862 + (16)$
$G: 137^{0}\ 16'\ 19'',601 + (17)$
$H: 171^{0}\ 35'\ 38'',478 + (18)$

2) Nach §§. 358 und 359 werden hier 5 Winkelgleichungen und 1 Seitengleichung als Bedingungsgleichungen zu bilden sein.

$\Delta\, ABD$.

$$A = 32^{0}\ 21'\ 48,''987 + (1)$$
$$B = 98^{0}\ 33'\ 43,''042 + (3) - (2)$$
$$D = 49^{0}\ 4'\ 30,''144 + (10)$$
$$\text{Summe} = 180^{0}\ 0'\ 2,''173$$
$$180 + \varepsilon = 180^{0}\ 0'\ 3,''568 \text{ **)}$$
$$\text{I. } 1,395 = +(1) - (2) + (3) + (10).$$

*) Ohne Verbefserung, weil DA für $\sphericalangle ADB$ die linksliegende Seite ist.

**) Da es hier auf die möglichst genaue Bestimmung des sphärischen Excesses ankommt, um die richtige Winkelgleichung für ein Dreieck zu erhalten, so reicht die Berechnung desselben nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie nicht aus, sondern es mufs dabei die Erde als ein Rotations-Ellipsoid von den bekannten Dimensionen angesehen werden (vgl. §. 7). Bei der Berechnung der Dreiecksnetze in Ostpreussen und der Küstenvermefsung wurde der Log. der in Toisen gegebenen grofsen Achse $a = 6{,}51479225$ und die Abplattung $\alpha = \frac{1}{310}$ angenommen und der Berechnung von ε zum Grunde gelegt. Bezeichnet φ das arithmetische Mittel der Polhöhen der drei Dreieckspunkte und e die Excentricität der erzeugenden Ellipse, so ist der Krümmungshalbmefser ρ im Meridian

$$= \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin\varphi^2)^3}}$$

und der Krümmungshalbmefser ρ_1, senkrecht auf denselben

$$= \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin\varphi^2}}.$$

Das Dreieck gehört also einer Kugel an, deren Halbmefser $\sqrt{\rho\rho_1}$ ist. Dann berechnet sich der sphärische Excess nach der Formel

$\Delta\, BCD$.

$$
\begin{aligned}
B &= 54^{0}\; 55'\; 32{,}''889 + (2)\\
C &= 91^{0}\;\; 1'\; 37{,}''607 + (6) - (5)\\
D &= 34^{0}\;\; 2'\; 51{,}''262 + (11) - (10)\\
\hline
\text{Summe} &= 180^{0}\;\; 0'\;\; 1{,}''758\\
180 + \varepsilon &= 180^{0}\;\; 0'\;\; 1{,}''172\\
\hline
\text{II.}\; -0{,}586 &= +(2) - (5) + (6) - (10) + (11)
\end{aligned}
$$

Ebenso erhält man für die Dreiecke CDE, DEF und CDF die Winkelgleichungen:

$$
\begin{aligned}
&\text{III.}\; -0{,}506 = +(5) - (11) - (13) + (14)\\
&\text{IV.}\; -1{,}336 = +(9) - (12) + (13) + (16)\\
&\text{V.}\; -1{,}654 = -(4) + (5) + (9) - (11) + (15)
\end{aligned}
$$

und für das Viereck $CDEF$ die Seitengleichung:

$$
\begin{aligned}
\text{VI.}\; 3{,}857 = &-2{,}351\,(4) + 2{,}1954\,(5) + 1{,}0896\,(12) - 2{,}1384\,(13)\\
&+ 1{,}0488\,(14) - 2{,}8469\,(15) + 0{,}6987\,(16)
\end{aligned}
$$

3) Ferner würde man nach §. 481 die den Gleichungen N. 44 entsprechenden Zahlengleichungen erhalten:

$$(1) = 0{,}04762\,[1] \text{ für Station } A.$$

$$
\left.\begin{aligned}
(2) &= 0{,}06201\,[2] + 0{,}02148\,[3]\\
(3) &= 0{,}02148\,[2] + 0{,}05469\,[3]
\end{aligned}\right\}\text{ für Station } B.
$$

$$
\left.\begin{aligned}
(4) &= 0{,}08211\,[4] + 0{,}02656\,[5] + 0{,}02965\,[6]\\
(5) &= 0{,}02656\,[4] + 0{,}05793\,[5] + 0{,}02969\,[6]\\
(6) &= 0{,}02965\,[4] + 0{,}02969\,[5] + 0{,}06310\,[6]
\end{aligned}\right\}\text{ für Station } C.
$$

$$
\left.\begin{aligned}
(7) &= 0{,}04396[7] + 0{,}01648[8] + 0{,}01263[9] + 0{,}00611[10] + 0{,}00643[11]\\
(8) &= 0{,}01648[7] + 0{,}02641[8] + 0{,}01328[9] + 0{,}00761[10] + 0{,}00846[11]\\
(9) &= 0{,}01263[7] + 0{,}01328[8] + 0{,}03549[9] + 0{,}00575[10] + 0{,}00558[11]\\
(10) &= 0{,}00611[7] + 0{,}00761[8] + 0{,}00575[9] + 0{,}06432[10] + 0{,}02250[11]\\
(11) &= 0{,}00643[7] + 0{,}00846[8] + 0{,}00558[9] + 0{,}02250[10] + 0{,}05233[11]
\end{aligned}\right\}\text{ für Station } D.
$$

$$
\left.\begin{aligned}
(12) &= 0{,}06922\,[12] + 0{,}03827\,[13] + 0{,}03622\,[14]\\
(13) &= 0{,}03827\,[12] + 0{,}07401\,[13] + 0{,}04334\,[14]\\
(14) &= 0{,}03622\,[12] + 0{,}04334\,[13] + 0{,}07336\,[14]
\end{aligned}\right\}\text{ für Station } E.
$$

$$
\left.\begin{aligned}
(15) &= 0{,}09980[15] + 0{,}01844[16] + 0{,}01028[17] + 0{,}01458[18]\\
(16) &= 0{,}01844[15] + 0{,}01428[16] + 0{,}01654[17] + 0{,}01586[18]\\
(17) &= 0{,}01082[15] + 0{,}01654[16] + 0{,}04726[17] + 0{,}01712[18]\\
(18) &= 0{,}01458[15] + 0{,}01586[16] + 0{,}01712[17] + 0{,}03399[18]
\end{aligned}\right\}\text{ für Station } F.
$$

$$\varepsilon = \frac{bc \sin A}{2\rho\rho_1}\; 206265 \text{ Sekunden},$$

worin b und c die den Winkel A einschliefsenden Seiten des sphäroidischen Dreiecks ABC bezeichnen.

4) Bildung der ersten Correlatengleichungen aus den angegebenen Bedingungsgleichungen.

$$\begin{aligned}
[1] &= + \mathrm{I}. \\
[2] &= - \mathrm{I} + \mathrm{II} \\
[3] &= + \mathrm{I}. \\
[4] &= - \mathrm{V} - 2{,}351\ \mathrm{VI}. \\
[5] &= - \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{V} + 2{,}1954\ \mathrm{VI}. \\
[6] &= + \mathrm{II}. \\
[7] &= \quad 0 \\
[8] &= \quad 0 \\
[9] &= \quad \mathrm{IV} + \mathrm{V}. \\
[10] &= + \mathrm{I} - \mathrm{II}. \\
[11] &= + \mathrm{II} - \mathrm{III} - \mathrm{V}. \\
[12] &= - \mathrm{IV} + 1{,}0896\ \mathrm{VI}. \\
[13] &= - \mathrm{III} + \mathrm{IV} - 2{,}1384\ \mathrm{VI}. \\
[14] &= + \mathrm{III} + 1{,}0488\ \mathrm{VI}. \\
[15] &= + \mathrm{V} - 2{,}8469\ \mathrm{VI}. \\
[16] &= + \mathrm{IV} + 0{,}6987\ \mathrm{VI}. \\
[17] &= \quad 0 \\
[18] &= \quad 0
\end{aligned}$$

5) Bildung der zweiten Correlatengleichungen durch Substitution der Werthe für [1], [2], [3] .... in den Gleichungen von 3.

$$(1) = 0{,}04762\ \mathrm{I}.$$

$$\left.\begin{aligned}
(2) &= 0{,}04053\ \mathrm{I} + 0{,}06201\ \mathrm{II}. \\
(3) &= 0{,}03321\ \mathrm{I} + 0{,}02148\ \mathrm{II}.
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
(4) &= \quad 0{,}00309\ \mathrm{II} + 0{,}02656\ \mathrm{III} - 0{,}05555\ \mathrm{V} - 0{,}13473\ \mathrm{VI}. \\
(5) &= - 0{,}02770\ \mathrm{II} + 0{,}05739\ \mathrm{III} + 0{,}03083\ \mathrm{V} + 0{,}06355\ \mathrm{VI}. \\
(6) &= \quad 0{,}03341\ \mathrm{II} + 0{,}02969\ \mathrm{III} + 0{,}00004\ \mathrm{V} - 0{,}00453\ \mathrm{VI}.
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
(7) &= 0{,}00611\ \mathrm{I} + 0{,}00032\ \mathrm{II} - 0{,}00643\ \mathrm{III} + 0{,}01263\ \mathrm{IV} + 0{,}00620\ \mathrm{V}. \\
(8) &= 0{,}00761\ \mathrm{I} + 0{,}00085\ \mathrm{II} - 0{,}00846\ \mathrm{III} + 0{,}01328\ \mathrm{IV} + 0{,}00482\ \mathrm{V}. \\
(9) &= 0{,}00575\ \mathrm{I} - 0{,}00017\ \mathrm{II} - 0{,}00558\ \mathrm{III} + 0{,}03549\ \mathrm{IV} + 0{,}02991\ \mathrm{V}. \\
(10) &= 0{,}06432\ \mathrm{I} - 0{,}04182\ \mathrm{II} - 0{,}02250\ \mathrm{III} + 0{,}00575\ \mathrm{IV} - 0{,}01675\ \mathrm{V}. \\
(11) &= 0{,}02250\ \mathrm{I} + 0{,}02983\ \mathrm{II} - 0{,}05233\ \mathrm{III} + 0{,}00558\ \mathrm{IV} - 0{,}04675\ \mathrm{V}.
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
(12) &= - 0{,}00205\ \mathrm{III} - 0{,}03095\ \mathrm{IV} + 0{,}03157\ \mathrm{VI}. \\
(13) &= - 0{,}03067\ \mathrm{III} + 0{,}03574\ \mathrm{IV} - 0{,}07710\ \mathrm{VI}. \\
(14) &= \quad 0{,}03002\ \mathrm{III} + 0{,}00712\ \mathrm{IV} + 0{,}03622\ \mathrm{VI}.
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
(15) &= 0{,}01844\ \mathrm{IV} + 0{,}09980\ \mathrm{V} - 0{,}27124\ \mathrm{VI}. \\
(16) &= 0{,}04128\ \mathrm{IV} + 0{,}01844\ \mathrm{V} - 0{,}02366\ \mathrm{VI}. \\
(17) &= 0{,}01654\ \mathrm{IV} + 0{,}01028\ \mathrm{V} - 0{,}01771\ \mathrm{VI}. \\
(18) &= 0{,}01586\ \mathrm{IV} + 0{,}01458\ \mathrm{V} - 0{,}03043\ \mathrm{VI}.
\end{aligned}\right\}$$

6) Werden die Werthe für (1), (2), (3) .... in den 6 Bedingungsgleichungen von 2) substitniert, so erhält man mit Weglafsung der sich wiederholenden Zahlen die Normalgleichungen

$$
\begin{array}{rl}
1{,}395 = & \underline{0{,}18568\,\mathrm{I}} - 0{,}08235\,\mathrm{II} - 0{,}02250\,\mathrm{III} + 0{,}00575\,\mathrm{IV} - 0{,}01675\,\mathrm{V} \\
-0{,}586 = & \ldots\ldots \underline{+0{,}19477\,\mathrm{II}} - 0{,}05753\,\mathrm{III} - 0{,}00017\,\mathrm{IV} - 0{,}06079\,\mathrm{V} - 0{,}06808\,\mathrm{VI}. \\
-0{,}506 = & \ldots\ldots\ldots\ldots \underline{+0{,}17041\,\mathrm{III}} - 0{,}03420\,\mathrm{IV} + 0{,}07758\,\mathrm{V} + 0{,}15838\,\mathrm{VI}. \\
-1{,}336 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \underline{+0{,}14346\,\mathrm{IV}} + 0{,}04835\,\mathrm{V} - 0{,}12633\,\mathrm{VI}. \\
-1{,}654 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \underline{+0{,}26284\,\mathrm{V}} - 0{,}07296\,\mathrm{VI}. \\
3{,}857 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \underline{+1{,}42326\,\mathrm{VI}}.
\end{array}
$$

7) Durch Auflösung dieser Normalgleichungen erhält man:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= +\ \ 5{,}70969, \\
\mathrm{II} &= -\ \ 2{,}32797, \\
\mathrm{III} &= -\ \ 6{,}47275, \\
\mathrm{IV} &= -\ 11{,}43111, \\
\mathrm{V} &= -\ \ 1{,}98028, \\
\mathrm{VI} &= +\ \ 2{,}41926,
\end{aligned}
$$

und durch Substitution dieser Werthe in den zweiten Correlatengleichungen:

$$
\begin{array}{ll}
(1) = +\,0{,}2719. & (10) = +\,0{,}6077. \\
(2) = -\,0{,}3758. & (11) = +\,0{,}4645. \\
(3) = +\,0{,}1396. & (12) = +\,0{,}1385. \\
(4) = -\,0{,}3951. & (13) = -\,0{,}5506. \\
(5) = -\,0{,}2143. & (14) = -\,0{,}3779. \\
(6) = -\,0{,}2810. & (15) = -\,0{,}9127. \\
(7) = -\,0{,}1177. & (16) = -\,0{,}1897. \\
(8) = +\,0{,}0826. & (17) = +\,0{,}1692. \\
(9) = -\,0{,}4570. & (18) = -\,0{,}1990.
\end{array}
$$

8) Setzt man endlich diese Werthe in die in 1) gegebenen Resultate der Beobachtungen, so ergeben sich die verbefserten Richtungen insofern, als sie sich auf die willkürlich = 0 angenommene Richtung des ersten Objects beziehen. Ueber die Bestimmung des Einflufses der Ausgleichungen auf den Anfangspunkt des Dreiecksnetzes aber vgl. m. die Gradmefsung und Preuss. Küstenvermefsuug.

Die Substitution der Werthe für (1), (2) .... in die in 2) gegebenen Ausdrücke geben die verbefserten Winkel des Netzes.

Ueber die Ausgleichung der gemefsenen und auf die Beobachtungspfeiler reducierten (§. 397) Zenithdistanzen des Dreiecksnetzes verweise ich den Leser auf Baeyer's Küstenvermefsung. S. 434.

E. Berechnung der Seiten, Höhen und Coordinaten der Dreieckspunkte.

§. 483.

Nachdem, wie es im §. 466 angegeben, die **provisorische** Berechnung der Dreiecksseiten ausgeführt ist, erfolgt nun nach der Ausgleichung der Winkel sämmtlicher Dreiecke die **definitive** Bestimmung ihrer Seiten. Dabei kann man nach dem bekannten schönen Legendreschen Satze *) die Rechnung wesentlich erleichtern, indem man die Berechnung kleiner sphärischer oder sphäroidischer Dreiecke durch die Verminderung jedes Winkels um den dritten Theil des Ueberschufses der Summe aller drei über 180° auf die Berechnung ebener Dreiecke, also auf die Formeln der ebenen Trigonometrie zurückführt. Bei grofsen Dreiecksnetzen ist die Rechnung mit Logarithmen von 8 richtigen Decimalstellen nach den gröfseren logarithmischen Tafeln auszuführen.

Anmerkung. Ueber die Gaufsische Correction der Winkel vgl. m. §. 489.

Eine Controle dieser definitiven Berechnung erhält man dadurch, dafs man ebenfalls, wie bei der ersten, von der Basis aus-, aber dann auf ein anderes anliegendes Dreieck übergeht und so bis zu derselben letzten Seite fortrechnet; diese mufs dann sehr annähernd wenigstens mit der aus der ersten Rechnung gefundenen Länge übereinstimmen. Aus diesem Grunde nimmt man der befseren Controle wegen entweder noch eine zweite, s. g. **Verificationsbasis** an, die ebenfalls unmittelbar gemefsen wird, oder schliefst das Dreiecksnetz der bekannten Basis eines benachbarten Landes oder einer früheren Mefsung an.

Die Berechnung der Höhen der Dreieckspunkte kann nach den §§. 398—400 vorgenommen werden. Ist also die Meereshöhe des einen der Punkte bekannt, so ergiebt sich nach §. 400 die Höhe jedes anderen über der Meeresfläche.

§. 484.

Nachdem die Länge der Dreiecksseiten, auch wenigstens ein Winkelpunkt des Dreiecksnetzes astronomisch bestimmt ist, kommt es nun noch auf die Bestimmung der Lage aller Dreieckspunkte gegen den Aequator und einen bestimmten Meridian der Erde an. Zu diesem wählt man meistens den durch die Sternwarte des Landes oder auch den durch einen anderen astronomisch festgelegten Punkt des Dreiecksnetzes gehenden Meridian; er wird der **erste** oder **Hauptmeridian** und der zugehörige Punkt des Netzes der **Hauptpunkt** desselben genannt. Bei

*) Ueber den Beweis des Satzes vgl. m. u. a. die Elemente der Geometrie von **Legendre**, übers. von **Crelle**, Berlin, 1830, S. 416. **Ulrich's** praktische Geometrie II. 8. und **Bauernfeind's** Vermefsungskunde, 2. Aufl., S. 555.

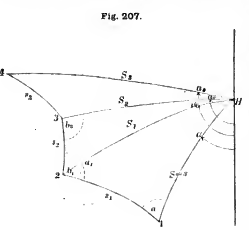
der linearen Coordinatenbestimmung ist er der **Aufangspunkt**, bei der polaren der **Pol** der Coordinaten; für die erstere enthält der normal auf den ersten Meridian gelegte gröfste Kreis, auch hier das **Perpendikel** genannt, die Ordinaten, während im Meridian die Abscissen liegen. Diese stellen also Meridianbogen vor und werden meistens nach Süden hin positiv genommen; eben so gelten die auf dem Perpendikel genommenen Bogen, als Ordinaten, nach Westen hin meistens als positiv.

§. 485.

Aufgabe. **Aus den berechneten Dreiecksseiten s, s_1, s_2 ...., der bekannten astronomisch bestimmten Lage des Hauptpunktes H des Dreiecksnetzes und dem Azimuth α der ersten von dem Hauptpunkte ausgehenden Seite s, die Polarcoordinaten aller anderen Winkelpunkte zu bestimmen.**

Es seien die sphärischen Entfernungen der Punkte 1, 2, 3 .... (Fig. 207) des Dreiecksnetzes von dem Hauptpunkte H durch S (welche daher mit s zusammenfällt), S_1, S_2 .... und die Azimuthe derselben durch α (also bekannt), α_1, α_2 .... bezeichnet; die Winkel zwischen den auf einander folgenden Seiten s und s_1, s_1 und s_2, s_2 und s_3 .... seien beziehungsweise a, a_1, a_2 .... und die Winkel zwischen S_1 und s_1, S_2 und s_2 .... seien b_1, b_2 ...., so sind die Winkel zwischen S_1 und s_2, S_2 und s_3 .... $= a_1 - b_1$, $a_2 - b_2$ .... Alsdann ist in dem sphärischen Dreieck $H\,1\,2$ nach den Gaufsischen Gleichungen:

Fig. 207.



$$\sin \tfrac{1}{2} S_1 \sin \tfrac{1}{2} (b_1 + \alpha - \alpha_1) = \sin \tfrac{1}{2} (S - s_1) \cos \tfrac{1}{2} a$$
$$\sin \tfrac{1}{2} S_1 \cos \tfrac{1}{2} (b_1 + \alpha - \alpha_1) = \sin \tfrac{1}{2} (S + s_1) \sin \tfrac{1}{2} a$$
$$\cos \tfrac{1}{2} S_1 \sin \tfrac{1}{2} (b_1 - \alpha + \alpha_1) = \cos \tfrac{1}{2} (S - s_1) \cos \tfrac{1}{2} a$$
$$\cos \tfrac{1}{2} S_1 \sin \tfrac{1}{2} (b_1 - \alpha + \alpha_1) = \cos \tfrac{1}{2} (S + s_1) \sin \tfrac{1}{2} a$$

woraus daher auf bekannte Art S_1, b_1 und α_1 zur Festlegung des Punktes 2 sich ergeben. Auf dieselbe Weise erhält man aus dem

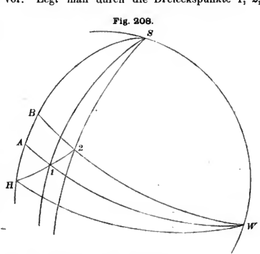
Dreieck $H23: S_2$, b_2 und α_2 und so fort von Punkt zu Pnnkt durch die ganze Kette der Seiten, woraus also die Möglichkeit der Berechnung sich ergiebt. Wendet man aber den Legendre'schen Satz an, um die Dreiecke als geradlinichte zu berechnen, so werden die Rechnnngen noch vereinfacht, ohne an Schärfe viel zu opfern. Hierüber vgl. m. die Abhandlung von Bessel in Schumacher's astronomischen Nachrichten Bd. 1 Nr. 3. Auch hat Bessel in Nr. 6 die Berechnung des Dreiecksnetzes angegeben, wenn die Erde nicht als eine Kugel, sondern als ein Rotations-Ellipsoid angesehen wird.

§. 486.

Aufgabe. Unter den im vorigen Paragraphen angegebenen Voraussetzungen, die Linearcoordinaten aller anderen Winkelpunkte zu bestimmen.

In Fig. 208 stelle HAS den Meridian des Hauptpunktes, WH das Perpendikel desselben vor. Legt man durch die Dreieckspunkte 1, 2, 3.... ebenfalls Meridiane und Perpendikel, so sind die Abscissen $HA = x_1$, $HB = x_2$.... und die zugehörigen Ordinaten $A1 = y_1$, $B2 = y_2$.... zu berechnen. Aus dem rechtwinklicht sphärischen Dreieck $AH1$, in welchem $H1 = s$ u. $AH1 = \alpha$, ergeben sich daher die Werthe für x_1 und y_1 ohne Weiteres. Nennt man nun die zu den

Fig. 208.



Bogen x_1 und y_1 gehörigen Winkel beziehungsweise ξ_1 und υ_1, so ist

$$\operatorname{tg} \xi_1 = \operatorname{tg} s \cos \alpha$$

und

$$\sin \upsilon_1 = \sin s \sin \alpha,$$

drückt man ξ_1 und υ_1 in Sekunden aus, so ist

$$x_1 = \frac{r\xi_1}{206265} \text{ und } y_1 = \frac{r\upsilon_1}{206265}.$$

Da nun nach §§. 478 u. 479 aus der Polhöhe, der geographischen Länge und dem Azimuth α der Seite s die Polhöhe, die Länge

und das Azimuth aller anderen Dreieckspunkte sich bestimmen lafsen, so sind in dem sphärischen Dreieck $B2S$ wieder die Hypotenuse und der Winkel $BS2$ (gleich der Summe der Längenunterschiede der Meridiane $S2$ und $S1$ gegen SH) bekannt, woraus dann wieder, wie vorhin

$$x_2 = \frac{r\xi_2}{206265} \text{ und } y_2 = \frac{r\upsilon_2}{206265}.$$

sich ergeben werden.

Auf dieselbe Weise ergeben sich die Coordinaten für alle anderen Dreieckspunkte. Diefs mag hier hinreichen, um die Möglichkeit der Berechnung der Linearcoordinaten zu zeigen. Bei der praktischen Ausführung wendet man aber Statt der obigen, viel Rechnung erfordernden Formeln, Näherungsausdrücke an, worüber u. a. Bauernfeind's Vermefsungskunde, 2. Aufl. S. 563 u. f. zu vergleichen ist.

Die Berechnung der Linearcoordinaten nach Schleiermacher bei der Grofsh. Hessischen Landesvermefsung, wobei auf die ellipsoidische Gestalt der Erde Rücksicht genommen ist, findet man in Fischer's Lehrb. der höheren Geodäsie. 3. Abschn., Darmstadt, 1846. S. 124 u. f.

Schliefslich verweise ich den Leser noch auf die gelehrte Bessel'sche Abhandlung „über den Einflufs der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten u. s. w.“ in Schumacher's astronom. Nachrichten, XIV. Nr. 329–331.

§. 487.

Ganz verschieden von den im Vorhergehenden angegebenen Berechnungen der Coordinaten der Dreieckspunkte ist die von Gaufs angewandte Projectionsmethode bei der in den Jahren 1821 bis 1844 ausgeführten trigonometrischen Vermefsung des vormaligen Königreichs Hannover. Die Principe, nach welchen Gaufs seine Projection entwickelt hat, finden sich in umfafsendster Allgemeinheit in der im 3. Hefte von Schumacher's astronomischen Abhandlungen, Altona, 1825 abgedruckten Preisschrift „Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dafs die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird, von C. F. Gaufs.“

Die anzuwendenden Formeln zu dem Verfahren, die praktischen Mefsungen zu berechnen, finden sich, jedoch ohne Herleitung, hauptsächlich in dem 2. und 3. Bande des Briefwechsels zwischen C. F. Gaufs und H. C. Schumacher, herausgegeben von C. A. F. Peters, Altona, 1860, so wie übersichtlich zusammengestellt in den Erläuterungen der geodätischen Tafeln für die Nord- und Ostsee-Küste u. s. w. vom Wafserbau-Inspector Taaks, Aurich, 1865. Eine Entwicklung der Gaufs'schen Projectionsmethode enthält die vortreffliche Schrift: Theorie

der Projectionsmethode der Hannoverschen Landesvermefsung von O. Schreiber, Hannover, 1866. Auf letztere beiden Schriften mufs ich den Leser, dem es um die Erlangung einer gründlichen Kenntnifs der erwähnten Methode zu thun ist, verweisen. Der Ersparung des Raums wegen kann nur das Folgende mitgetheilt werden, um wenigstens ein Bild von dem anzuwendenden Verfahren, die geodätischen Mefsungen zu berechnen, zu geben*).

1) Die auf jedem Standpunkte beobachteten Winkel werden unter sich ausgeglichen und die excentrisch gemefsenen Winkel centriert.

2) Das durch die Mefsungen gebildete Dreieckssystem, worin sämmtliche Winkel, die Länge wenigstens einer Seite und das Azimuth wenigstens einer Seite bekannt sein müfsen, wird dann so auf eine Ebene übertragen, dafs hier ein System geradlinichter Dreiecke erhalten wird, dessen Winkelpunkte die Projectionen der Winkelpunkte jenes Systems sind und worin die den bekannten Stücken jenes Systems correspondirenden Stücke mit gleicher Schärfe bestimmt sind. Hierdurch wird dann der bedeutende Vortheil erlangt, dafs die weiteren Berechnungen ganz wie in einer Ebene ausgeführt werden können.

3) In diesem projicierten ebenen Dreieckssystem werden dann die Winkel nach den vorhandenen Bedingungsgleichungen ausgeglichen und hiermit zugleich die definitive Orientieruung jeder Dreiecksseite verbunden.

4) Hierauf werden die Dreiecksseiten und die ebenen Coordinaten der Dreieckspunkte und der Punkte untergeordneten Ranges berechnet.

§. 488.

In der erwähnten Projectionsmethode sind die Mefsungsresultate in der Form von ebenen rechtwinklichten Coordinaten einer Anzahl auf der Erde sichtbarer Punkte gegeben. Der Anfangspunkt der Coordinaten ist die Projection eines Punktes am Reichenbach'schen Meridiankreise der Göttinger Sternwarte. Die Abscisseuachse ist die Gerade, welche den durch den Anfangspunkt gehenden Meridian darstellt, während das Bild jedes anderen Meridians eine Curve ist. Jener Meridian wird der Fundamental- oder Hauptmeridian genannt. Die geographische Breite des Anfangspunktes $\varphi_0 = 51^0\,31'\,47,''85$. Den Berechnungen hat Gaufs die Walbeck'schen Bestimmungen der Erddimensionen zu Grunde gelegt, weil diese im Jahre 1821 die besten waren. Nach ihnen ist die Abplattung $\alpha = \frac{1}{302,78}$, der Meridianquadrant $Q = 5130878,22$ Toisen (vgl. Einl. §. 10). Als Längeneinheit hat Gaufs

*) O. Schreiber a. a. O.

den zehnmillionsteu Theil desselbeu angenommen und diese Länge Meter genannt.

Die halbe grofse Achse der durch Umdrehung um ihre kleine Achse die Ellipsoidfläche erzeugenden Ellipse

$= a$ in Metern: $\log a = 6{,}8045975970$
in Toisen: $\log a = 6{,}5147893039$
$e =$ Excentricität $\log e^2 = 7{,}8191850399$
$\delta = \frac{e^2}{1-e^2}$ $\log \delta = 7{,}8220585008.$

In Betreff der Uebertragungen ist noch zu bemerkeu, dafs wenn A und B zwei Punkte auf dem Erdsphäroid, a und b ihre Bilder auf der Ebeue sind, dann der Winkel ϑ_1, deu die Gerade ab in a mit der positiven Richtung der x Achse bildet, das Azimuth in plano vou ab genannt wird. Sind x_1, y_1 die Coordinaten von a und x_2, y_2 die von b, so ist wie im §. 370

$$\text{tg}\, \vartheta_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Dagegen wird vou Gaufs der Winkel T_1, den auf der Ellipsoidfläche AB iu A mit der Curve bildet, deren Darstellung auf der Ebene die durch a gehende Parallele zur x Achse ist, das Azimuth von AB auf dem Sphäroid, und der Winkel, den die Darstellung des Meridians von A, mit der erwähnten durch a gehenden Parallele zur x Achse einschliefst, die Convergenz des Meridians iu A oder a genannt. Bezeichnet man diesen Winkel durch c, durch t_1 dagegen das astronomische Azimuth, so ist

$$T_1 = t_1 + c.$$

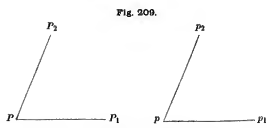
Das Azimuth iu plano und das Azimuth auf dem Sphäroid werden hier schlechthin Azimuth genannt.

Es ist Oben bemerkt, dafs iu dem Dreiecksnetz das Azimuth wenigstens einer Seite bekannt seiu müfse. Hierunter ist aber nur das astronomische Azimuth zu verstehen, welches durch unmittelbare Mefsung bestimmt wird, während das Azimuth auf dem Sphäroid durch Rechnung sich bestimmen läfst. Es folgt, dafs für alle Punkte des Fundamentalmeridians $c = 0$, eben so, dafs für eine vom Anfangspunkte ausgehende Dreiecksseite $T_1 = t_1$ ist, daher auch hier die Azimuthe sämmtlicher Seiten sich wie im §. 368 bestimmen lafsen.

§. 489.

1. Bezeichnet in Fig. 209 $p_1 p p_2$ den Winkel in der Projectionsebene, der einem auf dem Erdsphäroid gemefsenen sphärischen Winkel $P_1 P P_2$ entspricht, so bedürfen die Punkte P_1 und P_2 einer Correction aus P, welche man wieder die Correction des Azimuths von P_1

Fig. 209.



und P_2 aus P nennt. Die Beziehung zwischen $p_1\,p\,p_2$ und $P_1\,P\,P_2$ ist in dem Briefwechsel, II. S. 62 durch die Formel

$$p_1\,p\,p_2 = P_1\,P\,P_2 + H_1\,(x_1 - x)\left(\frac{2y+y_1}{3}\right) - H_2\,(x_2 - x)\left(\frac{2y+y_2}{3}\right)$$

gegeben, worin x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 beziehungsweise die Coordinaten von p, p_1, p_2, so wie $H_1\,(x_1 - x)\left(\frac{2y+y_1}{3}\right)$ und $H_2\,(x_2 - x)\left(\frac{2y+y_2}{3}\right)$ die erwähnten Correctionen bezeichnen und $H_1 = \frac{206265\,(1 - ee \sin \chi_1^2)^2}{2\,aa\,(1 - ee)}$ und $H_2 = \frac{206265\,(1 - ee \sin \chi_2^2)^2}{2\,aa\,(1 - ee)}$ ist.

In den letzteren Ausdrücken sind χ_1 und χ_2 Hülfswinkel, welche den Argumenten $\frac{2x+x_1}{3}$ und $\frac{2x+x_2}{3}$ entsprechen. Nachdem jene Correctionen angewandt sind, hat man mit allen Winkeln so zu rechnen, als ob sie einer Ebene zugehören. Dabei ist eine genäherte Kenntnifs von x, x_1, y .... hinreichend, wie man sie erhält, wenn man anfangs ohne Correction rechnet. Zu den erwähnten Rechnungen dienen die Taaks'schen geod. Tafeln.

2. Die Uebertragung derjenigen Dreiecksseiten, deren Länge entweder, wie bei der Basis, unmittelbar gemefsen, oder durch benachbarte trigonometrische Mefsungen als Anschlufsseite bekannt ist, geschieht nach der im Briefwechsel II., S. 264 angegebenen Formel:

$$\log r = \log R + [\alpha\,(\gamma + \gamma_1)^2 + \beta\,(y - y_1)^2]\,H,$$

worin R die wirkliche Länge einer kürzesten Linie auf dem Sphäroid ist, deren Endpunkte in der Projectionsebene die Coordinaten x, y, x_1, y_1 haben, r die Länge der projicierten Linie $= \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$, $\alpha = \frac{k}{4.206265}$, $\beta = \frac{k}{12.206265}$, k der Modulus der hyperbolischen Logarithmen und $H = \frac{206265\,(1 - ee \sin \chi^2)}{2\,aa\,(1 - ee)}$ ist. Für den Gebrauch der Logarithmen ist $\log \alpha = 3{,}72130 - 10$ und $\log \beta = 3{,}24418 - 10$. Aus Tafel II von Taaks geod. Tfln. findet man für die Argumente y und y_1 den Werth $\frac{r}{R}$. In der Praxis kommt diese Rechnung nur ein Mal, bei der Reduction der Basis auf die Projectionsebene vor.

3. Für die Berechnung der Coordinaten der Dreieckspunkte aus ihren Breiten und Längen giebt Gaufs im Briefwechsel II., S. 258 die Formeln:

$$x = A - A_1\lambda\lambda - A_2\lambda^4 - A_3\lambda^6 - \ldots.$$
$$y = B\lambda + B_1\lambda^3 + B_2\lambda^5 + \ldots.$$

worin x und y der Breite φ und Länge λ entsprechen. Ist die wirkliche Distanz des Ortes, dessen Polhöhe φ_0 ist (§. 488), vom Aequator $= u_0$ und u die Aequatordistanz des Parallelkreises von der Breite φ, in derselben Einheit ausgedrückt, die man für die Coordinaten gewählt hat, so ist $A = u_0 - u$. Setzt man dann ferner $\cos\varphi = c$, $\sin\varphi = s$, $\sqrt{1 - e^2 s^2} = q$, so ist $A_1 = \frac{asc}{2q}$,

$$A_2 = \frac{asc}{24(1-e^2)^2 q}\,[5 - e^2(6 + 6e^2)s^2 + (9e^2 + 3e^4)s^4 - 4e^4 s^6],$$
$$B = \frac{ac}{q},$$
$$B_1 = \frac{ac}{6(1-e^2)q}\,(1 - 2s^2 + e^2 s^4).$$

Ueber die wirkliche Berechnung der Coordinaten aus Länge und Breite, sowie über die Lösung und Berechnung der umgekehrten Aufgaben, aus gegebenen Coordinaten die Breite, Länge und den Convergenzwinkel zu bestimmen und die Anwendung der Hülfstafeln dabei, vergleiche man die oben angeführten Werke von O. Schreiber und Taaks.

Anmerkung. Weil sowohl bei der Reduction gemefsener Richtungen, als der Berechnung der Länge der Seiten eine genäherte Kenntnifs der Coordinaten der Dreieckspunkte vorausgesetzt wird, so mufs eine vorläufige Berechnung, die nur von geringer Schärfe zu sein braucht, die Ausführung der Mefsungen Schritt für Schritt begleiten, wie auch schon früher, u. a. beim Centrieren der excentrisch gemefsenen Winkel, auf eine solche provisorische Rechnung aufmerksam gemacht ist.

Ueber die Gaufs'sche Projectionsmethode ist dem Leser weiter noch zu empfehlen: Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Von C. F. Gaufs. Göttingen, 1844, sowie dessen Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona. Göttingen, 1828, und Chr. L. Gerling's Beiträge zur Geographie Kurhessens u. s. w. Cassel, 1839.

II. Die Aufnahme des Details.

§. 490.

Diese erfolgt nach den in der zweiten Abtheilung (Abschn. 4, Cap. 4) des ersten Buches angegebenen Sätzen.

III. Die Entwerfung geographischer Karten.

§. 491.

Könnten auch gröfsere Theile der Erdoberfläche, wie es bei kleineren, von etwa 6 Quadratmeilen Gröfse gestattet ist, als eben ange-

sehen werden, oder ließe sich die Erdoberfläche, wie es bei dem Mantel eines Cylinders oder Kegels der Fall ist, in eine Ebene abwickeln, so würde die Entwerfung einer geographischen Karte keine Schwierigkeit haben. Da dieß aber nicht der Fall ist, so ist es auch nicht möglich, bei großen Theilen der Erdoberfläche die vorhandenen Configurationen in einer Ebene so darzustellen, daß die Darstellung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen proportional wird. Im Allgemeinen wird man sich mit einem Näherungsverfahren begnügen müßen, das, je nach der Größe der darzustellenden Fläche, der Wahrheit mehr oder weniger nahe kommt. Dabei hezwecken noch die Darstellungen entweder eine möglichst richtige Lage der Wohnörter, oder der Größe der Fläche der Länder.

§. 492.

Soll eine Karte hauptsächlich nur die geographischen Breiten und Längen angeben, so darf man sowohl die Meridiane, als die Breiten- oder Parallelkreise als normal auf einander stehende gerade Linien zeichnen. In das dadurch entstandene Kartennetz, das Rechts und Links, so wie Oben und Unten, etwa von Grad zu Grad u. s. w. bezeichnet ist, können dann die Oerter nach ihrer gegebenen Breite und Länge eingetragen werden. Diese Platt- oder Schiffer-Karten können daher nur bei Ländern von geringer Ausdehnung nach der Breite ein richtiges ähnliches Bild des Abgebildeten liefern, weil ja eigentlich die Parallel- oder Längengrade nach dem Cosinus der Breite abnehmen müßen.

§. 493.

Will man aber, wie es bei den Seekarten am bequemsten ist, das im vorigen Paragraphen angegebene Kartennetz beibehalten, so kann die Unrichtigkeit, die aus den unrichtigen Längengraden entsteht, nur dadurch wieder aufgehoben werden, daß man bei unveränderten gleichen Längengraden, die Breitengrade nach den Polen zu dergestalt wachsen läßt, daß wenn die Breite eines Parallelkreises $= \beta$ ist, der auf ihm unveränderliche Längengrad zu dem neben ihm befindlichen Meridian- (Breiten-) Grade sich wie $\cos \beta : 1$ verhält. Nach dem Niederländer Gerhard Mercator, der schon 1550 zuerst solche Karten herausgab, wird diese Projection der Karten Mercators-, auch Wrights-Projection genannt, da der Engländer Edward Wright zuerst ihre Theorie angab. Die nach dieser Projection construierten Karten werden auch Karten mit wachsenden Meridiangraden, auch reducierte Karten und hydrographische Karten genannt.

Die in den §§. 487—489 dargestellte Gauß'sche Projectionsmethode ist der Mercator'schen analog, nur mit dem Unterschiede, daß bei der ersteren die Erde als ein Umdrehungs-Ellipsoid, bei der letzteren aber

als Kugel angenommen wird. Aufserdem wird nach Gaufs der Fundamental- oder Hauptmeridian durch eine Gerade dargestellt, deren Abschnitte den durch sie dargestellten elliptischen Meridianbogen gleich sind, während die Mercator'sche Projection den Aequator so als eine Gerade darstellt, dafs dessen Abschnitte den entsprechenden Aequatorbogen gleich sind.

Man bedient sich der Mercator'schen Projection bei den Darstellungen der allgemeinen Weltkarte und der hydrographischen und physikalischen Karten in den Atlanten.

§. 494.

Um die Entstellung der Vierecke des Netzes gegen die Vierecke auf der Erdoberfläche zu vermeiden, welche aus dem nach der Mercator'schen Projection vorhandenen Parallelismus der Meridiane entsteht, hat man in anderen Entwerfungsarten die Meridiane wohl durch convergierende Gerade und die Parallelkreise theils durch Gerade, theils durch Kreisbogen dargestellt. Von ihnen mag hier nur die folgende s. g. Bonne'sche Entwerfungsart eine Stelle finden.

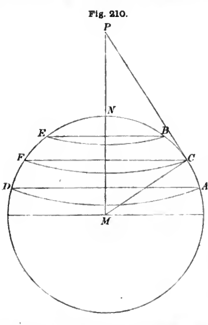


Fig. 210.

Sind in Fig. 210 AD und BE zwei beliebige Parallelkreise, beziehungsweise von der Breite φ und φ_1, so wird die Breite des mittleren Parallelkreises

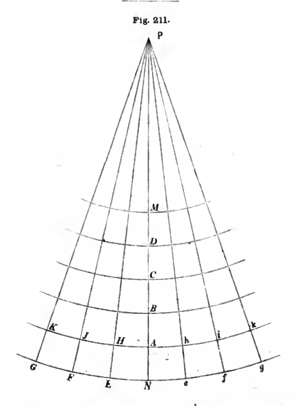
$$CF = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)$$

sein. Denkt man sich den Halbmesser $MC = r$ und die Berührungslinie PC an den Meridian $NBCA$ gezogen, so ist

$$PC = r \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1).$$

Um nun das Kartennetz für den gegebenen, zwischen den beiden Breitenkreisen BE und AD liegenden Theil der Erdoberfläche darzustellen, ziehe man durch die Mitte des Netzes den als eine Gerade erscheinenden Meridian MN (Fig. 211), trage auf ihm, von M bis N, nach dem gegebenen verjüngten Mafsstabe die einzelnen Meridiangrade MD, DC, ... oder Theile desselben, und von seiner Mitte aus den obigen

Fig. 211.



Werth PC (Fig. 210) bis P ab und beschreibe aus P mit PM, PD.... die dem Netze entsprechenden Parallelkreise GNg, KAk.... Bezeichnet man nun auf dem südlichsten Parallelkreise GNg, die für die Breite φ einem gewifsen Längenunterschiede, z. B. von einem Grade, zugehörige Bogenlänge durch l, so ist $l = \frac{r\pi \cos \varphi}{180^0}$ *). Trägt man diese Werthe von N aus nach beiden Seiten von MN bis E, F...., e, f.... ab, und zieht die Geraden GP, FP.... gP, so können diese, für einen kleinen Mafsstab der Karte, ohne grofsen Fehler als die Meridiane des Netzes angesehen werden. Bei Karten dagegen, die nach einem gröfseren Mafsstabe ausgeführt werden sollen, berechnet man nach der Breite der Punkte A, B.... M ebenfalls die Bogenlängen

*) Man findet diese Werthe in geogr. Meilen von 0^0 bis 90^0 in Intervallen von 30 zu 30 Minuten ausgedrückt in J. T. Mayer's prakt. Geom. IV. S. 124.

für die zugehörigen Längenunterschiede, trägt diese von A nach H, J, $K \ldots\ldots k$ auf und verbindet alle demselben Meridiane zugehörigen Punkte $G\,K \ldots\ldots F,\ J \ldots\ldots,\ g,\ k \ldots\ldots$ durch einen zusammenhängenden Linienzug, so werden die Parallelkreise von den Meridianen unter rechten Winkeln geschnitten werden, die Vierecke des Netzes daher denen auf der Erdoberfläche möglichst ähnlich sein.

§. 495.

In das construierte Kartennetz werden nun die Oerter nach ihrer bekannten Breite und Länge eingetragen und jeder der erhaltenen Punkte mit einem kleinen Kreise umzogen. Nach dem Eintragen der Oerter folgt die Einzeichnung der Gränzen des Landes und seiner Abtheilungen, der Flüfse, Gebirge und anderer bemerkenswerther Objecte, wozu man ältere, gute Specialkarten oder die aus der Detailmefsung hervorgegangenen Karten benutzt. Landstrafsen, Eisenbahnen u. s. w. werden nur bei Karten angegeben, die sehr in das Detail gehen sollen. Für Hauptstädte, Festungen, kleinere Städte, Flecken, Dörfer, Schlöfser u. s. w. hat man besondere Zeichen, die man auf die Karte trägt. Eben so werden auch die verschiedenen Gränzen durch besondere Zeichen dargestellt. Aufser der Schrift wird dann der Karte noch der Meilenmafsstab beigefügt.

§. 496.

Aufser den vorhin angedeuteten Constructionen des Netzes für die geographischen Karten, und zu denen auch noch die Murdoch'sche, de L'isle'sche, Flammsted'sche Projection gehören (m. vgl. J. T. Mayer's prakt. Geom. IV und Ulrich's prakt. Geom. II u. a.), benutzt man für besondere Zwecke auch noch die s. g. perspectivischen Projectionen, die sich durch den Ort des Auges (den Gesichtspunkt) und die Lage der Projections- oder Zeichenebene von einander unterscheiden. Nimmt man nämlich zur Zeichenebene die Ebene des Aequators, denkt sich das Auge in dem einen Pole und stellt auf der ersteren die Länder auf der entgegengesetzten Halbkugel dar, so erhält man die stereographische Polarprojection, auf welcher die Parallelkreise daher als concentrische Kreise und die Meridiane als gerade von dem Pole ausgehende Linien sich darstellen. Sie wird zu der Darstellung der nördlichen und südlichen Halbkugel der Erde und des gestirnten Himmels in den Atlanten angewandt. Nimmt man zur Zeichenebene einen Meridian, den Ort des Auges aber in dem Punkte des Aequators, der von dem Meridian um 90° absteht, so erhält man die stereographische Aequatorialprojection. Aufser dem Aequator und dem durch den Gesichtspunkt gehenden Meridian, die als Gerade sich darstellen, er-

scheinen alle anderen Parallelkreise und Meridiane als Kreisbogen. Dieser Projectionsart bedient man sich in den Atlanten bei der Darstellung der östlichen und westlichen Halbkugel der Erde.

Hin und wieder trifft man auch in den Atlanten einen Theil der Erde in stereographischer Horizontalprojection dargestellt. Bei dieser ist der Ort des Auges an einer beliebigen Stelle zwischen dem Aequator und dem einen der Pole, und die Zeichenebene so durch den Mittelpunkt der Erde gelegt, dafs der Gesichtspunkt als Pol des gröfsten Kreises erscheint. Bei dieser Projectionsart werden die Meridiane durch Kreisbogen, die Parallelkreise aber theils durch Kreise, theils durch Kreisbogen dargestellt.

Ausführlichere Darstellungen über die Entwerfung geographischer Karten findet man aufser in den schon angeführten Werken von J. T. Mayer und Ulrich noch in Umpfenbach's praktischer Geometrie II. Frankfurt a. M. 1834, Bauernfeind's Vermefsungskunde, München, 1862 und Littrow's Chorographie u. s. w. Wien, 1833.

Verbefserungen.

Seite 2, Zeile 18 v. O. lies Horizontalebene Statt Horizontallinie.
„ 56, „ 15 v. O. „ $r = 90^0 - \beta$ Statt $r = 90^0 - = \beta$.
„ 206, „ 12 v. U. „ verticale Statt seitliche.
„ 221, „ 3 v. O. „ Kopffläche Statt Oberfläche.
„ 239, „ 1 u. 2 v. O. sind die Wörter „wovon weiter unten die Rede“ zu streichen.
„ 252, „ 4 v. U. lies B Statt A.
„ 298, „ 12 v. U. „ $\frac{1}{2} ACD$ Statt ACD.
„ 305, „ 13 v. O. „ $AB = \sqrt{[}\ldots$ Statt $AB = a\sqrt{[}\ldots$
„ 314 in der zweiten Spalte der Tabelle lies 271° 2′ 17″ Statt 27° 2′ 17″.
„ 319, Zeile 20 v. O. lies DC Statt DB.
„ 325, „ 10 v. U. „ nun Statt nur.
„ 331, „ 3 v. U. „ XI Statt XII.
„ 349, „ 14 v. U. „ $B = \frac{bn.1}{bb.1} - \frac{bc.1}{bb.1} C$ oder $= \frac{cn.1}{bc.1} - \frac{cc.1}{bc.1} C$.
„ 388 lies im Schema ausgeglichene Statt ausgezeichnete.
„ 392, Zeile 19 v. O. lies $x_2 = x_1 + \ldots = x_1 + \ldots$
„ 392, „ 20 v. O. „ $y_2 = y_1 + \ldots = y_1 + \ldots$
„ 460, „ 14 v. O. „ $B_1 Z_1$ Statt $B Z_1$.
„ 486, „ 7 v. O. „ AC Statt Ac.



Druck von August Grimpe in Hannover.